ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણ વિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1218/273/છ, તા.14/03/2018

ભૌતિકવિજ્ઞાન

ભાગ II

ધોરણ XI

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10એ, ગાંધીનગર- 382010

© NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક NCERT, નવી દિલ્હી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં NCERT, નવી દિલ્હી અને ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

અનુવાદ

પ્રો. પી. એન. ગજ્જર
પ્રો. એમ. એસ. રામી
ડૉ. દિપક એચ. ગદાણી
શ્રી કે. ડી. પટેલ

સમીક્ષા

પ્રો. પી. બી. ઠાકોર
પ્રો. એન. કે. ભટ્ટ
પ્રિ. જી. ટી. પટેલ
ડૉ. જી. એમ. સુતરિયા
ડૉ. તરૂણ આર. ત્રિવેદી
શ્રી અશ્વિન એફ. ડોડિયા
શ્રી દિનેશ વી. સુથાર
શ્રી પી. એમ. પટેલ
શ્રી મયુર એમ. રાવલ
શ્રી વાસુદેવ બી. રાવલ
શ્રી આનંદ એન. ઠક્કર
શ્રી શૈલેષ એસ. પટેલ
શ્રી એ. જી. મોમીન

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય ટી. પારેખ

સંયોજન

ડૉ. ચિરાગ એચ. પટેલ
(વિષય સંયોજક : ભૌતિકવિજ્ઞાન)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તા. 25-10-2017ના ઠરાવ ક્રમાંક મશબ/1217/1036/છ -થી શાળા કક્ષાએ NCERTના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ XI**ના **ભૌતિકવિજ્ઞાન (ભાગ II)** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મુકતા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલા આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક સ્ટેટ લેવલની કમિટીની રચના કરવામાં આવી. આ કમિટિની સાથે NCERTના પ્રતિનિધી તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની એક ત્રિદિવસીય કાર્ય શિબીરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું છે. જેમાં ડૉ. એસ. કે. મકવાણા (RIE, ભોપાલ), ડૉ. કલ્પના મસ્કી (RIE, ભોપાલ), ડૉ. પી. એન. ગજ્જર, ડૉ. એન. કે. ભટ્ટ, ડૉ. જી. એમ. સુતરિયા અને શ્રી પી. એમ. પટેલે ઉપસ્થિત રહી પોતાના કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માન. અગ્રસચિવશ્રી (શિક્ષણ) દ્વારા અંગત રસ લઈને જરૂરી માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

પી. ભારતી (IAS)
નિયામક — કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા. 22-11-2019 — ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2018, પુનઃમુદ્રણ : 2019, 2020

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી પી. ભારતી, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005 recommends that childrens life at sc hool must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making childrens life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor A.W. Joshi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

PREFACE

More than a decade ago, based on National Policy of Education (NPE-1986), National Council of Educational Research and Training published physics textbooks for Classes XI and XII, prepared under the chairmanship of Professor T. V. Ramakrishnan, F.R.S., with the help of a team of learned co-authors. The books were well received by the teachers and students alike. The books, in fact, proved to be milestones and trend-setters. However, the development of textbooks, particularly science books, is a dynamic process in view of the changing perceptions, needs, feedback and the experiences of the students, educators and the society. Another version of the physics books, which was the result of the revised syllabus based on *National Curriculum Framework for School Education*-2000 (NCFSE-2000), was brought out under the guidance of Professor Suresh Chandra, which continued up to now. Recently the NCERT brought out the *National Curriculum Framework*-2005 (NCF-2005), and the syllabus was accordingly revised during a curriculum renewal process at school level. The higher secondary stage syllabus (NCERT, 2005) has been developed accordingly. The Class XI textbook contains fifteen chapters in two parts. Part I contains first eight chapters while Part II contains next seven chapters. This book is the result of the renewed efforts of the present Textbook Development Team with the hope that the students will appreciate the beauty and logic of physics. The students may or may not continue to study physics beyond the higher secondary stage, but we feel that they will find the thought process of physics useful in any other branch they may like to pursue, be it finance, administration, social sciences, environment, engineering, technology, biology or medicine. For those who pursue physics beyond this stage, the matter developed in these books will certainly provide a sound base.

Physics is basic to the understanding of almost all the branches of science and technology. It is interesting to note that the ideas and concepts of physics are increasingly being used in other branches such as economics and commerce, and behavioural sciences too. We are conscious of the fact that some of the underlying simple basic physics principles are often conceptually quite intricate. In this book, we have tried to bring in a conceptual coherence. The pedagogy and the use of easily understandable language are at the core of our effort without sacrificing the **rigour** of the subject. The nature of the subject of physics is such that a certain minimum use of mathematics is a must. We have tried to develop the mathematical formulations in a logical fashion, as far as possible.

Students and teachers of physics must realise that physics is a branch which needs to be understood, not necessarily memorised. As one goes from secondary to higher secondary stage and beyond, physics involves mainly four components, (a) large amount of **mathematical base**, (b) **technical words and terms**, whose normal English meanings could be quite different, (c) new **intricate concepts**, and (d) **experimental foundation**. Physics needs mathematics because we wish to develop objective description of the world around us and express our observations in terms of measurable quantities. Physics discovers new properties of particles and wants to create

a name for each one. The words are picked up normally from common English or Latin or Greek, but gives entirely different meanings to these words. It would be illuminating to look up words like energy, force, power, charge, spin, and several others, in any standard English dictionary, and compare their meanings with their physics meanings. Physics develops intricate and often weird-looking concepts to explain the behaviour of particles. Finally, it must be remembered that entire physics is based on observations and experiments, without which a theory does not get acceptance into the domain of physics.

This book has some features which, we earnestly hope, will enhance its usefulness for the students. Each chapter is provided with a **Summary** at its end for a quick overview of the contents of the chapter. This is followed by **Points to Ponder** which points out the likely misconceptions arising in the minds of students, hidden implications of certain statements/principles given in the chapter and **cautions** needed in applying the knowledge gained from the chapter. They also raise some thought-provoking questions which would make a student think about life beyond physics. Students will find it interesting to think and apply their mind on these **points**. Further, a large number of **solved examples** are included in the text in order to clarify the concepts and/or to illustrate the application of these concepts in everyday real-life situations. Occasionally, historical perspective has been included to share the excitement of sequential development of the subject of physics. Some **Boxed** items are introduced in many chapters either for this purpose or to highlight some special features of the contents requiring additional attention of the learners. Finally, a **Subject Index** has been added at the end of the book for ease in locating keywords in the book.

The special nature of physics demands, apart from conceptual understanding, the knowledge of certain conventions, basic mathematical tools, numerical values of important physical constants, and systems of measurement units covering a vast range from microscopic to galactic levels. In order to equip the students, we have included the necessary tools and database in the form of **Appendices** A-1 to A-9 at the end of the book. There are also some other appendices at the end of some chapters giving additional information or applications of matter discussed in that chapter.

Special attention has been paid for providing illustrative figures. To increase the clarity, the figures are drawn in two colours. A large number of **Exercises** are given at the end of each chapter. Some of these are from real-life situations. Students are urged to solve these and in doing so, they may find them very educative. Moreover, some **Additional Exercises** are given which are more challenging. Answers and hints to solve some of these are also included. In the entire book, SI units have been used. A comprehensive account of units and measurement is given in Chapter 2 as a part of prescribed syllabus/curriculum as well as a help in their pursuit of physics. A box-item in this chapter brings out the difficulty in measuring as simple a thing as the length of a long curved line. Tables of SI base units and other related units are given here

merely to indicate the presently accepted definitions and to indicate the high degree of accuracy with which measurements are possible today. The numbers given here are not to be memorised or asked in examinations.

There is a perception among students, teachers, as well as the general public that there is a steep gradient between secondary and higher secondary stages. But a little thought shows that it is bound to be there in the present scenario of education. Education up to secondary stage is general education where a student has to learn several subjects sciences, social sciences, mathematics, languages, at an elementary level. Education at the higher secondary stage and beyond, borders on acquiring professional competence, in some chosen fields of endeavour. You may like to compare this with the following situation. Children play cricket or badminton in lanes and small spaces outside (or inside) their homes. But then some of them want to make it to the school team, then district team, then State team and then the National team. At every stage, there is bound to be a steep gradient. Hard work would have to be put in whether students want to pursue their education in the area of sciences, humanities, languages, music, fine arts, commerce, finance, architecture, or if they want to become sportspersons or fashion designers.

Completing this book has only been possible because of the spontaneous and continuous support of many people. The Textbook Development Team is thankful to Dr. V. H. Raybagkar for allowing us to use his box item in Chapter 4 and to Dr. F. I. Surve for allowing us to use two of his box items in Chapter 15. We express also our gratitude to the Director, NCERT, for entrusting us with the task of preparing this textbook as a part of national effort for improving science education. The Head, Department of Education in Science and Mathematics, NCERT, was always willing to help us in our endeavour in every possible way.

The previous text got excellent academic inputs from teachers, students and experts who sincerely suggested improvement during the past few years. We are thankful to all those who conveyed these inputs to NCERT. We are also thankful to the members of the Review Workshop and Editing Workshop organised to discuss and refine the first draft. We thank the Chairmen and their teams of authors for the text written by them in 1988, which provided the base and reference for developing the 2002 version as well as the present version of the textbook. Occasionally, substantial portions from the earlier versions, particularly those appreciated by students/teachers, have been adopted/adapted and retained in the present book for the benefit of coming generation of learners.

We welcome suggestions and comments from our valued users, especially students and teachers. We wish our young readers a happy journey to the exciting realm of physics.

A. W. Joshi
Chief Advisor
Textbook Development Committee

ACKNOWLEDGEMENTS

The National Council of Educational Research and Training acknowledges the valuable contribution of the individuals and organisations involved in the development of Physics textbook for Class XI. The Council also acknowledges the valuable contribution of the following academics for reviewing and refining the manuscripts of this book: Deepak Kumar, Professor, School of Physical Sciences, Jawaharlal Nehru University, New Delhi; Pankaj Sharan, Professor, Jamia Millia Islamia, New Delhi; Ajoy Ghatak, Emeritus Professor, Indian Institute of Technology, New Delhi; V. Sundara Raja, Professor, Sri Venkateswara University, Tirupati, Andhra Pradesh; C.S. Adgaonkar, Reader (Retd), Institute of Science, Nagpur, Maharashtra; D.A. Desai, Lecturer (Retd), Ruparel College, Mumbai, Maharashtra; F.I. Surve, Lecturer, Nowrosjee Wadia College, Pune, Maharashtra; Atul Mody, Lecturer (SG), VES College of Arts, Science and Commerce, Chembur, Mumbai, Maharashtra; A.K. Das, PGT, St. Xavier's Senior Secondary School, Delhi; Suresh Kumar, PGT, Delhi Public School, Dwarka, New Delhi; Yashu Kumar, PGT, Kulachi Hansraj Model School, Ashok Vihar, Delhi; K.S. Upadhyay, PGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Muzaffar Nagar (U.P.); I.K. Gogia, PGT, Kendriya Vidyalaya, Gole Market, New Delhi; Vijay Sharma, PGT, Vasant Valley School, Vasant Kunj, New Delhi; R.S. Dass, Vice Principal (Retd), Balwant Ray Mehta Vidya Bhawan, Lajpat Nagar, New Delhi and Parthasarthi Panigrahi, PGT, D.V. CLW Girls School, Chittranjan, West Bengal.

The Council also gratefully acknowledges the valuable contribution of the following academics for the editing and finalisation of this book: A.S. Mahajan, Professor (Retd), Indian Institute of Technology, Mumbai, Maharashtra; D.A. Desai, Lecturer (Retd), Ruparel College, Mumbai, Maharashtra; V.H. Raybagkar, Reader, Nowrosjee Wadia College, Pune, Maharashtra and Atul Mody, Lecturer (SG), VES College of Arts, Science and Commerce, Chembur, Mumbai, Maharashtra.

The council also acknowledges the valuable contributions of the following academics for reviewing and refining the text in 2017: A.K. Srivastava, DESM, NCERT, New Delhi; Arnab Sen, NERIE, New Delhi; L.S. Chauhan, RIE, Bhopal; O.N. Awasthi (Retd.), RIE., Bhopal; Rachna Garg, DESM, NCERT, New Delhi; Raman Namboodiri, RIE, Mysuru; R.R. Koireng, DCS, NCERT, New Delhi; Shashi Prabha, DESM, NCERT, New Delhi; and S.V. Sharma, RIE, Ajmer.

Special thanks are due to M. Chandra, Professor and Head, DESM, NCERT for her support.

The Council also acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station, Inder Kumar, DTP Operator; Saswati Banerjee, Copy Editor; Abhimanu Mohanty and Anuradha, Proof Readers in shaping this book.

The contributions of the Publication Department in bringing out this book are also duly acknowledged.

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group for Textbooks in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Chairman, Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshbhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

A.W. Joshi, *Professor,* Honorary Visiting Scientist, NCRA, Pune (Formerly at Department of Physics, University of Pune)

Members

Anuradha Mathur, *PGT* , Modern School, Vasant Vihar, New Delhi

Chitra Goel, *PGT,* Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Tyagraj Nagar, Lodhi Road, New Delhi

Gagan Gupta, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi

H.C. Pradhan, *Professor,* Homi Bhabha Centre of Science Education, Tata Institute of Fundamental Research, V.N. Purav Marg, Mankhurd, Mumbai

N. Panchapakesan, *Professor* (Retd.), Department of Physics and Astrophysics, University of Delhi, Delhi

P.K. Srivastava, *Professor* (Retd.), Director, CSEC, University of Delhi, Delhi

P.K. Mohanty, *PGT,* Sainik School, Bhubaneswar

P.C. Agarwal, *Reader,* Regional Institute of Education, NCERT, Sachivalaya Marg, Bhubaneswar

R. Joshi, *Lecturer* (S.G.), DESM, NCERT, New Delhi

S. Rai Choudhary, *Professor,* Department of Physics and Astrophysics, University of Delhi, Delhi

S.K. Dash, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi

Sher Singh, *PGT,* Lodhi Road, New Delhi

S.N. Prabhakara, *PGT,* DM School, Regional Institute of Education, NCERT, Mysore

Thiyam Jekendra Singh, *Professor,* Department of Physics, University of Manipur, Imphal

V.P. Srivastava, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Member-Coordinator

B.K. Sharma, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

COVER DESIGN

(Adapted from the website of the Nobel Foundation
http://www.nobelprize.org)

The strong nuclear force binds protons and neutrons in a nucleus and is the strongest of natures four fundamental forces. A mystery surrounding the strong nuclear force has been solved. The three quarks within the proton can sometimes appear to be free, although no free quarks have ever been observed. The quarks have a quantum mechanical property called colour and interact with each other through the exchange of particles called gluons nature glue .

BACK COVER

(Adapted from the website of the ISRO
http://www.isro.org)

CARTOSAT-1 is a state-of-the-art Remote Sensing Satellite, being eleventh one in the Indian Remote Sensing (IRS) Satellite Series, built by ISRO. CARTOSAT-1, having mass of 156 kg *at lift off, has been launched into a* 618 km *high polar Sun Synchronous Orbit (SSO) by ISROs Polar Satellite Launch Vehicle, PSLV-C6. It is mainly intended for cartographic applications.*

શિક્ષકો માટે નોંધ

અભ્યાસક્રમને અભ્યાસુ-કેન્દ્રિત બનાવવા માટે, શીખવવાની પ્રક્રિયામાં વિદ્યાર્થીઓને પ્રત્યક્ષ ભાગ લેતા અને આંતરક્રિયા કરતા કરવા જોઈએ. અઠવાડિયે એક વાર અથવા દર છ તાસમાંથી એકવાર આવા સેમિનાર (જ્ઞાનચર્ચાસભા) માટે કે પરસ્પર આંતરક્રિયા માટે એક સારું પુનરાવર્તન બની શકશે. આ પુસ્તકના કેટલાક મુદ્દાઓના સંદર્ભમાં ચર્ચાને સર્વ-સામેલ બનાવવા માટે કેટલાંક સૂચનો નીચે આપેલ છે :

વિદ્યાર્થીઓને પાંચ કે છ ના સમૂહોમાં વહેંચી શકાય. જો જરૂરી જણાય તો આ સમૂહોના સભ્યોને વર્ષ દરમિયાન એકથી બીજામાં ફેરફાર કરાવી શકાય.

ચર્ચા માટેનો મુદ્દો બોર્ડ પર અથવા કાગળ પર રજુ કરી શકાય. વિદ્યાર્થીઓને તેમના પ્રતિભાવો અથવા પ્રશ્નોના ઉત્તરો જે કંઈ કહેવામાં આવે તે આપેલા પાના પર લખવાનું કહી શકાય. તેમણે પછીથી તેમના સમૂહોમાં ચર્ચા કરીને તે પાનાઓ પર સુધારાઓ કે ટીકાઓ ઉમેરવી જોઈએ. આ બાબતો વિશે તે જ તાસમાં કે પછીના તાસમાં ચર્ચા કરવી જોઈએ. આ પાનાઓનું મૂલ્યાંકન પણ થઈ શકે.

અમે અહીં પુસ્તકમાંથી ત્રણ શક્ય મુદ્દાઓ સૂચવીએ છીએ. સૂચવેલા પ્રથમ બે મુદ્દાઓ, હકીકતમાં, ખૂબ વ્યાપક છે અને છેલ્લી ચાર કે વધુ સદીઓ દરમિયાન વિજ્ઞાનના વિકાસ અંગે છે. શિક્ષકો અને વિદ્યાર્થીઓએ દરેક સેમિનાર (જ્ઞાનચર્ચાસભા) માટે આવા બીજા વધુ મુદ્દાઓ વિશે વિચાર કરવો.

1. વિચારો (ખ્યાલો) જેમણે સંસ્કૃતિને બદલી નાખી

ધારો કે માનવજાત લુપ્ત (નાબૂદ) થઈ રહી છે. ભવિષ્યની પેઢી અથવા પરગ્રહવાસી મુલાકાતીઓ માટે કોઈ સંદેશ છોડી જવો છે. વિખ્યાત ભૌતિકવિજ્ઞાની આર. પી. ફીનમેન (R. P. Feynmann) ભવિષ્યમાં કોઈ અસ્તિત્વ ધરાવનાર હોય તો તેમને માટે નીચેનો સંદેશ છોડી જવા માગતા હતા :

"દ્રવ્ય પરમાણુઓનું બનેલું છે."

એક વિદ્યાર્થિની અને સાહિત્યના શિક્ષક નીચેનો સંદેશ છોડી જવા માગતા હતા :

"પાણીનું અસ્તિત્વ હતું તેથી માનવો થઈ શક્યા."

અન્ય એક વ્યક્તિએ એમ વિચાર્યું કે, તે આવો હોવો જોઈએ :

"ગતિ માટે ચક્રનો ખ્યાલ"

આવનારી પેઢીઓ માટે તમારામાંની દરેક વ્યક્તિ કયો સંદેશ છોડી જવા માગે છે તે લખો. પછી તમારા સમૂહમાં તે ચર્ચો અને જો તમે તમારું મન બદલવા માંગતા હો તો તેમાં સુધારો-વધારો કરો. તે તમારા શિક્ષકને આપો અને તે પછી થનારી ચર્ચામાં જોડાઓ.

2. ન્યૂનીકરણ

વાયુનો ગતિવાદ મોટાને નાના સાથે, સ્થૂળ ને સૂક્ષ્મ સાથે, સંબંધિત કરે છે. એક તંત્ર તરીકે વાયુ તેના ઘટકો-અણુઓ સાથે સંબંધિત છે. તંત્રને તેના ઘટકોના ગુણધર્મોના પરિણામરૂપે દર્શાવવાની આ રીતને સામાન્ય રીતે **ન્યૂનીકરણ** કહે છે. તે સમૂહની વર્તણૂકને તેના વ્યક્તિગત ઘટકોના સરળ અને આગાહી કરી શકાય તેવા ગુણધર્મો દ્વારા સમજાવે છે. આ અભિગમમાં, સ્થૂળ નિરીક્ષણો (અવલોકનો) અને સૂક્ષ્મ ગુણધર્મો એકબીજા પર અવલંબન ધરાવે છે. આ રીત ઉપયોગી છે ?

સમજણ મેળવવાની આ રીતને, ભૌતિકવિજ્ઞાન અને રસાયણવિજ્ઞાનના વિષયો બહાર, તેની પોતાની મર્યાદાઓ છે અને આ વિષયોમાં પણ હશે. કોઈ રંગચિત્રને કેનવાસ અને ચિત્રકામમાં વપરાયેલા રસાયણોના સમૂહ તરીકે ચર્ચી **શકાય નહિ**. જે ઉત્પન્ન થયું છે તે તેના ઘટકોના સરવાળા કરતાં વિશેષ છે.

પ્રશ્ન : આવા અભિગમનો ઉપયોગ થયો હોય તેવા બીજા ક્ષેત્રોનો તમે વિચાર કરી શકો છો ?

જે તંત્ર તેના ઘટકોના પદમાં સંપૂર્ણપણે વર્ણવી શકાતું હોય તેવા એક તંત્રનું ટૂંકમાં વર્ણન કરો. એક તંત્ર એવું વર્ણવો, જેમાં આવું થઈ શકતું ન હોય. સમૂહના અન્ય સભ્યો સાથે ચર્ચા કરો અને તમારા મંતવ્યો લખો. તે તમારા શિક્ષકને આપો અને તે પછી થનારી ચર્ચામાં જોડાઓ.

3. ઉષ્મા અંગે આણ્વિક અભિગમ

નીચેના કિસ્સામાં શું થશે તે વિશે તમારા વિચારો જણાવો : એક બંધ પાત્રના બે ભાગ છિદ્રાળુ દિવાલ વડે અલગ કરેલ છે. એક ભાગને નાઈટ્રોજન (N_2) વાયુ વડે અને બીજાને CO_2 વડે ભરેલ છે. એક બાજુથી બીજી બાજુ વાયુઓ વિસરણ પામશે.

પ્રશ્ન 1 : બન્ને વાયુઓ એકસમાન પ્રમાણમાં વિસરણ પામશે ?
જો ના, તો બન્નેમાં ફેરફારો કેવા હશે ? કારણો આપો.

પ્રશ્ન 2 : શું દબાણ અને તાપમાન બદલાશે નહિ ? જો ના, તો બન્નેમાં ફેરફારો કેવા હશે ? કારણો આપો.

તમારા જવાબો લખો. સમૂહમાં ચર્ચા કરો અને તેઓમાં સુધારા કરો અથવા ટીકાઓ ઉમેરો. શિક્ષકને આપો અને ચર્ચામાં જોડાઓ.

વિદ્યાર્થીઓ અને શિક્ષકોને જણાશે કે આવા સેમિનાર (ચર્ચાસભા) અને ચર્ચાઓ માત્ર ભૌતિકવિજ્ઞાન નહિ પણ વિજ્ઞાન અને સમાજવિજ્ઞાનની પુષ્કળ સમજ તરફ દોરી જાય છે. તેનાથી વિદ્યાર્થીઓમાં અમુક પરિપક્વતા પણ આવશે.

અનુક્રમણિકા (ભાગ I)

પ્રકરણ 1

ભૌતિક જગત (PHYSICAL WORLD) 1

પ્રકરણ 2

એકમ અને માપન (UNITS AND MEASUREMENT) 16

પ્રકરણ 3

સુરેખપથ પર ગતિ (MOTION IN A STRAIGHT LINE) 39

પ્રકરણ 4

સમતલમાં ગતિ (MOTION IN A PLANE) 65

પ્રકરણ 5

ગતિના નિયમો (LAWS OF MOTION) 89

પ્રકરણ 6

કાર્ય, ઊર્જા અને પાવર (WORK, ENERGY AND POWER) 114

પ્રકરણ 7

કણોનાં તંત્રો અને ચાકગતિ (SYSTEMS OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION) 141

પ્રકરણ 8

ગુરુત્વાકર્ષણ (GRAVITATION) 183

પરિશિષ્ટ (APPENDICES) 207

જવાબો (ANSWERS) 223

અનુક્રમણિકા

FOREWORD *iii*
PREFACE *vi*
શિક્ષકો માટે નોંધ *ix*

પ્રકરણ 9

ઘન પદાર્થોના યાંત્રિક ગુણધર્મો (MECHANICAL PROPERTIES OF SOLIDS)

9.1 પ્રસ્તાવના 235
9.2 ઘન પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક 236
9.3 પ્રતિબળ અને વિકૃતિ 236
9.4 હૂકનો નિયમ 238
9.5 પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર 238
9.6 સ્થિતિસ્થાપક અંકો 239
9.7 દ્રવ્યોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકનો ઉપયોગ 244

પ્રકરણ 10

તરલના યાંત્રિક ગુણધર્મો (MECHANICAL PROPERTIES OF FLUIDS)

10.1 પ્રસ્તાવના 250
10.2 દબાણ 250
10.3 ધારારેખી વહન 257
10.4 બર્નુલીનો સિદ્ધાંત 258
10.5 શ્યાનતા (સ્નિગ્ધતા) 262
10.6 પૃષ્ઠતાણ 264

પ્રકરણ 11

દ્રવ્યના ઉષ્મીય ગુણધર્મો (THERMAL PROPERTIES OF MATTER)

11.1 પ્રસ્તાવના 278
11.2 તાપમાન અને ઉષ્મા 278
11.3 તાપમાનનું માપન 279
11.4 આદર્શ વાયુ સમીકરણ અને નિરપેક્ષ તાપમાન 279
11.5 ઉષ્મીય પ્રસરણ 280
11.6 વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા 284
11.7 કૅલોરિમેટ્રી 285
11.8 અવસ્થાનો ફેરફાર 286
11.9 ઉષ્માનું સ્થાનાંતર (પ્રસરણ) 290
11.10 ન્યૂટનનો શિતનનો નિયમ 296

પ્રકરણ 12

થરમૉડાયનેમિક્સ (THERMODYNAMICS)

12.1 પ્રસ્તાવના 303
12.2 તાપીય સંતુલન 304
12.3 થરમૉડાયનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ 305
12.4 ઉષ્મા, આંતરિક ઊર્જા અને કાર્ય 306
12.5 થરમૉડાયનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ 307
12.6 વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (ક્ષમતા) 308

12.7 થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા ચલરાશિઓ અને અવસ્થા સમીકરણ 309
12.8 થરમૉડાયનેમિક પ્રક્રિયાઓ 310
12.9 ઉષ્મા-એન્જિનો 313
12.10 રેફ્રિજરેટરો અને હીટ (ઉષ્મા) પંપો 313
12.11 થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ 314
12.12 પ્રતિવર્તી અને અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ 315
12.13 કાર્નોટ એન્જિન 316

પ્રકરણ 13

ગતિવાદ (KINETIC THEORY)

13.1 પ્રસ્તાવના 323
13.2 દ્રવ્યનું આણ્વિક રૂપ 323
13.3 વાયુઓની વર્તણૂક 325
13.4 આદર્શ વાયુનો ગતિવાદ 328
13.5 ઊર્જાના સમવિભાજનનો નિયમ 332
13.6 વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા 333
13.7 સરેરાશ મુક્ત પથ 335

પ્રકરણ 14

દોલનો (OSCILLATIONS)

14.1 પ્રસ્તાવના 341
14.2 આવર્ત અને દોલિત ગતિઓ 342
14.3 સરળ આવર્તગતિ 344
14.4 સરળ આવર્તગતિ અને નિયમિત વર્તુળમય ગતિ 346
14.5 સરળ આવર્તગતિમાં વેગ અને પ્રવેગ 348
14.6 સરળ આવર્તગતિ માટે બળનો નિયમ 349
14.7 સરળ આવર્તગતિમાં ઊર્જા 350
14.8 સરળ આવર્તગતિ કરતાં કેટલાંક તંત્રો 352
14.9 અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ 355
14.10 પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો અને અનુનાદ 357

પ્રકરણ 15

તરંગો (WAVES)

15.1 પ્રસ્તાવના 367
15.2 લંબગત અને સંગત તરંગો 369
15.3 પ્રગામી તરંગમાં સ્થાનાંતર સંબંધ 370
15.4 પ્રગામી તરંગની ઝડપ 373
15.5 તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત 376
15.6 તરંગોનું પરાવર્તન 378
15.7 સ્પંદ 382
15.8 ડૉપ્લર અસર 384

જવાબો (ANSWERS) 395

BIBLIOGRAPHY 405

પારિભાષિક શબ્દો 407

પ્રકરણ 9

ઘન પદાર્થોના યાંત્રિક ગુણધર્મો
(MECHANICAL PROPERTIES OF SOLIDS)

9.1 પ્રસ્તાવના
9.2 ઘન પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક
9.3 પ્રતિબળ અને વિકૃતિ
9.4 હૂકનો નિયમ
9.5 પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર
9.6 સ્થિતિસ્થાપક અંકો
9.7 દ્રવ્યની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકના ઉપયોગો
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દા
સ્વાધ્યાય
વધારાના સ્વાધ્યાય

9.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણે પ્રકરણ 7માં પદાર્થના ભ્રમણનો અભ્યાસ કર્યો અને તે પરથી સમજાયું કે પદાર્થની ગતિ પદાર્થમાં દળ-વિતરણ કેવી રીતે થયું છે, તેના પર આધારિત છે. આપણે દૃઢ પદાર્થની બહુ સામાન્ય સ્થિતિ સુધી સીમિત રહ્યા હતા. સામાન્યતઃ દૃઢ પદાર્થ એટલે એવો સખત ઘન પદાર્થ જેનો આકાર અને કદ નિશ્ચિત હોય છે. પરંતુ વાસ્તવમાં પદાર્થને ખેંચી, દબાવી કે વાળી શકાય છે. દેખીતી રીતે જ દૃઢ સ્ટીલના સળિયાને પણ પૂરતું મોટું બાહ્ય બળ લાગુ પાડીને વિરૂપિત કરી શકાય છે. આનો અર્થ એ થયો કે ઘન પદાર્થો પૂર્ણરૂપે દૃઢ પદાર્થ નથી.

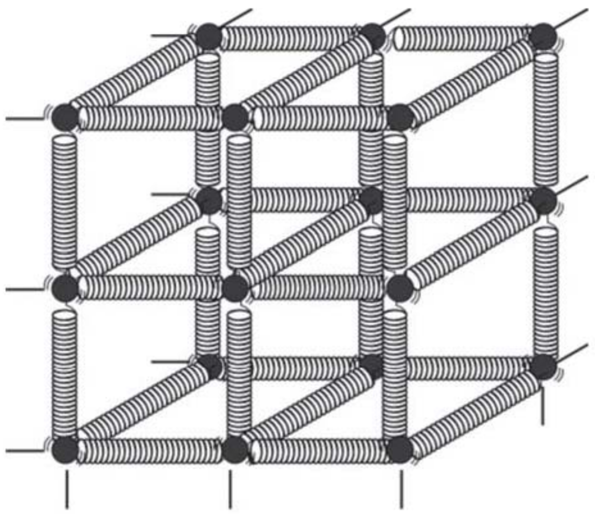
ઘન પદાર્થને ચોક્કસ આકાર અને પરિમાણ હોય છે. ઘન પદાર્થનો આકાર કે પરિમાણમાં ફેરફાર કરવા (અથવા વિરૂપિત કરવા) બળની જરૂર પડે. જો તમે સર્પીલ આકારની સ્પ્રિંગના છેડાને કાળજીપૂર્વક ખેંચો તો તેની લંબાઈમાં થોડો વધારો થાય છે. જ્યારે તમે સ્પ્રિંગના છેડાને છોડી દો ત્યારે તે પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પાછા મેળવે છે. પદાર્થના જે ગુણધર્મને કારણે વિરૂપકબળ દૂર કરતાં તે પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પુનઃપ્રાપ્ત કરે છે. તેને **સ્થિતિસ્થાપકતા** કહે છે અને ઉત્પન્ન થતા વિરૂપણને **સ્થિતિસ્થાપક** વિરૂપણ કહે છે. લૂગદી (Putty) અથવા કાદવ (mud)ના પિંડ પર જો તમે બળ લાગુ પાડો તો તેમાં પોતાનો પ્રારંભિક આકાર પાછો મેળવવાની વૃત્તિ હોતી નથી અને તે કાયમ માટે વિરૂપિત થઈ જાય છે. આવા પદાર્થોને **પ્લાસ્ટિક** કહેવાય છે અને તેના આવા ગુણધર્મને **પ્લાસ્ટિસિટી (Plasticity)** કહે છે. લૂગદી અને કાદવ આદર્શ પ્લાસ્ટિકની નજીક છે.

એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઇનમાં દ્રવ્યની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક મહત્ત્વની ભૂમિકા ભજવે છે. ઉદાહરણ તરીકે બિલ્ડિંગની ડિઝાઇન કરવા માટે સ્ટીલ, કૉંક્રિટ વગેરે જેવાં દ્રવ્યોના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મોનું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. આ જ રીતે બ્રિજ, ઑટોમોબાઇલ, રોપ-વેની ડિઝાઇન વગેરે માટે પણ આ વાત સાચી છે. એવો પણ પ્રશ્ન પૂછી શકાય કે શું આપણે વધુ હલકા પરંતુ મજબૂત હોય તેવાં ઍરોપ્લેનની ડિઝાઇન કરી શકીએ ? શું આપણે એવાં કૃત્રિમ અંગો ડિઝાઇન કરી શકીએ કે જે હલકા પરંતુ મજબૂત હોય ? શા માટે રેલવે ટ્રેકનો આકાર I જેવો વિશિષ્ટ હોય છે ? શા માટે કાચ બટકણો હોય છે, જ્યારે પિત્તળ એવું નથી ? આ બધા જ પ્રશ્નોના જવાબની શરૂઆત સરળ પ્રકારના બોજ કે બળો કેવી રીતે જુદા જુદા ઘન પદાર્થોને વિરૂપિત કરે છે,

તેના અભ્યાસથી થાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે ઘન પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક અને યાંત્રિક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. જે આવા ઘણા પ્રશ્નોનો ઉકેલ આપશે.

9.2 ઘન પદાર્થોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક (ELASTIC BEHAVIOUR OF SOLIDS)

આપણે જાણીએ છીએ કે ઘન પદાર્થમાં દરેક પરમાણુ કે અણુ તેના પડોશી પરમાણુઓ કે અણુઓ દ્વારા ઘેરાયેલા હોય છે. આંતર પરમાણ્વીક કે આંતર આણ્વીક બળો વડે તેઓ એકબીજાં સાથે જકડાયેલાં હોય છે અને સ્થાયી સંતુલિત અવસ્થામાં રહે છે. જ્યારે ઘન પદાર્થ વિરૂપણ અનુભવે ત્યારે પરમાણુઓ કે અણુઓ તેમના સંતુલન સ્થાનેથી સ્થાનાંતરિત થાય છે. પરિણામે આંતર પરમાણ્વીય (અથવા આંતરઆણ્વીય) અંતરમાં ફેરફાર થાય છે. જ્યારે વિરૂપકબળ દૂર કરવામાં આવે છે ત્યારે આંતર પરમાણ્વીય બળો તેમને મૂળ સ્થાને લઈ જાય છે અને ઘન પદાર્થ પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પુનઃપ્રાપ્ત કરે છે. પુનઃસ્થાપનની આ પ્રક્રિયા આકૃતિ 9.1માં દર્શાવેલ સ્પ્રિંગ અને બૉલનાં મોડલ દ્વારા સમજી શકાય છે. જ્યાં બૉલ પરમાણુઓને તથા સ્પ્રિંગ આંતર પરમાણ્વીક બળોને રજૂ કરે છે.



આકૃતિ 9.1 ઘન પદાર્થની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક માટેનું "સ્પ્રિંગ-બૉલ" મોડલ

જો તમે કોઈ પણ બૉલને તેની સંતુલન સ્થિતિથી સ્થાનાંતર કરાવવાનો પ્રયત્ન કરશો તો સ્પ્રિંગનું તંત્ર બૉલને તેના મૂળ સ્થાને પાછો લઈ જવાનો પ્રયત્ન કરશે. આમ, ઘન પદાર્થની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક ઘન પદાર્થની સૂક્ષ્મ પ્રકૃતિના સંદર્ભે સમજાવી શકાય. અંગ્રેજ ભૌતિકશાસ્ત્રી રોબર્ટ હૂકે (ઈ.સ. 1635-1703) સ્પ્રિંગ પર પ્રયોગ કરીને શોધી કાઢ્યું કે પદાર્થોમાં ઉદ્ભવતો લંબાઈનો ફેરફાર લાગુ પડેલ બળ અથવા બોજ (load)ને સપ્રમાણમાં હોય છે. 1676માં તેણે સ્થિતિસ્થાપકતાનો નિયમ આપ્યો જે હવે હૂકના નિયમ વડે ઓળખાય છે. આપણે તેને વિશે પરિચ્છેદ 9.4માં અભ્યાસ કરીશું. બોઇલના નિયમની માફક આ નિયમ પણ વિજ્ઞાનના શરૂઆતના માત્રાત્મક સંબંધો પૈકીનો એક છે. એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઈનના સંદર્ભે જુદા જુદા બોજ હેઠળ દ્રવ્યોની વર્તણૂક જાણવી ખૂબ જ મહત્ત્વની છે.

9.3 પ્રતિબળ અને વિકૃતિ (STRESS AND STRAIN)

જ્યારે કોઈ પદાર્થ પર એવી રીતે બળ લગાડવામાં આવે કે તે હજીય (ગતિની દૃષ્ટિએ) સ્થાયી સંતુલનમાં રહે તો તે ઓછાવત્તા પ્રમાણમાં વિરૂપણ પામે છે. જેનો આધાર પદાર્થનાં દ્રવ્યની પ્રકૃતિ તથા વિરૂપકબળનાં માન પર હોય છે. એવું બની શકે કે ઘણાં દ્રવ્યોમાં આ વિરૂપણ જોઈ શકાય નહિ, પરંતુ વિરૂપણ થતું જ હોય છે. જ્યારે પદાર્થ પર વિરૂપકબળ લગાડવામાં આવે ત્યારે પદાર્થમાં પુનઃસ્થાપકબળ ઉદ્ભવે છે. આ પુનઃસ્થાપકબળનું માન લાગુ પાડેલ બળ જેટલું જ પરંતુ તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્ભવતાં પુનઃસ્થાપકબળને **પ્રતિબળ** કહે છે. પદાર્થનાં A આડછેદનાં ક્ષેત્રફળને લંબદિશામાં લાગુ પાડેલ બળ F હોય તો

$$\text{પ્રતિબળનું માન} = F/A \tag{9.1}$$

પ્રતિબળનો SI એકમ $N\ m^{-2}$ અથવા પાસ્કલ (Pa) અને તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $[ML^{-1}T^{-2}]$ છે.

જ્યારે કોઈ ઘન પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડવામાં આવે ત્યારે તેના પરિમાણમાં ત્રણ રીતે ફેરફાર થઈ શકે છે. જે આકૃતિ 9.2માં દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 9.2(a)માં નળાકારને તેના આડછેદને લંબરૂપે બે સમાન બળો લાગુ પાડીને ખેંચવામાં આવેલ છે. આ કિસ્સામાં એકમ આડછેદ દીઠ પુનઃસ્થાપક બળને **તણાવ પ્રતિબળ (Tensile stress)** કહે છે. જો બળોની અસર હેઠળ નળાકાર સંકોચન પામે તો એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ પુનઃસ્થાપક બળને **દાબીય પ્રતિબળ (Compresive stress)** કહે છે. તણાવ અને દાબીય પ્રતિબળને **સંગત પ્રતિબળ (Longitudinal stress)** પણ કહે છે.

બંને કિસ્સામાં નળાકારની લંબાઈમાં ફેરફાર થાય છે. પદાર્થની લંબાઈમાં થતો ફેરફાર ΔL અને પદાર્થની મૂળ લંબાઈ L (આ કિસ્સામાં નળાકાર માટે)ના ગુણોત્તરને **સંગત વિકૃતિ (Longitudinal strain)** કહે છે.

$$\text{સંગત વિકૃતિ} = \frac{\Delta L}{L} \tag{9.2}$$

જોકે આકૃતિ 9.2(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ, નળાકારના આડછેદને સમાંતરે પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં બે સમાન વિરૂપક બળો લગાડવામાં આવે ત્યારે, નળાકારની સામસામી બાજુઓ વચ્ચે સાપેક્ષ સ્થાનાંતર થાય છે. અહીં લાગુ પાડેલ સ્પર્શીય બળને કારણે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્ભવતા પુનઃસ્થાપક બળને **સ્પર્શીય અથવા આકાર પ્રતિબળ (Tangential or Shearing stress) કહે છે.**

રોબર્ટ હૂક (Robert Hooke) (ઈ.સ. 1635-1703)

રોબર્ટ હૂકનો જન્મ 18 જુલાઈ, 1635ના રોજ ફ્રેશવોટર, આઇસલ ઑફ વાઇટમાં થયો હતો. તે સત્તરમી શતાબ્દીના અંગ્રેજી વૈજ્ઞાનિકો પૈકીના એક હોશિયાર અને બહુમુખી પ્રતિભાવાળા હતા. તેમણે ઑક્સફર્ડ વિશ્વવિદ્યાલયમાં અભ્યાસ શરૂ કર્યો પરંતુ ક્યારેય સ્નાતક થઈ શક્યા નહિ છતાં તે પ્રતિભાશાળી સંશોધક યંત્રો બનાવનાર અને બિલ્ડિંગના ડિઝાઇનર હતા. તે બોઇલ-વાયુપંપની રચના કરવામાં રોબર્ટ બોઇલના મદદનીશ તરીકે રહ્યા હતા. નવી સંસ્થાપિત રોયલ સોસાયટીના 'પ્રયોગ-ક્યુરેટર' તરીકે 1662માં તે નિમણૂક પામ્યા. 1665માં તે ગ્રેશમ કૉલેજમાં ભૂમિતિના પ્રૉફેસર બન્યા, જ્યાં તેણે ખગોળીય અવલોકનો કર્યાં. તેમણે ગ્રેગોરિયન પરાવર્તક ટેલિસ્કૉપની રચના કરી, ટ્રેપિઝિયમમાં પાંચમા તારાની અને ઓરીઅન તારામંડળમાં એક તારાપુંજની શોધ કરી. ગુરુ પોતાની અક્ષ પર ભ્રમણ કરે છે તેવું સૂચન કર્યું, મંગળ ગ્રહનાં વિગતવાર રેખાચિત્રો તૈયાર કર્યાં જેનો તે પછીથી ઓગણીસમી શતાબ્દીમાં ઉપયોગ કરીને મંગળ ગ્રહનો ભ્રમણ-દર નક્કી થયો, ગ્રહોની ગતિનું વર્ણન કરવા માટેનો 'વ્યસ્ત વર્ગ નિયમ' રજૂ કર્યો. જેને પાછળથી ન્યૂટને સંશોધિત કર્યો વગેરે. તે રોયલ સોસાયટીના સભ્ય (Fellow) તરીકે ચૂંટાઈ આવ્યા અને 1667 થી 1682 આ સોસાયટીના સેક્રેટરી તરીકે સેવાઓ આપી. 'માઇક્રોગ્રાફિયા'માં પ્રસ્તુત તેની અવલોકન શ્રેણીઓમાં પ્રકાશના તરંગ સિદ્ધાંતનું સૂચન કર્યું અને કૉર્ક (Cork)ના અભ્યાસનાં પરિણામ સ્વરૂપે જીવવિજ્ઞાનના સંદર્ભે પ્રથમ વખત કોષ (cell) શબ્દનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

ભૌતિકશાસ્ત્રીઓમાં રોબર્ટ હૂક તેમના સ્થિતિસ્થાપકતાનાં નિયમની શોધ માટે સૌથી વધુ પ્રચલિત હતા, (Ut tensio, sic vis) આ એક લેટિન રજૂઆત છે. જેનો અર્થ થાય છે જેવું વિરૂપણ તેવું બળ. આ નિયમે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ તથા સ્થિતિસ્થાપકતા દ્રવ્યોને સમજવા માટેનો આધાર આપ્યો.

આકૃતિ 9.2 (b) મુજબ લાગુ પાડેલ સ્પર્શીય બળને કારણે નળાકારની બે સામસામી સપાટી વચ્ચેનું સાપેક્ષ સ્થાનાંતર Δx છે. પરિણામે ઉદ્ભવતી વિકૃતિ **આકાર વિકૃતિ** (Shearing strain) તરીકે ઓળખાય છે અને તેને સાપેક્ષ સ્થાનાંતર Δx તથા નળાકારની લંબાઈ Lના ગુણોત્તર સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

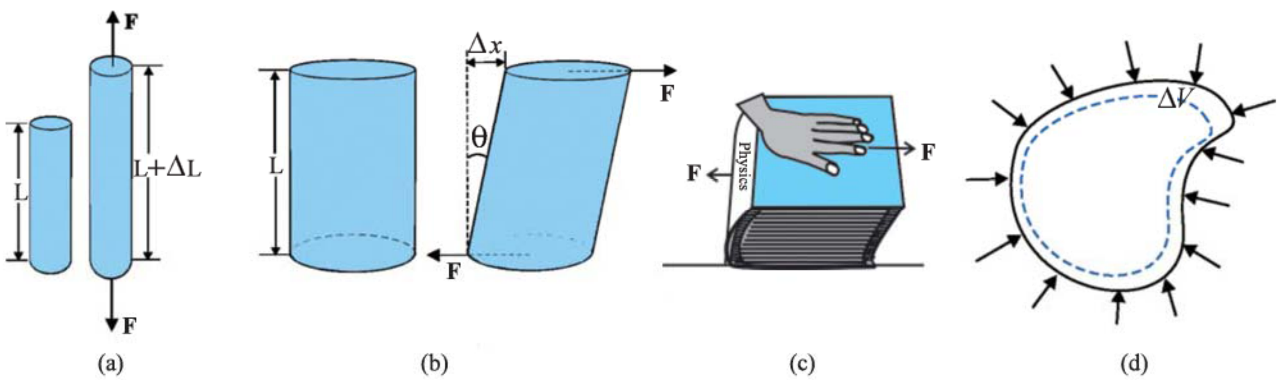
$$\text{આકાર વિકૃતિ} = \frac{\Delta x}{L} = \tan\theta \qquad (9.3)$$

જ્યાં θ શિરોલંબ (નળાકારની મૂળસ્થિતિ) સાથે નળાકારનું કોણીય સ્થાનાંતર છે. સામાન્ય રીતે θ ખૂબ જ સૂક્ષ્મ હોય છે, તેથી tan θ એ લગભગ θકોણ જેટલું હોય છે. (ઉદાહરણ તરીકે $\theta = 10°$ હોય, તો θ અને tan θમાં માત્ર 1 % જેટલો તફાવત હોય છે.)

આકૃતિ 9.2(c)માં દર્શાવ્યા મુજબ જ્યારે પુસ્તકને હાથ વડે દબાવી સમક્ષિતિજ ધકેલવામાં આવે ત્યારે પણ તે જોઈ શકાય છે.

$$\text{આમ, આકાર વિકૃતિ} = \tan\theta \approx \theta. \qquad (9.4)$$

આકૃતિ 9.2 (d)માં દર્શાવ્યા મુજબ ઘન પદાર્થને ઊંચું દબાણ ધરાવતાં કોઈ તરલમાં મૂકવામાં આવે ત્યારે પદાર્થ બધી બાજુઓથી નિયમિત રીતે દબાય છે. તરલ વડે પદાર્થની સપાટીના દરેક



આકૃતિ 9.2 *(a) તણાવ પ્રતિબળની અસર હેઠળ નળાકાર પદાર્થની લંબાઈનો વધારો ΔL (b) નળાકાર પર લાગતું આકાર પ્રતિબળ તેને θ કોણ જેટલું વિરૂપિત કરે છે. (c) આકાર પ્રતિબળની અસર હેઠળ રહેલો પદાર્થ (d) સપાટીને દરેક બિંદુએ લંબરૂપે લાગતાં પ્રતિબળની અસર હેઠળ રહેલો ઘન પદાર્થ (હાઈડ્રોલિક પ્રતિબળ). કદ-વિકૃતિ $\Delta V/V$, પરંતુ આકારમાં ફેરફાર થતો નથી.*

બિંદુએ લંબરૂપે બળ લાગે છે અને પદાર્થ હાઇડ્રોલિક (જલીય) સંકોચનની સ્થિતિમાં છે તેમ કહેવાય છે. પરિણામે ભૌમિતિક આકારમાં ફેરફાર સિવાય તેના કદમાં ઘટાડો થાય છે.

પદાર્થમાં આંતરિક પુનઃસ્થાપકબળ ઉદ્‌ભવે છે જે તરલ દ્વારા લાગતાં બળ જેટલું જ અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. (પદાર્થને તરલની બહાર કાઢતાં તે પોતાનો મૂળ આકાર અને પરિમાણ પાછાં મેળવે છે.) આ કિસ્સામાં એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ આંતરિક પુનઃસ્થાપકબળ **હાઇડ્રોલિક (જલીય) પ્રતિબળ** તરીકે ઓળખાય છે. તેનું માન હાઇડ્રોલિક દબાણ (એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતાં બળ) જેટલું હોય છે.

હાઇડ્રોલિક દબાણને કારણે ઉદ્‌ભવતી વિકૃતિને **કદ-વિકૃતિ** કહે છે અને તેને કદના ફેરફાર ΔV અને મૂળ કદ Vના ગુણોત્તર સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\text{કદ-વિકૃતિ} = \frac{\Delta V}{V} \qquad (9.5)$$

અહીં વિકૃતિ પરિમાણનો ફેરફાર અને મૂળ પરિમાણનો ગુણોત્તર હોવાથી તેને કોઈ એકમ કે પારિમાણિક સૂત્ર નથી.

9.4 હૂકનો નિયમ (HOOKE'S LAW)

આકૃતિ 9.2માં દર્શાવેલ જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓમાં પ્રતિબળ અને વિકૃતિ જુદા જુદા સ્વરૂપ ધારણ કરે છે. નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાનાં સપ્રમાણમાં હોય છે. આને હૂકનો નિયમ કહે છે. આ રીતે,

$$\text{પ્રતિબળ} \propto \text{વિકૃતિ}$$

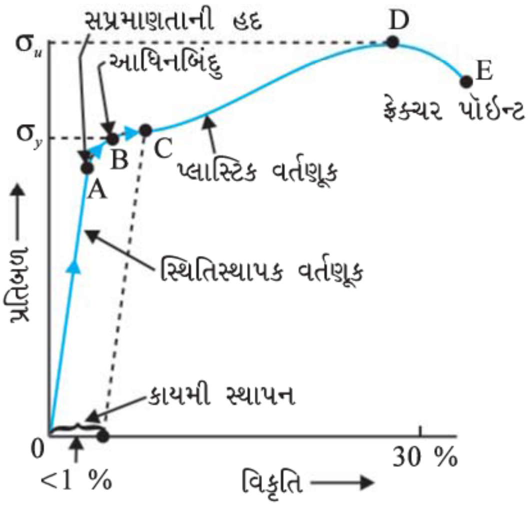
$$\text{પ્રતિબળ} = k \times \text{વિકૃતિ} \qquad (9.6)$$

જ્યાં k = સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે જેને સ્થિતિસ્થાપક અંક કહે છે.

હૂકનો નિયમ એક આનુભવિક નિયમ છે અને મોટા ભાગનાં દ્રવ્યોમાં તેનું પાલન થાય છે. જોકે કેટલાંક દ્રવ્યોમાં આ સપ્રમાણતાનો સંબંધ જળવાતો નથી.

9.5 પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર (STRESS-STRAIN CURVE)

તણાવ પ્રતિબળ અંતર્ગત આપેલ દ્રવ્ય માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ વચ્ચેનો સંબંધ પ્રાયોગિક રીતે મેળવી શકાય છે. તણાવ લાક્ષણિકતાઓના પ્રમાણભૂત પરીક્ષણમાં બળ લાગુ પાડીને પરીક્ષણ નળાકાર અથવા તારને ખેંચવામાં આવે છે. લંબાઈમાં થતો આંશિક ફેરફાર (વિકૃતિ) અને વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે લાગુ પાડેલ બળ નોંધવામાં આવે છે. લાગુ પાડેલ બળને ક્રમશઃ વધારવામાં આવે છે અને લંબાઈમાં થતાં ફેરફાર નોંધવામાં આવે છે. પ્રતિબળ (કે જે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગુ પાડેલ બળનાં માન જેટલું હોય છે) વિરુદ્ધ ઉદ્‌ભવેલ વિકૃતિનો આલેખ દોરવામાં આવે છે. આકૃતિ 9.3માં કોઈ એક ધાતુ માટે આવો લાક્ષણિક આલેખ દર્શાવેલ છે. દાબીય અને આકાર પ્રતિબળ માટે પણ આવા જ આલેખ મેળવી શકાય છે. જુદાં જુદાં દ્રવ્યો માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્રો જુદા જુદા હોય છે. આ વક્રો આપેલ દ્રવ્યમાં બોજના વધારા સાથે કેવું વિરૂપણ થશે તે સમજવામાં આપણને મદદ કરે છે. આલેખ પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, O થી A સુધીનો વક્ર સુરેખ છે. આ વિસ્તારમાં હૂકના નિયમનું પાલન થાય છે. જ્યારે વિરૂપક બળ દૂર કરવામાં આવે છે ત્યારે પદાર્થ પોતાનાં મૂળ પરિમાણો પુનઃપ્રાપ્ત કરે છે. આ વિસ્તારમાં ઘન પદાર્થ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ તરીકે વર્તે છે.



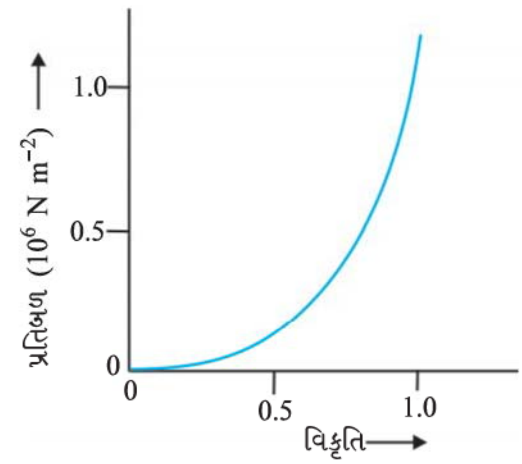
આકૃતિ 9.3 કોઈ એક ધાતુ માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર

A થી B સુધીના વિસ્તારમાં પ્રતિબળ અને વિકૃતિ સપ્રમાણમાં નથી. છતાં બોજ દૂર કરતાં, પદાર્થ પોતાનાં મૂળ પરિમાણમાં પાછો ફરે છે. વક્રમાં બિંદુ Bને **આધિનબિંદુ** અથવા **(સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ)** કહે છે અને તેને અનુરૂપ પ્રતિબળને દ્રવ્યની **આધિન પ્રબળતા (Yield Strength) (σ_y)** કહે છે.

જો બોજને વધારવામાં આવે તો ઉદ્‌ભવતું પ્રતિબળ આધિન પ્રબળતાથી વધી જાય છે અને ત્યારે પ્રતિબળના નાના ફેરફાર માટે વિકૃતિમાં ખૂબ જ ઝડપી વધારો થાય છે.

વક્રને B અને D વચ્ચેનો ભાગ આ બાબત દર્શાવે છે. B અને D વચ્ચે કોઈ એક બિંદુ ધારો કે C પાસે બોજ દૂર કરવામાં આવે તો પદાર્થ તેનાં મૂળ પરિમાણ પાછા મેળવતો નથી. આવી સ્થિતિમાં પ્રતિબળ શૂન્ય થવા છતાં વિકૃતિ શૂન્ય થતી નથી ત્યારે દ્રવ્યમાં **કાયમી સ્થાપન** થઈ ગયું છે એમ કહેવાય. આવા વિરૂપણને **પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ** કહેવાય છે. આલેખ પરનાં બિંદુ Dને દ્રવ્યની **અંતિમ તણાવ પ્રબળતા (ultimate tensile strength) (σ_u)** કહે છે. આ બિંદુથી આગળ લાગુ પાડેલ બળ ઘટાડવામાં આવે તોપણ વધારાની વિકૃતિ ઉદ્‌ભવે છે અને E બિંદુ પાસે પદાર્થ તૂટી જાય છે. જો અંતિમ પ્રબળતા બિંદુ D અને ફ્રેક્ચર પૉઇન્ટ E પાસપાસે હોય તો દ્રવ્યને **બટકણું** દ્રવ્ય કહે છે. જો તે બિંદુઓ વધુ દૂર હોય તો દ્રવ્યને **તન્ય** દ્રવ્ય કહે છે.

અગાઉ નોંધ્યું તેમ જુદાં જુદાં દ્રવ્યો માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વર્તણૂક જુદી જુદી હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે રબરને તેની મૂળ લંબાઈ કરતાં ઘણું વધુ ખેંચી શકાય છે, છતાં તે પોતાનાં મૂળ આકારમાં



આકૃતિ 9.4 હૃદયમાંથી રુધિરને લઈ જતી મહાધમની (Aorta)ની સ્થિતિસ્થાપક પેશી માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર

પાછું ફરે છે. આકૃતિ 9.4માં હૃદયમાં રહેલી મહાધમનીની સ્થિતિસ્થાપક પેશી માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર દર્શાવેલ છે. અહીં નોંધો કે સ્થિતિસ્થાપક-વિસ્તાર ખૂબ જ મોટો હોવા છતાં આ દ્રવ્ય તે વિસ્તારમાં હૂકના નિયમને અનુસરતું નથી અને બીજું કે તેમાં કોઈ સ્પષ્ટ પ્લાસ્ટિક વિસ્તાર પણ નથી. મહાધમનીની પેશી, રબર વગેરે જેવાં દ્રવ્યોને ખેંચીને બહુ મોટી વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરી શકાય છે. તેવાં દ્રવ્યોને **ઈલાસ્ટોમર** કહે છે.

9.6 સ્થિતિસ્થાપક અંકો (ELASTIC MODULI)

સ્ટ્રક્ચરલ અને મેન્યુફેક્ચરિંગ એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઇન માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્રમાં સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ પહેલાનો સપ્રમાણતાવાળો વિસ્તાર (આકૃતિ 9.3માં *OA* વિસ્તાર) ખૂબ જ મહત્ત્વનો છે. પ્રતિબળ અને વિકૃતિના ગુણોત્તરને **સ્થિતિસ્થાપક અંક** કહે છે તથા તે આપેલ દ્રવ્ય માટે લાક્ષણિક હોવાનું જણાય છે.

9.6.1 યંગ મૉડ્યુલસ (Young's Modulus)

પ્રાયોગિક અવલોકનો સૂચવે છે કે આપેલા દ્રવ્ય માટે તણાવ પ્રતિબળ હોય કે દાબીય પ્રતિબળ, ઉદ્‌ભવતી વિકૃતિનું માન સમાન હોય છે. તણાવ (અથવા દાબીય) પ્રતિબળ (σ) અને સંગત વિકૃતિ (ε)ના ગુણોત્તરને યંગ મૉડ્યુલસ કહે છે. તે સંકેત *Y* દ્વારા દર્શાવાય છે.

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{9.7}$$

સમીકરણ (9.1) અને (9.2) પરથી,

$$Y = (F/A) \ / \ (\Delta L/L)$$

$$= (F \times L) \ / \ (A \times \Delta L) \tag{9.8}$$

અહીં વિકૃતિ પરિમાણરહિત રાશિ હોવાથી યંગ મૉડ્યુલસનો એકમ પ્રતિબળના એકમ જેવો જ એટલે કે N m^{-2} અથવા પાસ્કલ (Pa) છે. કોષ્ટક 9.1માં કેટલાંક દ્રવ્યોનાં યંગ મૉડ્યુલસ અને આધિન પ્રબળતાનાં મૂલ્યો આપેલ છે.

કોષ્ટક 9.1માં આપેલ માહિતી પરથી જોઈ શકાય છે કે, ધાતુઓ માટે યંગ મૉડ્યુલસ વધારે છે માટે આવાં દ્રવ્યોની લંબાઈમાં નાનો ફેરફાર કરવા માટે મોટા બળની જરૂર પડે છે. 0.1 cm^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં સ્ટીલના પાતળા તારની લંબાઈમાં 0.1 ટકાનો વધારો કરવા માટે 2000 N બળની જરૂર પડે છે. આટલા જ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં ઍલ્યુમિનિયમ, પિત્તળ અને તાંબાના તારમાં આટલી જ વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરવા માટે જરૂરી બળ અનુક્રમે 690 N, 900 N અને 1100 N હોય છે. એનો અર્થ એવો થાય કે, ઍલ્યુમિનિયમ, પિત્તળ અને તાંબા કરતાં સ્ટીલ વધુ સ્થિતિસ્થાપક છે. આ કારણોસર હેવી ડ્યુટિ મશીન અને સ્ટ્રક્ચરલ (સંરચનાત્મક) ડિઝાઇનમાં સ્ટીલને પસંદ કરવામાં આવે છે. લાકડું, હાડકું, કૉંક્રિટ અને કાચ માટે યંગ મૉડ્યુલસ ઓછા હોય છે.

કોષ્ટક 9.1 કેટલાંક દ્રવ્યોના યંગ મૉડ્યુલસ અને આધિન-પ્રબળતા

દ્રવ્ય	ઘનતા δ Kg m^{-3}	મૉડ્યુલસ $Y(10^9$ N $m^{-2})$	અંતિમ (મહત્તમ) પ્રબળતા $\sigma_u(10^6$ N $m^{-2})$	આધિન-પ્રબળતા $\sigma_y(10^6$ N $m^{-2})$
ઍલ્યુમિનિયમ	2710	70	110	95
કૉપર(તાંબું)	8890	110	400	200
આયર્ન(ઘડતર)	7800-7900	190	330	170
સ્ટીલ	7860	200	400	250
કાચ#	2190	65	50	-
કૉન્ક્રીટ	2320	30	40	-
લાકડું#	525	13	50	-
હાડકું#	1900	9.4	170	-
પોલીસ્ટીરીન	1050	3	48	-

નોંધ : # આ દ્રવ્યોનું પરીક્ષણ દબાણ હેઠળ થયેલ છે.

ઉદાહરણ 9.1 એક સ્ટ્રક્ચરલ સ્ટીલના સળિયાની ત્રિજ્યા 10 mm અને લંબાઈ 1.0 m છે. તેની લંબાઈની દિશામાં 100 kN બળ દ્વારા તેને ખેંચવામાં આવે છે. સળિયામાં (a) પ્રતિબળ (b) લંબાઈનો વધારો (elongation) અને (c) વિકૃતિની ગણતરી કરો. સ્ટ્રક્ચરલ સ્ટીલ માટે યંગ મૉડ્યુલસ 2.0×10^{11} N m^{-2} છે.

ઉકેલ

આપણે ધારી લઈએ કે સળિયો એક છેડેથી જકડીને રાખેલ છે અને બીજા છેડે સળિયાની લંબાઈની દિશામાં F જેટલું બળ લાગુ પાડેલ છે.

સળિયા પરનું પ્રતિબળ,

$$\text{પ્રતિબળ} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$= \frac{100 \times 10^3 \text{ N}}{3.14 \times (10^{-2} \text{ m})^2}$$

$$= 3.18 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$$

લંબાઈનો વધારો,

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{Y}$$

$$= \frac{(3.18 \times 10^8 \text{ N m})^{-2}\ (1 \text{ m})}{2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}}$$

$$= 1.59 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 1.59 \text{ mm}$$

$$\text{વિકૃતિ} = \Delta L/L$$

$$= (1.59 \times 10^{-3} \text{ m}) / (1 \text{ m})$$

$$= 1.59 \times 10^{-3}$$

$$= 0.16\ \%$$

ઉદાહરણ 9.2 3.0 mm જેટલો સમાન વ્યાસ ધરાવતાં, છેડાથી છેડા સાથે જોડાયેલા તાંબા અને સ્ટીલના તારની લંબાઈ અનુક્રમે 2.2 m અને 1.6 m છે. જ્યારે તેમને બોજ (Load) વડે ખેંચવામાં આવે છે ત્યારે તેમની લંબાઈમાં થતો કુલ વધારો 0.70 mm મળે છે. લાગુ પાડેલ બોજ મેળવો.

ઉકેલ તાંબા અને સ્ટીલના તારો સમાન તણાવ પ્રતિબળ હેઠળ છે. કારણ કે તેમને લાગુ પાડેલ તણાવ (સમાન બોજ) સમાન છે અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A સમાન છે. સમીકરણ (9.7) મુજબ,

પ્રતિબળ = યંગ મૉડ્યુલસ × વિકૃતિ, આથી

$$W/A = Y_c \times (\Delta L_c / L_c) = Y_s \times (\Delta L_s / L_s)$$

જ્યાં c અને s અનુક્રમે તાંબા અને સ્ટેનલેસ સ્ટીલ માટેના સંકેત છે.

$$(\Delta L_c/\Delta L_s) = (Y_s / Y_c) \times (L_c / L_s)$$

$L_c = 2.2$ m અને $L_s = 1.6$ m આપેલ છે.

કોષ્ટક 9.1 પરથી $Y_c = 1.1 \times 10^{11}$ N m^{-2} અને

$Y_s = 2.0 \times 10^{11}$ N m^{-2}

$$\Delta L_c/\Delta L_s = (2.0 \times 10^{11}/1.1 \times 10^{11}) \times (2.2 / 1.6) = 2.5$$

લંબાઈમાં થતો કુલ વધારો $\Delta L_c + \Delta L_s = 7.0 \times 10^{-4}$ m

ઉપરનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવતાં,

$\Delta L_c = 5.0 \times 10^{-4}$ m અને $\Delta L_s = 2.0 \times 10^{-4}$ m

તેથી,

$$W = (A \times Y_c \times \Delta L_c)/L_c$$

$$= \pi(1.5 \times 10^{-3})^2 \times [(5.0 \times 10^{-4} \times 1.1 \times 10^{11})/2.2]$$

$$= 1.8 \times 10^2 \text{ N}$$

ઉદાહરણ 9.3 સર્કસમાં માનવ પિરામિડમાં સંતુલિત ગ્રૂપનો તમામ બોજ એક વ્યક્તિ કે જે પોતાની પીઠના સહારે સૂઈ ગયો હોય છે તેના પગ પર ટેકવાય છે (આકૃતિ 9.5માં દર્શાવ્યા મુજબ). પિરામિડની રચના કરતાં તમામ કલાકારો, પાટિયા અને ટેબલનું કુલ દળ 280 kg છે. તળિયે પોતાની પીઠ પર સૂઈ રહેલ વ્યક્તિનું દળ 60 kg છે. આ વ્યક્તિના દરેક સાથળનાં હાડકાંની લંબાઈ 50 cm અને અસરકારક ત્રિજ્યા 2.0 cm છે. વધારાના બોજને કારણે સાથળના દરેક હાડકાનું સંકોચન શોધો.

આકૃતિ 9.5 સર્કસમાં માનવ પિરામિડ

ઉકેલ તમામ કલાકારો, પાટિયા અને ટેબલ વગેરેનું કુલ દળ

= 280 kg

પિરામિડના તળિયે રહેલા કલાકારનું દળ = 60 kg

પિરામિડના તળિયે રહેલા કલાકારે પગ પર ટેકવેલ દળ

= 280 − 60 = 220 kg

આ ટેકવેલ દળનું વજન = 220 kg wt. = 220 × 9.8 N

= 2156 N

કલાકારના સાથળના દરેક હાડકા પર ટેકવેલ

બોજ = 1/2 (2156) N = 1078 N

કોષ્ટક 9.1 પરથી હાડકા માટે યંગ મૉડ્યુલસ,

$Y = 9.4 \times 10^9\ N\ m^{-2}$

સાથળના દરેક હાડકાની લંબાઈ $L = 0.5$ m

સાથળના હાડકાની ત્રિજ્યા = 2.0 cm

તેથી સાથળના હાડકાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$A = \pi \times (2 \times 10^{-2})^2\ m^2 = 1.26 \times 10^{-3}\ m^2$

સમીકરણ 9.8નો ઉપયોગ કરીને સાથળના દરેક હાડકાનું સંકોચન ΔL નીચે મુજબ ગણી શકાય :

$\Delta L = [(F \times L) / (Y \times A)]$

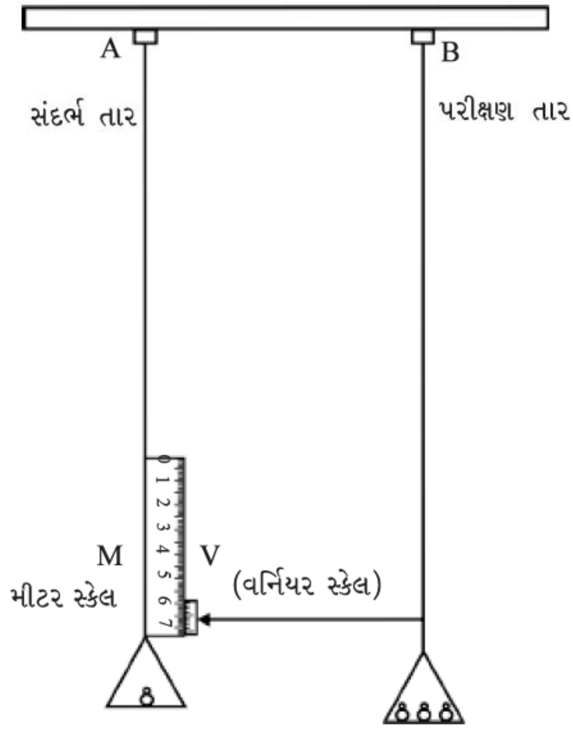
$= [(1078 \times 0.5) / (9.4 \times 10^9 \times 1.26 \times 10^{-3})]$

$= 4.55 \times 10^{-5}$ m અથવા 4.55×10^{-3} cm

જે ખૂબ જ સૂક્ષ્મ ફેરફાર છે ! સાથળનાં હાડકામાં આંશિક ઘટાડો $\Delta L/L = 0.000091$ અથવા 0.0091 % ◀

9.6.2 તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ નક્કી કરવો (Determination of Young's Modulus of the Material of a Wire)

તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ નક્કી કરવા માટેની વિશિષ્ટ પ્રાયોગિક ગોઠવણી આકૃતિ 9.6માં દર્શાવેલ છે. તેમાં સ્થિર દૃઢ આધાર પરથી સમાન લંબાઈ અને સમાન ત્રિજ્યાવાળા બે સુરેખ તારને પાસપાસે લટકાવેલ છે. તાર A (સંદર્ભ તાર) મિલિમીટર માપક્રમનો મુખ્ય સ્કેલ M અને વજન મુકવા માટે પલ્લું (Pan) ધરાવે છે. નિયમિત આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતો તાર B (પરીક્ષણ તાર) પણ પલ્લું ધરાવે છે જેમાં જાણીતા વજનિયાં મૂકી શકાય છે પરીક્ષણ તાર Bના છેડે દર્શક સાથે વનિર્યર માપક્રમ જોડેલ છે અને સંદર્ભ તાર A સાથે મુખ્ય માપક્રમ M જડિત કરેલ છે. પલ્લામાં મૂકેલાં વજનિયાં અધોદિશામાં બળ લગાડે છે અને પરીક્ષણ તાર તણાવ પ્રતિબળની અસર હેઠળ ખેંચાય છે. વર્નિયરની ગોઠવણ દ્વારા પરીક્ષણ તારની લંબાઈમાં થતો વધારો (elongation) માપવામાં આવે છે. ઓરડાનાં તાપમાનમાં થતા ફેરફારને કારણે થતો લંબાઈનો ફેરફાર ભરપાઈ (Compensate) કરવા માટે સંદર્ભ તારનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ કારણે પરીક્ષણ તારની લંબાઈમાં તાપમાનને કારણે થતો ફેરફાર સંદર્ભ તારના ફેરફાર જેટલો જ હોય છે. (તાપમાનની આવી અસરોનો અભ્યાસ આપણે પ્રકરણ 11માં વિગતવાર કરીશું.)



આકૃતિ 9.6 તારના દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ નક્કી કરવા માટેની પ્રાયોગિક ગોઠવણી

પરીક્ષણ તાર અને સંદર્ભ તારને સીધા રાખવા માટે બંને તારને પ્રારંભમાં નાના બોજ હેઠળ રાખીને વર્નિયર અવલોકન નોંધવામાં આવે છે. હવે પરીક્ષણ તારને તણાવ પ્રતિબળની અસર હેઠળ લાવવા માટે તેના બોજમાં ક્રમશઃ વધારો કરવામાં આવે છે અને વર્નિયરનું અવલોકન ફરી નોંધવામાં આવે છે. બે વર્નિયર અવલોકનો વચ્ચેનો તફાવત તારની લંબાઈમાં ઉદ્ભવેલ વધારો આપે છે. ધારો કે, પરીક્ષણ તારની પ્રારંભિક ત્રિજ્યા અને લંબાઈ અનુક્રમે r અને L છે તો તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ πr^2 થશે. ધારો કે M દળને કારણે તારની લંબાઈમાં ΔL જેટલો વધારો થાય છે. લાગુ પાડેલ બળ Mg જેટલું થશે. જ્યાં g ગુરુત્વપ્રવેગ છે. સમીકરણ (9.8) પરથી તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ,

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Mg}{\pi r^2} \cdot \frac{L}{\Delta L}$$

$$= Mg \times L/(\pi r^2 \times \Delta L) \qquad (9.9)$$

પરથી મળે છે.

9.6.3 આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક (Shear Modulus)

આકાર પ્રતિબળ અને તેને અનુરૂપ આકાર વિકૃતિના ગુણોત્તરને દ્રવ્યનો આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક કહે છે અને તેને G દ્વારા દર્શાવાય છે. તેને દૃઢતા ગુણાંક (Modulus of rigidity) પણ કહે છે.

G = આકાર પ્રતિબળ (σ_s) / આકાર વિકૃતિ (θ)

$= (F/A)/(\Delta x/L)$

$= FL/A\Delta x \qquad (9.10)$

આ રીતે સમીકરણ (9.4) પરથી,

$G = (F/A) / \theta$

$= (F/(A \times \theta)$ (9.11)

આકાર પ્રતિબળ σ_sને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય છે :

$\sigma_s = G \times \theta$ (9.12)

આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંકનો SI એકમ N m^{-2} અથવા પાસ્કલ (Pa) છે. કોષ્ટક 9.2માં કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક આપેલા છે. અહીં જોઈ શકાય કે આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક (દૃઢતા ગુણાંક) સામાન્યતઃ યંગ મૉડ્યુલસથી ઓછા હોય છે (કોષ્ટક 9.1 પરથી). મોટા ભાગનાં દ્રવ્યો માટે, $G \approx Y/3$

કોષ્ટક 9.2 કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક (G)

દ્રવ્ય	G(10^9 Nm^{-2} અથવા GPa)
ઍલ્યુમિનિયમ	25
બ્રાસ(પિત્તળ)	36
તાંબું	42
કાચ	23
લોખંડ	70
સીસુ	5.6
નિકલ	77
સ્ટીલ	84
ટંગસ્ટન	150
લાકડું	10

▶ *ઉદાહરણ 9.4* 50 cm બાજુની લંબાઈ ધરાવતાં સીસાનાં એક ચોરસ ચોસલાની જાડાઈ 10 cm છે. તેની પાતળી બાજુ પર 9.0×10^4 N જેટલું સ્પર્શીય બળ લાગુ પાડેલ છે. જો ચોસલાની નીચેની બાજુ ભોંયતળિયા સાથે જડિત કરેલી (riveted) હોય, તો તેની ઉપર તરફની બાજુ કેટલી સ્થાનાંતરિત થશે ?

ઉકેલ આકૃતિ 9.7માં દર્શાવ્યા મુજબ સીસાનું ચોસલું જડિત કરેલ છે અને પાતળી બાજુને સમાંતર બળ લાગુ પાડવામાં આવેલ છે. જે બાજુને સમાંતરે બળ લગાડવામાં આવ્યું છે તેનું ક્ષેત્રફળ

$A = 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

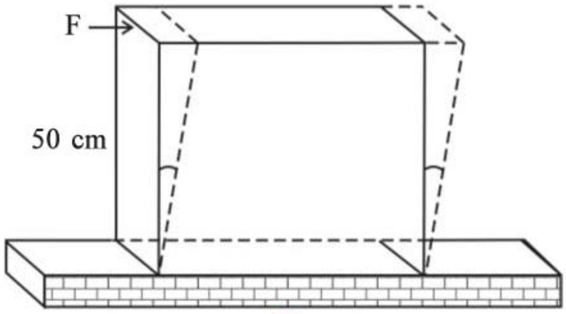
$= 0.5 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$

$= 0.05 \text{ m}^2$

માટે, લાગુ પાડેલ પ્રતિબળ,

$= (9.0 \times 10^4 \text{ N} / 0.05 \text{ m}^2)$

$= (1.8 \times 10^6 \text{ N m}^{-2})$



આકૃતિ 9.7

આપણે જાણીએ છીએ કે,

આકાર વિકૃતિ = $(\Delta x/L)$ = (પ્રતિબળ) / G. આથી, સ્થાનાંતર Δx = (પ્રતિબળ $\times L$) / G.

$= (1.8 \times 10^6 \text{ N m}^{-2} \times 0.5 \text{ m}) / (5.6 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})$

$= 1.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.16 \text{ mm}$ ◀

9.6.4 કદસ્થિતિસ્થાપક અંક (Bulk Modulus)

પરિચ્છેદ (9.3)માં આપણે જોયું તેમ જ્યારે પદાર્થને પ્રવાહીમાં ડુબાડવામાં આવે ત્યારે તે હાઇડ્રોલિક પ્રતિબળ (દબાણના માન જેટલું જ)ની અસર હેઠળ આવે છે. જેથી પદાર્થના કદમાં ઘટાડો થાય છે. આથી ઉદ્ભવતી વિકૃતિને કદ વિકૃતિ કહે છે [સમીકરણ (9.5)]. હાઇડ્રોલિક પ્રતિબળ અને તેને અનુરૂપ કદ વિકૃતિના ગુણોત્તરને કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક (Bulk modulus) કહે છે જેને B વડે દર્શાવાય છે.

$B = -p/(\Delta V/V)$ (9.13)

ઋણ નિશાની સૂચવે છે કે દબાણમાં વધારો થાય તેમ કદમાં ઘટાડો ઉદ્ભવે છે. આમ p ધન હોય તો ΔV ઋણ થશે. આમ, સંતુલનમાં રહેલા તંત્ર માટે બલ્ક મૉડ્યુલસ હંમેશાં ધન હોય છે. બલ્ક મૉડ્યુલસનો એકમ દબાણનો જ એકમ છે. એટલે કે N m^{-2} અથવા Pa. કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના બલ્ક મૉડ્યુલસ કોષ્ટક 9.3માં આપેલ છે.

કોષ્ટક 9.3 કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યોના બલ્ક મૉડ્યુલસ (B)

દ્રવ્ય (ઘન)	B(10^9 N m^{-2} અથવા GPa)
ઍલ્યુમિનિયમ	72
પિત્તળ	61
તાંબું	140
કાચ	37
લોખંડ	100
નિકલ	260
સ્ટીલ	160
પ્રવાહી	
પાણી	2.2
ઈથેનોલ	0.9
કાર્બન ડાઇસલ્ફાઇડ	1.56
ગ્લિસરિન	4.76
પારો	25
વાયુઓ	
હવા (S T P એ)	1.0×10^{-4}

બલ્ક મૉડ્યુલસના વ્યસ્તને દબનીયતા કહે છે. તેને k વડે દર્શાવાય છે. દબાણમાં એક એકમના વધારા દીઠ કદમાં થતા આંશિક ફેરફાર દ્વારા તેને વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

$$k = (1/B) = -(1/p) \times (\Delta V/V) \qquad (9.14)$$

કોષ્ટક 9.3માં આપેલ માહિતી પરથી જોઈ શકાય છે કે ઘન પદાર્થ માટે બલ્ક મૉડ્યુલસ પ્રવાહીના બલ્ક મૉડ્યુલ્સ કરતાં ઘણા મોટા છે અને પ્રવાહીના બલ્ક મૉડ્યુલસ વાયુઓ (હવા)ના બલ્ક મૉડ્યુલ્સ કરતાં ઘણા મોટા હોય છે. આમ ઘન સૌથી ઓછા દબનીય હોય છે. જ્યારે વાયુઓ સૌથી વધુ દબનીય હોય છે. ઘનની સાપેક્ષે વાયુઓ દસ લાખ ગણા વધુ દબનીય હોય છે. વાયુઓની દબનીયતા વધુ હોય છે જે તાપમાન અને દબાણ સાથે બદલાય છે. ઘનની અદબનીયતા મુખ્યત્વે પડોશી પરમાણુઓ સાથેના દૃઢ યુગ્મનને કારણે હોય છે. પ્રવાહીના અણુઓ પણ પોતાના પડોશી અણુઓ સાથે બંધનમાં હોય છે. પરંતુ તે એટલું પ્રબળ નથી હોતું જેટલું ઘનમાં હોય છે. વાયુના અણુઓ તેના પડોશી અણુઓ સાથે નિર્બળ યુગ્મન ધરાવે છે.

કોષ્ટક 9.4માં જુદા જુદા પ્રકારના પ્રતિબળ, વિકૃતિ સ્થિતિસ્થાપક અંક અને લાગુ પડતી દ્રવ્યની અવસ્થા દર્શાવેલ છે.

▶ **ઉદાહરણ 9.5** હિન્દ મહાસાગરની સરેરાશ ઊંડાઈ 3000 m છે. મહાસાગરના તળિયે પાણી માટે આંશિક સંકોચન $\Delta V/V$ની ગણતરી કરો. પાણી માટે બલ્ક મોડ્યુલસ 2.2×10^9 N m^{-2}. ($g = 10$ m s^{-2} લો.)

ઉકેલ તળિયાના સ્તર પર 3000 m ઊંચાઈવાળા પાણીના સ્તંભ વડે ઉદ્ભવતું દબાણ,

$$P = h\rho g = 3000 \text{ m} \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

આંશિક સંકોચન $\Delta V/V$ =

પ્રતિબળ/B = $(3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}) / (2.2 \times 10^9 \text{ N m}^2)$

$= 1.36 \times 10^{-2}$ અથવા 1.36 % ◀

9.6.5 પોઈસન ગુણોત્તર (Poisson's Ratio)

યંગ મૉડ્યુલસના પ્રયોગમાં (પરિચ્છેદ 9.6.2માં સમજાવ્યા મુજબ) કાળજીપૂર્વકનાં અવલોકનો દર્શાવે છે કે તારના આડછેદની ત્રિજ્યામાં (અથવા વ્યાસમાં) થોડોક ઘટાડો થાય છે. લાગુ પાડેલ બળને લંબ વિકૃતિને **પાર્શ્વિક વિકૃતિ** (Lateral strain) કહે છે. સાઈમન પોઇસને શોધી કાઢ્યું કે, સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ સુધીમાં પાર્શ્વિક વિકૃતિ સંગત વિકૃતિને સમપ્રમાણમાં હોય છે. પાર્શ્વિક વિકૃતિ અને સંગત વિકૃતિના ગુણોત્તરને **પોઇસન ગુણોત્તર** (Poission's Ratio) કહે છે. જો તારનો મૂળ વ્યાસ d અને પ્રતિબળને લીધે વ્યાસમાં થતો ઘટાડો Δd હોય, તો પાર્શ્વિક વિકૃતિ $\Delta d/d$ થશે. જો તારની મૂળ લંબાઈ L હોય તથા પ્રતિબળને લીધે લંબાઈનો વધારો ΔL હોય તો સંગત

કોષ્ટક 9.4 પ્રતિબળ, વિકૃતિ તથા જુદા જુદા સ્થિતિસ્થાપક અંક

પ્રતિબળનો પ્રકાર	પ્રતિબળ	વિકૃતિ	થતો ફેરફાર		સ્થિતિસ્થાપક અંક	સ્થિતિસ્થાપક અંકનું નામ	દ્રવ્યની સ્થિતિ
			આકાર	કદ			
તણાવ અથવા દાબીય ($\sigma = F/A$)	સામસામા પૃષ્ઠોને લંબ સમાન મૂલ્યના પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બે બળો	બળને સમાંતર દિશામાં લંબાઈમાં વધારો કે સંકોચન ($\Delta L/L$) (સંગતવિકૃતિ)	હા	ના	$Y = \frac{(F \times L)}{(A \times \Delta L)}$	યંગ મૉડ્યુલસ	ઘન
આકાર ($\sigma_s = F/A$)	સામસામી બે સપાટી પર સપાટીને સમાંતર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતાં સમાન મૂલ્યનાં બે બળો (દરેક કિસ્સામાં પદાર્થ પર લાગતું પરિણામી બળ અને પરિણામી ટૉર્ક શૂન્ય થાય.)	આકાર, θ (શુદ્ધ આકાર)	હા	ના	$G = \frac{F}{A \times \theta}$	આકાર મૉડ્યુલસ	ઘન
હાઇડ્રોલિક	સમગ્ર સપાટીના દરેક બિંદુએ લંબરૂપે બળ લાગે છે. એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ (દબાણ) દરેક બિંદુએ સમાન હોય છે.	કદમાં ફેરફાર થાય છે. (સંકોચન અથવા વિસ્તરણ ($\Delta V/V$)	ના	હા	$B = \frac{-P}{\Delta V/V}$	બલ્ક મોડ્યુલસ	ઘન પ્રવાહી અને વાયુ

વિકૃતિ $\Delta L/L$. તેથી પોઇસન ગુણોત્તર $(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ અથવા $(\Delta d/\Delta L) \times (L/d)$. પોઇસન ગુણોત્તર બે વિકૃતિઓનો ગુણોત્તર છે તે અંક છે અને તેને પરિમાણ કે એકમ નથી. તેનું મૂલ્ય દ્રવ્યના પ્રકાર પર આધારિત છે. સ્ટીલ માટે તેનું મૂલ્ય 0.28થી 0.30ની વચ્ચે છે. ઍલ્યુમિનિયમની મિશ્ર ધાતુઓ માટે તે લગભગ 0.33 છે.

9.6.6 ખેંચાણમાં રહેલા તારમાં સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિઊર્જા (Elastic Potential Energy in a Stretched Wire)

જ્યારે એક તારને તણાવ પ્રતિબળ હેઠળ રાખેલ હોય ત્યારે આંતરપરમાણ્વીય બળો વિરુદ્ધ કાર્ય થતું હોય છે. આ કાર્ય તારમાં સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિઊર્જા રૂપે સંગ્રહ પામે છે. L જેટલી મૂળ લંબાઈ અને A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતો તાર જ્યારે લંબાઈની દિશામાં વિરૂપક બળની અસર હેઠળ હોય ત્યારે ધારો કે લંબાઈમાં થતો વધારો l છે. તો સમીકરણ (9.8) પરથી, $F = YA \times (l/L)$ અહીં Y તારનાં દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ છે.

હવે લંબાઈમાં અતિસૂક્ષ્મ dl જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય dW, $F \times dl$ અથવા $YAl\,dl/L$ જેટલું થશે. માટે તારની લંબાઈ L થી $L + l$ જેટલી કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય W છે, જે $l = 0$ થી $l = l$ માટે થતું કાર્ય છે.

$$W = \int_0^l \frac{YAl}{L}\, dl = \frac{YA}{2} \frac{l^2}{L}$$

$$W = \frac{1}{2} \times Y \times \left(\frac{l}{L}\right)^2 \times AL$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{યંગ મોડ્યુલસ} \times (\text{વિકૃતિ})^2 \times \text{તારનું કદ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{પ્રતિબળ} \times \text{વિકૃતિ} \times \text{તારનું કદ}$$

આમ, તારમાં સંગ્રહીત થતું કાર્ય સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ ઊર્જા (U) છે. માટે એકમ કદ દીઠ સંગ્રહિત સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિઊર્જા (u)

$$u = \frac{1}{2}\, \sigma\varepsilon \qquad (9.15)$$

પરથી મળે છે.

9.7 દ્રવ્યોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકનો ઉપયોગ (APPLICATIONS OF ELASTIC BEHAVIOUR OF MATERIALS)

રોજિંદા જીવનમાં દ્રવ્યોની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક અગત્યનો ભાગ ભજવે છે. બધી જ એન્જિનિયરિંગ ડિઝાઇન માટે દ્રવ્યની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકનું સચોટ જ્ઞાન જરૂરી છે. ઉદાહરણ તરીકે મકાનની ડિઝાઇન બનાવતી વખતે સ્તંભ, પાટડા અને આધારની સ્ટ્રક્ચરલ ડિઝાઇન માટે વપરાતાં દ્રવ્યોની મજબૂતાઈનું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. શું તમે કદી વિચાર્યું છે કે પુલની રચનામાં આધાર તરીકે ઉપયોગમાં લેવાતા સ્તંભો શા માટે I આકારના હોય છે ? શા માટે, માટીનો ઢગલો કે ટેકરી પિરામિડ આકારની હોય છે ? આ પ્રશ્નોના જવાબ અહીં તૈયાર કરેલ ખ્યાલો પર આધારિત સ્ટ્રક્ચરલ એન્જિનિયરિંગનાં અભ્યાસ પરથી મેળવી શકાય છે.

ભારે બોજને ઉપાડવા અને એક સ્થળેથી બીજા સ્થળે લઈ જવા માટે વપરાતી ક્રેનમાં જાડું ધાતુનું દોરડું ભારે બોજ સાથે જોડેલું હોય છે. ગરગડી અને મોટરનો ઉપયોગ કરીને દોરડાને ઉપર ખેંચવામાં આવે છે. ધારો કે આપણે એક ક્રેન બનાવવા માંગીએ છીએ જેની બોજ ઊંચકવાની ક્ષમતા 10 ટન (1 મેટ્રિક ટન = 1000 kg) હોય, તો દોરડાની જાડાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? સ્પષ્ટ છે કે આપણે ઇચ્છીએ કે દોરડું બોજને કારણે કાયમી વિરૂપણ ન પામે, આ માટે વિરૂપણ સ્થિતિસ્થાપક હદથી વધુ ન હોવું જોઈએ. કોષ્ટક 9.1 પરથી નરમ સ્ટીલની આધિન પ્રબળતા (σ_y) લગભગ $300 \times 10^6\ N\ m^{-2}$ છે. આમ દોરડાના આડછેદનું ઓછામાં ઓછું ક્ષેત્રફળ (A),

$$A \geq W/\sigma_y = Mg/\sigma_y \qquad (9.16)$$

$$= (10^4\ kg \times 10\ m\ s^{-2})/(300 \times 10^6\ N\ m^{-2})$$

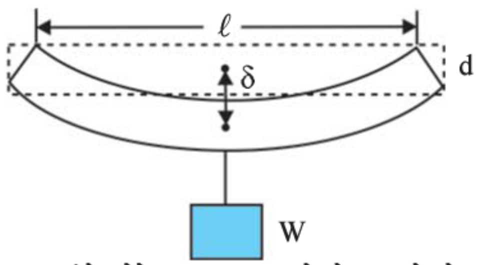
$$= 3.3 \times 10^{-4}\ m^2)$$

આ સંદર્ભે દોરડાના વર્તુળાકાર આડછેદની ત્રિજ્યા લગભગ 1 cm જેટલી થાય. સામાન્ય રીતે સુરક્ષાના હેતુથી એક મોટું માર્જિન (બોજના 10 ગણા જેવું) રાખવામાં આવે છે. આ રીતે લગભગ 3 cm ત્રિજ્યાવાળું જાડું દોરડું વાપરવાનું સૂચવવામાં આવે છે. આટલી ત્રિજ્યાનો એક તાર વ્યાવહારિક રીતે દઢ સળિયો કહેવાય. દોરડું લચકદાર, મજબૂત અને ઉત્પાદનમાં સરળતા રહે તે માટે હંમેશાં ઘણા બધા પાતળા તારને વેણીની માફક એકબીજા સાથે ગૂંથીને બનાવવામાં આવે છે.

કોઈ પણ પુલની ડિઝાઇન એવી રીતે તૈયાર કરવામાં આવે છે કે જેથી તે વાહનવ્યવહારનો ભાર, પવનને લીધે લાગતું બળ અને પોતાના વજનને સહન કરી શકે. આ જ રીતે બિલ્ડિંગની ડિઝાઇનમાં સ્તંભો અને પાટડાનો ઉપયોગ જાણીતો છે. બંને કિસ્સાઓમાં બોજ હેઠળ પાટડાનાં વંકનની સમસ્યાનું નિરાકરણ કરવું મહત્ત્વપૂર્ણ છે. પાટડો વધુ પડતો વળવો કે ટૂટવો ન જોઈએ. આકૃતિ 9.8માં દર્શાવ્યા મુજબ આપણે એક પાટડાનો વિચાર કરીએ કે જે બંને છેડેથી એક આધાર પર ટેકવેલ છે અને વચ્ચેથી બોજ લટકાવેલ છે. લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંડાઈ d વાળા સળિયા (bar)નાં કેન્દ્ર પર W બોજ લટકાવતાં તેમાં ઉદ્ભવતાં વંકનની માત્રા

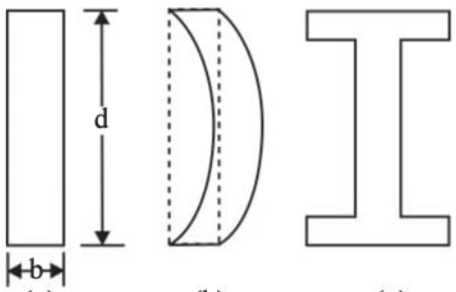
$$\delta = Wl^3/\ (4\ bd^3 Y) \qquad (9.17)$$

પરથી મળે છે.



આકૃતિ 9.8 બંને છેડે આધાર પર ટેકવેલ અને કેન્દ્ર પર ભારિત પાટડો (Beam)

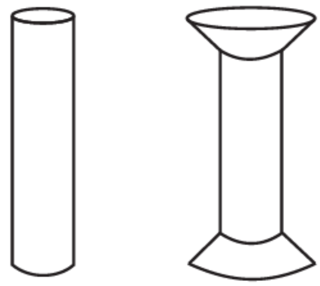
કેટલીક ગણતરીઓ અને તમે જે અભ્યાસ કરી ચૂક્યા તેનો ઉપયોગ કરીને આ સંબંધ સાબિત કરી શકાય છે. સમીકરણ (9.16) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, આપેલ બોજ માટે વંકન ઘટાડવા માટે એવા દ્રવ્યનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ જેનો યંગ મૉડ્યુલસ મોટો હોય. આપેલ દ્રવ્ય માટે વંકન ઘટાડવા માટે પહોળાઈ b વધારવાને બદલે જાડાઈ d વધારવી વધુ અસરકારક રહે છે. કારણ કે δ, d^{-3}ને સપ્રમાણ અને b^{-1}ને સપ્રમાણ છે. (જોકે બે ટેકા વચ્ચેનું અંતર l ઓછું જ હોવું જોઈએ.) જો બોજ ચોક્કસ સ્થાને ન હોય ત્યારે, (પુલ પર ગતિશીલ વાહનવ્યવહારમાં આવી ગોઠવણી કરવી કઠિન છે.) પરંતુ જો જાડાઈ dમાં વધારો કરતાં આકૃતિ 9.9 (b) મુજબ સળિયા (bar)માં વિરૂપણ ઉદ્ભવે છે. જેને બકલિંગ કહે છે. જેનાં સામાન્ય નિવારણ માટે સળિયાના આડછેદનો આકાર આકૃતિ 9.9 (c) જેવો રાખવામાં આવે છે. આવો આડછેદ મોટા ભારવહન માટેની સપાટી પૂરી પાડે છે અને વંકન રોકવા માટે પૂરતી ઊંડાઈ આપે છે. આવો આકાર પાટડાની પ્રબળતાનો ભોગ આપ્યા વગર પાટડાનું વજન ઘટાડે છે અને તેની કિંમત પણ ઘટી જાય છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 9.9 પાટડા (Beam)ના આડછેદના જુદા જુદા આકાર (a) એક સળિયા (bar)નો લંબચોરસ આડછેદ (b) એક પાતળો સળિયો અને તે કેવી રીતે વંકન થાય છે. (c) ભારવહન કરતા સળિયા (bar) માટે સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવાતો આડછેદ.

બિલ્ડિંગ અને પુલમાં થાંભલા અથવા સ્તંભોનો ઉપયોગ ખૂબ જ પ્રચલિત છે. આકૃતિ 9.10 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગોળ છેડાવાળા થાંભલા, 9.10(b)માં દર્શાવેલ વધુ ફેલાવો ધરાવતાં છેડાવાળા થાંભલાની સરખામણીએ ઓછા બોજને વહન કરે છે. કોઈ પણ બિલ્ડિંગ કે પુલની સચોટ ડિઝાઈન કરતી વખતે તે બાબતોનું ધ્યાન રાખવું પડે કે તે કઈ પરિસ્થિતિઓમાં કામ કરશે; તેની કિંમત કેટલી થશે અને સંભવિત દ્રવ્યોની દીર્ઘકાલીન વિશ્વસનીયતા વગેરે શું હશે ?



(a) (b)

આકૃતિ 9.10 સ્તંભ અથવા થાંભલા (a) ગોળાકાર છેડા ધરાવતો થાંભલો (b) ફેલાવો ધરાવતા છેડાવાળો થાંભલો

શા માટે પૃથ્વી પરના કોઈ પર્વતની મહત્તમ ઊંચાઈ લગભગ 10 km જેટલી હોઈ શકે ? આ પ્રશ્નોનો ઉત્તર ખડકોના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો પર વિચાર કરવાથી મળી શકે છે. પર્વતનો પાયો સમાન દબાણ હેઠળ હોતો નથી. આ બાબત ખડકોને આકાર પ્રતિબળ પૂરું પાડે છે. જેને કારણે ખડકો સરકી શકે છે. ટોચ પરનાં બધાં જ દ્રવ્યોને કારણે ઉદ્ભવતું પ્રતિબળ જેને કારણે ખડકો સરકે છે તે ક્રાંતિક આકાર પ્રતિબળ કરતાં ઓછું હોવું જોઈએ.

h ઊંચાઈવાળા પર્વતના તળિયે પર્વતના વજનને કારણે એકમ ક્ષેત્રફળ પર લાગતું બળ $h\rho g$ હોય છે. જ્યાં ρ પર્વતના દ્રવ્યની ઘનતા અને g ગુરુત્વપ્રવેગ છે. તળિયે રહેલું દ્રવ્ય શિરોલંબ અધોદિશામાં આ બળ અનુભવે છે, પરંતુ પર્વતની બાજુઓ આ બળથી સ્વતંત્ર હોય છે. એટલે કે આ કિસ્સો દબાણ અથવા કદ-સંકોચનનો નથી. આ પ્રતિબળનો આકાર (સ્પર્શીય) ઘટક છે. જે લગભગ $h\rho g$ જેટલો જ છે. હવે વિશિષ્ટ ખડક માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ 30×10^7 N m^{-2} છે. તેને $h\rho g$ સાથે સરખાવીએ, જ્યાં $\rho = 3 \times 10^3$ kgm^{-3} હોય, તો

$$h\rho g = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

$$h = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2} / (3 \times 10^3 \; kg\, m^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2})$$

$$= 10 \text{ km}$$

જે માઉન્ટ એવરેસ્ટની ઊંચાઈ કરતાં વધુ છે.

સારાંશ

1. એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ પુનઃસ્થાપકબળ એ પ્રતિબળ છે અને પરિમાણનો આંશિક ફેરફાર એ વિકૃતિ છે. સામાન્યતઃ ત્રણ પ્રકારનાં પ્રતિબળ હોય છે. (a) પ્રતાન પ્રતિબળ - સંગતપ્રતિબળ (તણાવ સાથે સંકળાયેલ) અથવા દાબીય પ્રતિબળ (સંકોચન સાથે સંકળાયેલ) (b) આકાર પ્રતિબળ (c) હાઇડ્રોલિક પ્રતિબળ.
2. ઘણાં દ્રવ્યો માટે વિરૂપણ નાનું હોય ત્યારે પ્રતિબળ વિકૃતિને સપ્રમાણ હોય છે. જે હૂકનાં નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. સપ્રમાણતાનો અચળાંક સ્થિતિસ્થાપક-અંક કહેવાય છે. વિરૂપણ બળોની અસર હેઠળ પદાર્થોની પ્રતિક્રિયા અને સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકનું વર્ણન કરવા માટે ત્રણ સ્થિતિસ્થાપક-અંકો યંગ મૉડ્યુલસ, આકાર મૉડ્યુલસ અને બલ્ક મૉડ્યુલસનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ઘન પદાર્થોનો એક પ્રકાર ઇલાસ્ટોમર તરીકે ઓળખાય છે, જે હૂકના નિયમનું પાલન કરતો નથી.
3. જ્યારે કોઈ પદાર્થ તણાવ કે સંકોચન હેઠળ હોય ત્યારે હૂકનાં નિયમનું સ્વરૂપ $F/A = Y\Delta L/L$ હોય છે. જ્યાં $\Delta L/L$ પદાર્થની તણાવ કે દાબીય વિકૃતિ, F વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરતાં બળનું માન છે.

A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ જે જેનાં પર બળ F લાગુ પાડેલ છે. (જે A ને લંબદિશામાં છે) અને Y પદાર્થ માટે યંગ મૉડ્યુલસ છે. અહીં પ્રતિબળ F/A છે.

4. પદાર્થની ઉપરની અને નીચેની સપાટીને સમાંતર બળોની જોડ લાગુ પાડવામાં આવે છે ત્યારે પદાર્થ એવી રીતે વિરૂપણ અનુભવે છે કે જેથી ઉપરની સપાટી, નીચેની સપાટીની સાપેક્ષે કોઈ એક બાજુ વિસ્થાપન અનુભવે. ઉપરની સપાટીનું સમક્ષિતિજ વિસ્થાપન ΔL શિરોલંબ ઊંચાઈ Lને લંબ હોય છે. આ પ્રકારના વિરૂપણને આકાર વિરૂપણ કહે છે. તેને અનુરૂપ પ્રતિબળને આકાર પ્રતિબળ કહે છે. આવું પ્રતિબળ માત્ર ઘનમાં જ ઉદ્ભવે છે. આવા વિરૂપણ માટે હૂકનો નિયમ નીચેના સ્વરૂપે લઈ શકાય :

$$F/A = G\Delta L/\text{L}$$

જ્યાં ΔL લાગુ પાડેલ બળ Fની દિશામાં પદાર્થના એક છેડાનું વિસ્થાપન અને G આકાર મૉડ્યુલસ છે.

5. જ્યારે કોઈ પદાર્થ તેની ફરતે રહેલા પ્રવાહી દ્વારા લાગુ પડતા પ્રતિબળને કારણે હાઇડ્રોલિક (જલીય) સંકોચન અનુભવે છે ત્યારે હૂકનો નિયમ નીચેનાં સ્વરૂપે લઈ શકાય :

$$P = B(\Delta V/\text{V})$$

જ્યાં P એ પ્રવાહીને કારણે પદાર્થ પર લાગતું દબાણ (જલીય પ્રતિબળ), $\Delta V/\text{V}$ એ દબાણને કારણે પદાર્થના કદમાં થતો નિરપેક્ષ આંશિક ફેરફાર (કદ-વિકૃતિ) અને B પદાર્થનો બલ્ક મૉડ્યુલસ છે.

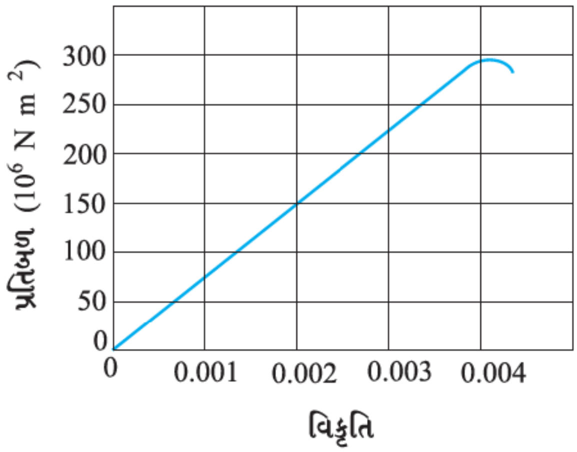
ગહન વિચારણાના મુદ્દા

1. કોઈ એક તારના કિસ્સામાં તારને છત (celling) પરથી લટકાવેલ હોય અને તેના બીજા છેડે બોજ F લટકાવીને તેની અસર હેઠળ ખેંચવામાં આવ્યો હોય, તો છત દ્વારા તેના પર લાગતું બળ ભાર જેટલું જ અને તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. જોકે તારના કોઈ પણ આડછેદ A પર લાગતું તણાવ એ F જેટલું જ હોય છે તે $2F$ ન હોઈ શકે. આમ, તણાવ પ્રતિબળ એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતાં તણાવ એટલે કે F/A જેટલું હોય છે.
2. હૂકનો નિયમ પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્રના રેખીય ભાગ માટે જ સત્ય છે.
3. યંગ મૉડ્યુલસ અને આકાર મૉડ્યુલસ માત્ર ઘન પદાર્થો સાથે સંબંધિત છે, કારણ કે ઘન પદાર્થો જ લંબાઈ અને આકાર ધરાવે છે.
4. બલ્ક મૉડ્યુલસ ઘન, પ્રવાહી અને વાયુઓ બધા જ સાથે સંબંધિત છે. જ્યારે પદાર્થના પ્રત્યેક ભાગ પર સમાન પ્રતિબળ લાગે ત્યારે કદમાં થતા ફેરફારના સંદર્ભમાં તે છે અને તેના આકારમાં ફેરફાર થતો નથી.
5. ધાતુઓ માટે યંગ મૉડ્યુલસનું મૂલ્ય મિશ્રધાતુ અને ઈલાસ્ટોમર કરતાં વધુ હોય છે. યંગ મૉડ્યુલસનું મોટું મૂલ્ય ધરાવતાં દ્રવ્યોમાં લંબાઈમાં સૂક્ષ્મ ફેરફાર માટે ખૂબ જ વધુ બળની જરૂર પડે છે.
6. રોજિંદા જીવનમાં આપણી એવી ધારણા હોય છે કે જે દ્રવ્યને વધુ ખેંચી શકાય તે વધુ સ્થિતિસ્થાપક છે, પરંતુ તે ધારણા ખોટી છે. વાસ્તવમાં જે દ્રવ્ય આપેલ બોજ દ્વારા ઓછા ખેંચી શકાતા હોય તે વધુ સ્થિતિસ્થાપક હોય છે.
7. વ્યાપકરૂપે કોઈ એક દિશામાં લાગુ પાડેલ વિરૂપક બળ અન્ય દિશાઓમાં વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરી શકે છે. આવી પરિસ્થિતિમાં પ્રતિબળ અને વિકૃતિ વચ્ચેની સપ્રમાણતા એક જ સ્થિતિસ્થાપક-અંક વડે વર્ણવી શકાય નહિ. ઉદાહરણ તરીકે સંગત વિકૃતિ અંતર્ગત રહેલા તારના પાર્શ્વિક પરિમાણ (આડછેદની ત્રિજ્યા) સૂક્ષ્મ ફેરફાર અનુભવશે. જેને દ્રવ્યનાં બીજા સ્થિતિસ્થાપક-અંક (પોઇસન ગુણોત્તર) વડે દર્શાવી શકાય છે.
8. પ્રતિબળ સદિશ રાશિ નથી કેમ કે બળને ચોક્કસ દિશા આપી શકાય છે તેમ પ્રતિબળને ચોક્કસ દિશા આપી શકાતી નથી. પદાર્થના કોઈ એક ભાગ પર, આડછેદની નિશ્ચિત બાજુ પર લાગતાં બળને ચોક્કસ દિશા હોય છે.

સ્વાધ્યાય

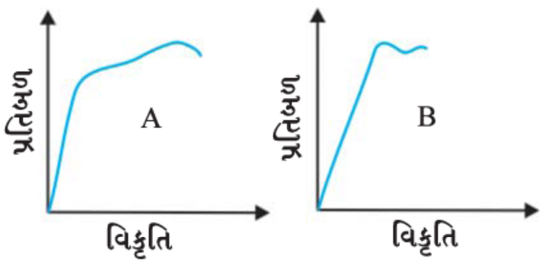
9.1 4.7 m લંબાઈ અને 3.0×10^{-5} m^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતો સ્ટીલનો તાર તથા 3.5 m લંબાઈ અને 4.0×10^{-5} m^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા તાંબાના તાર પર આપેલ સમાન ભાર લટકાવતા બંને તારની લંબાઈમાં સમાન વધારો થાય છે, તો સ્ટીલ અને તાંબાનાં યંગ મૉડ્યુલસનો ગુણોત્તર શું હશે ?

9.2 આપેલ દ્રવ્ય માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર આકૃતિ 9.11 માં દર્શાવેલ છે, તો આ દ્રવ્ય માટે (a) યંગ મૉડ્યુલસ અને (b) અંદાજિત આધિન પ્રબળતા કેટલી હશે ?



આકૃતિ 9.11

9.3 આકૃતિ 9.12માં દ્રવ્ય *A* અને *B* માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિ-આલેખ દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 9.12

આલેખ સમાન માપક્રમ પર દોરેલ છે.

(a) કયા દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ મોટો હશે ?

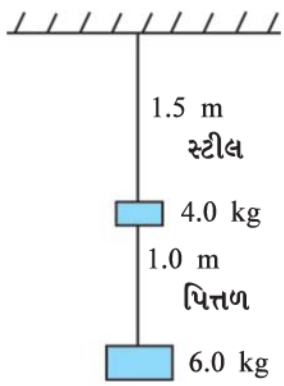
(b) બેમાંથી કયું દ્રવ્ય વધુ મજબૂત હશે ?

9.4 નીચે આપેલ વિધાનો કાળજીપૂર્વક વાંચી કારણ સહિત તે સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો :

(a) રબરનો યંગ મૉડ્યુલસ સ્ટીલ કરતાં મોટો હોય છે.

(b) ગૂંચળાનું ખેંચાણ (લંબાઈ વધારો) તેના આકાર મૉડ્યુલસ પરથી નક્કી થાય છે.

9.5 0.25 cm વ્યાસ ધરાવતા બે તાર પૈકી એક સ્ટીલનો અને બીજો પિત્તળનો બનેલો છે. આકૃતિ 9.13 મુજબ તેમને ભારિત કરેલ છે. ભારવિહીન અવસ્થામાં સ્ટીલના તારની લંબાઈ 1.5 m અને પિત્તળના તારની લંબાઈ 1.0 m છે. સ્ટીલ અને પિત્તળના તારમાં લંબાઈમાં થતાં વધારાની ગણતરી કરો.



આકૃતિ 9.13

9.6 ઍલ્યુમિનિયમના સમઘનની કિનારી (edge) 10 cm લાંબી છે. આ ઘનની એક સપાટી શિરોલંબ દિવાલ સાથે જડિત કરેલ છે. તેની વિરુદ્ધ તરફની સપાટીએ 100 kg દળ જોડવામાં આવે છે. ઍલ્યુમિનિયમનો આકાર મૉડ્યુલસ 25 GPa હોય, તો આ સપાટીનું શિરોલંબ દિશામાં વિસ્થાપન કેટલું થશે ?

9.7 નરમ સ્ટીલમાંથી બનાવેલા ચાર પોલા અને સમાન નળાકાર વડે 50,000 kg દળવાળા મોટા સ્ટ્રક્ચરને આધાર આપવામાં આવ્યો છે. દરેક નળાકારની અંદર અને બહારની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 30 cm અને 60 cm છે. ભાર-વહેંચણી સમાન રીતે થાય છે. તેમ ધારીને બધા નળાકારમાં દાબીય વિકૃતિની ગણતરી કરો.

9.8 15.2 mm × 19.1 mm લંબચોરસ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં તાંબાના એક ટુકડાને 44,500 N બળના તણાવ વડે ખેંચવામાં આવે છે જેથી માત્ર સ્થિતિસ્થાપક વિરૂપણ ઉદ્ભવે છે, તો ઉદ્ભવતી વિકૃતિની ગણતરી કરો.

9.9 સ્કી વિસ્તારમાં ઊડન ખટોલા (chair lift)નો આધાર સ્ટીલનો એક કૅબલ છે. જેની ત્રિજ્યા 1.5 cm છે. જો મહત્તમ પ્રતિબળ 10^8 N m^{-2} થી વધારી શકાતું ન હોય તો કૅબલ કેટલા મહત્તમ ભારને આધાર આપી શકે ?

9.10 2.0 m લંબાઈના ત્રણ તાર વડે 15 kg દળના દઢ સળિયાને સમાન રીતે લટકાવેલ છે. ત્રણ પૈકી છેડાના બે તાર તાંબાના અને વચ્ચેનો તાર લોખંડનો છે. જો ત્રણેય તાર સમાન તણાવ અનુભવતા હોય, તો તેમના વ્યાસના ગુણોત્તર શોધો.

9.11 ખેંચાયા વગરના 1.0 m લંબાઈ ધરાવતા સ્ટીલના તારને એક છેડે 14.5 kg દળને જડિત કરેલ છે. તેને ઊર્ધ્વ સમતલમાં વર્તુળાકારે ઘુમાવવામાં આવે છે. વર્તુળમાર્ગમાં નીચેના બિંદુએ તેની કોણીય ઝડપ 2 પરિભ્રમણ /s છે. તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 0.065 cm^2 છે. જ્યારે જડિત કરેલ દળ વર્તુળમાર્ગમાં નિમ્નત્તમ બિંદુએ હોય ત્યારે તારના લંબાઈ-વધારાની ગણતરી કરો.

9.12 નીચે આપેલ માહિતી પરથી પાણી માટે બલ્ક મૉડ્યુલસની ગણતરી કરો. પ્રારંભિક કદ = 100.0 લિટર, દબાણનો વધારો = 100.0 atm (1 atm = 1.013×10^5 Pa), અંતિમ કદ = 100.5 લિટર. (અચળ તાપમાને) પાણી અને હવાનાં બલ્ક મૉડ્યુલસની તુલના કરો. આ ગુણોત્તર શા માટે મોટો છે તે સરળ શબ્દોમાં સમજાવો.

9.13 જે ઊંડાઈએ દબાણ 80 atm હોય ત્યાં પાણીની ઘનતા શોધો. સપાટી પર પાણીની ઘનતા 1.03×10^3 kgm^{-3} છે. પાણીની દબનીયતા 45.8×10^{-11} Pa^{-1} (1 Pa = 1 N m^{-2})

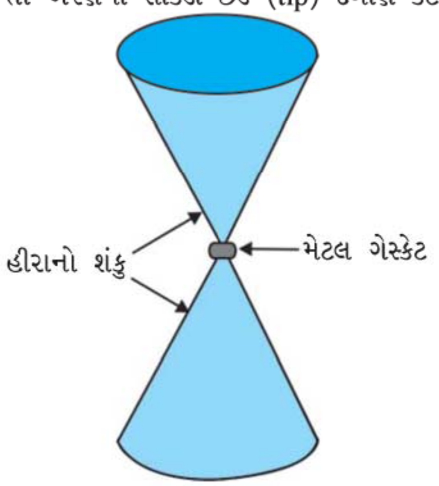
9.14 10 atm જેટલા હાઇડ્રોલિક દબાણ હેઠળ રહેલા કાચના ચોસલા(Slab) માટે કદના આંશિક ફેરફારની ગણતરી કરો.

9.15 10 cm લંબાઈની કિનારીવાળા તાંબાના નક્કર સમઘન માટે 7.0×10^6 Pa જેટલા હાઇડ્રોલિક દબાણની અસર હેઠળ કદ-સંકોચનની ગણતરી કરો.

9.16 એક લિટર પાણીનું 0.10 % સંકોચન કરવા તેના પરના દબાણમાં કેટલો ફેરફાર કરવો પડે ?

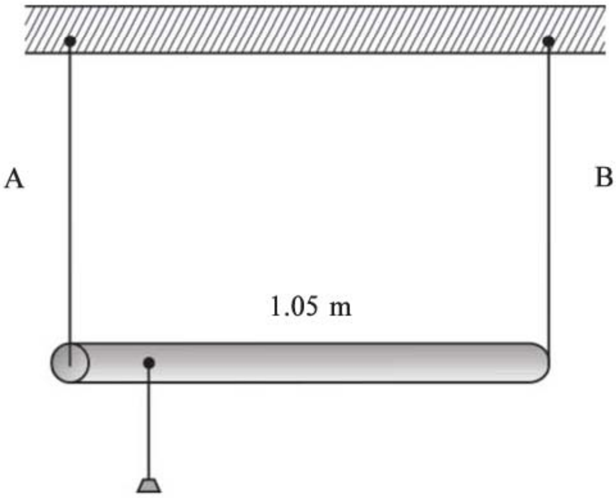
વધારાના સ્વાધ્યાય

9.17 હીરાના એક જ સ્ફટિકમાંથી આકૃતિ 9.14માં દર્શાવ્યા મુજબના આકારનું એરણ (anvils) બનાવેલ છે. તેનો ઉપયોગ ઊંચા દબાણ હેઠળ દ્રવ્યની વર્તણૂક તપાસવા માટે થાય છે. એરણના સાંકડા છેડા પાસે સપાટ બાજુઓના વ્યાસ 0.50 mm છે. જો એરણના પહોળા છેડાઓ પર 50,000 Nનું દાબીય બળ લાગુ પાડેલ હોય, તો એરણના સાંકડા છેડે (tip) દબાણ કેટલું હશે.



આકૃતિ 9.14

9.18 1.05 m લંબાઈ અને અવગણ્ય દળ ધરાવતાં એક સળિયાને આકૃતિ 9.15માં દર્શાવ્યા મુજબ બે તાર વડે બંને છેડેથી લટકાવેલ છે. તાર *A* સ્ટીલ અને તાર *B* ઍલ્યુમિનિયમનો છે. તાર *A* અને તાર *B*ના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે 1.0 mm^2 અને 2.0 mm^2 છે. સળિયા પર કયા બિંદુએ m દળ લટકાવવામાં આવે કે જેથી સ્ટીલ અને ઍલ્યુમિનિયમના બંને તારમાં (a) સમાન પ્રતિબળ (b) સમાન વિકૃતિ ઉદ્ભવે ?



આકૃતિ **9.15**

9.19 1.0 m લંબાઈ અને 0.50×10^{-2} cm^2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં નરમ સ્ટીલના તારને બે થાંભલાની વચ્ચે સમક્ષિતિજ દિશામાં સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ (મર્યાદા)માં રહે તેમ ખેંચવામાં આવે છે. હવે તારના મધ્યબિંદુએ 100 g દળ લટકાવવામાં આવે, તો તારનું મધ્યબિંદુ કેટલું નીચે આવશે ?

9.20 ધાતુની બે પટ્ટીઓને છેડે, દરેકનો વ્યાસ 6.0 mm હોય તેવા ચાર રિવેટ દ્વારા એકબીજા સાથે જડેલ છે. રિવેટ પરનું આકાર પ્રતિબળ 6.9×10^7 Pa થી વધારી ન શકાય તે માટે જોડેલ પટ્ટીઓ પરનું મહત્તમ તણાવ કેટલું રાખવું જોઈએ ? દરેક રિવેટ એક ચતુર્થાંશ બોજ વહન કરે છે તેમ ધારો.

9.21 પ્રશાંત મહાસાગરમાં આવેલી મરીના નામની ખાઈ પાણીની સપાટીથી 11 km ઊંડી છે. ખાઈના તળિયે પાણીનું દબાણ 1.1×10^8 Pa છે. 0.32 m^3 પ્રારંભિક કદ ધરાવતાં એક સ્ટીલના દડાને દરિયામાં નાંખતાં તે ખાઈના તળિયા સુધી પહોંચે છે, તો દડાના કદમાં થતો ફેરફાર કેટલો હશે ? સ્ટીલનો બલ્ક મૉડ્યુલસ 160 GPa છે.

પ્રકરણ 10

તરલના યાંત્રિક ગુણધર્મો (MECHANICAL PROPERTIES OF FLUIDS)

10.1 પ્રસ્તાવના

10.2 દબાણ

10.3 ધારારેખી વહન

10.4 બર્નુલીનો સિદ્ધાંત

10.5 શ્યાનતા (સ્નિગ્ધતા)

10.6 પૃષ્ઠતાણ

સારાંશ

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

સ્વાધ્યાય

વધારાના સ્વાધ્યાય

પરિશિષ્ટ

10.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રવાહી અને વાયુઓના કેટલાક સામાન્ય ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. પ્રવાહીઓ અને વાયુઓ વહી શકે છે અને તેથી તેમને તરલ (Fluids) કહે છે. મૂળભૂત રીતે પ્રવાહીઓ અને વાયુઓનો આ ગુણધર્મ તેમને ઘન પદાર્થોથી જુદા પાડે છે.

તરલ આપણી આસપાસ બધે જ છે. પૃથ્વીને હવાનું આવરણ છે અને તેની (પૃથ્વીની) બે તૃતીયાંશ સપાટી પાણી વડે ઢંકાયેલી છે. પાણી માત્ર આપણા જ અસ્તિત્વ માટે જરૂરી નથી, પરંતુ દરેક સસ્તન પ્રાણીઓના બંધારણમાં મહદંશે પાણી છે. વનસ્પતિ સહિત બધા સજીવોમાં થતી પ્રક્રિયાઓ તરલના માધ્યમથી થાય છે. આમ તરલના ગુણધર્મો અને વર્તણૂક સમજવાનું અગત્યનું છે.

તરલ ઘન પદાર્થોથી કેવી રીતે જુદા પડે છે ? પ્રવાહીઓ અને વાયુઓમાં કઈ બાબતો સામાન્ય છે ? ઘન પદાર્થથી ભિન્ન બાબત એ છે કે, તરલને પોતાનો નિશ્ચિત આકાર હોતો નથી. ઘન અને પ્રવાહી પદાર્થોને નિશ્ચિત કદ હોય છે જ્યારે વાયુ તેના પાત્રના સમગ્ર કદને ભરી દે છે. આપણે અગાઉના પ્રકરણમાં શીખ્યાં છીએ કે ઘન પદાર્થોનું કદ પ્રતિબળ (Stress) દ્વારા બદલી શકાય છે. ઘન, પ્રવાહી કે વાયુનું કદ તેની પર લાગતા પ્રતિબળ અથવા દબાણ પર આધારિત છે. જ્યારે આપણે ઘન કે પ્રવાહી પદાર્થોના નિશ્ચિત કદની વાત કરીએ છીએ, ત્યારે તેનો અર્થ તે કદ વાતાવરણના દબાણે છે તેમ સમજવું. વાયુઓ અને ઘન કે પ્રવાહી પદાર્થો વચ્ચેનો તફાવત એ છે કે ઘન અને પ્રવાહી પદાર્થોમાં બાહ્ય દબાણના ફેરફારને લીધે થતો કદનો ફેરફાર ઘણો ઓછો છે. બીજા શબ્દોમાં ઘન અને પ્રવાહી પદાર્થોની દબનીયતા (Compressibility) વાયુઓની સરખામણીમાં ઘણી ઓછી છે.

આકાર પ્રતિબળ, ઘન પદાર્થનું કદ અચળ રાખીને તેનો આકાર બદલી શકે છે. તરલનો ચાવીરૂપ ગુણધર્મ એ છે કે તેઓ આકાર પ્રતિબળને ઘણો ઓછો અવરોધ દાખવે છે. તેમનો આકાર, ખૂબ નાના આકાર પ્રતિબળ વડે પણ બદલાય છે. તરલનું આકાર પ્રતિબળ, ઘન પદાર્થો માટેના મૂલ્ય કરતાં લગભગ દસ લાખ ગણું નાનું હોય છે.

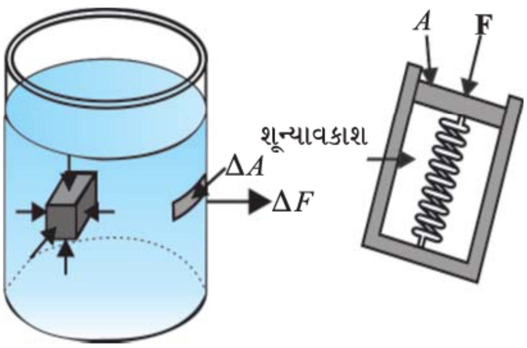
10.2 દબાણ (PRESSURE)

એક તીક્ષ્ણ સોય આપણી ત્વચા પર દબાવતાં તેને વીંધી નાખે છે. જોકે તેટલા જ બળથી મોટું સંપર્ક ક્ષેત્રફળ ધરાવતો કોઈ બુઠ્ઠો પદાર્થ (ચમચીના પાછળના ભાગ જેવો) તેની પર દબાવતાં આપણી ત્વચા અકબંધ રહે છે. જો માણસની છાતી પર કોઈ હાથી ઊભો રહે તો તેની પાંસળીઓ તૂટી જાય છે. જેની છાતી પર એક મોટું,

હલકું પણ મજબૂત પાટિયું પહેલાં મૂકવામાં આવે તો સરકસનો કલાકાર આવા અકસ્માતથી બચી જાય છે. આવા રોજિંદા અનુભવો પરથી આપણને સમજાય છે કે બળ અને તેના વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ બંને મહત્ત્વનાં છે. બળ લાગતું હોય તેવું ક્ષેત્રફળ જેમ વધારે નાનું હોય તેમ બળની અસર વધુ હોય છે. આ ખ્યાલ દબાણ તરીકે ઓળખાય છે.

જ્યારે કોઈ પદાર્થને સ્થિર તરલમાં ડૂબાડવામાં આવે છે ત્યારે તરલ તેની સપાટી પર બળ લગાડે છે. આ બળ હંમેશાં પદાર્થની સપાટીને લંબ હોય છે. આમ હોવાનું કારણ એ છે કે જો બળનો, સપાટીને સમાંતર કોઈ ઘટક હોત તો ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમના પરિણામ સ્વરૂપ પદાર્થ પણ પ્રવાહી પર તે સપાટીને સમાંતર બળ લગાડત. આ બળ તરલને આ સપાટીને સમાંતર ગતિ કરાવત. પરંતુ તરલ સ્થિર હોવાથી આમ ન થઈ શકે. આથી સ્થિર તરલ વડે લગાડાતું બળ તેની સાથેની સંપર્કમાંની સપાટીને લંબ હોવું જ જોઈએ. આ બાબત આકૃતિ 10.1(a)માં દર્શાવેલ છે.

આપેલ બિંદુએ તરલે લગાડેલું લંબ બળ માપી શકાય છે. આવા એક દબાણમાપક સાધનનું આદર્શ સ્વરૂપ આકૃતિ 10.1(b)માં દર્શાવેલ છે. તે એક પિસ્ટન (Piston-દટ્ટા) પર લાગતા બળને માપવા માટેની અંકિત કરેલી સ્પ્રિંગ ધરાવતી નિર્વાત ચેમ્બરનું બનેલું છે. આ રચના તરલની અંદરના એક બિંદુએ મૂકવામાં આવે છે. પિસ્ટન પર તરલ વડે અંદર તરફ લાગતું બળ, બહાર તરફના સ્પ્રિંગ બળ વડે સમતોલાય છે અને આ રીતે તે મપાય છે.



આકૃતિ 10.1 *(a) બીકરમાંના તરલ વડે ડૂબેલા પદાર્થ કે દીવાલ પર લગાડાતું બળ દરેક બિંદુએ સપાટીને લંબ છે.*
(b) દબાણ માપવા માટે એક આદર્શ રચના

જો A ક્ષેત્રફળ ધરાવતા પિસ્ટન પર લાગતા આ લંબ બળનું માન F હોય, તો **સરેરાશ દબાણ** P_{av}ને એકમ ક્ષેત્રફળ પર લાગતા લંબ બળ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

$$P_{av} = \frac{F}{A} \qquad (10.1)$$

સૈદ્ધાંતિક રીતે, પિસ્ટનનું ક્ષેત્રફળ યાદચ્છિક રીતે નાનું બનાવી શકાય છે. આમ કરીને દબાણને લક્ષ સ્વરૂપમાં

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (10.2)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

દબાણ એ અદિશ રાશિ છે. અમે વાચકને એ યાદ કરાવીએ છીએ કે સમીકરણ (10.1) અને (10.2)માં અંશમાં આવતું બળ એ (સદિશ) બળ નથી પરંતુ બળનો, સ્વીકારેલ સપાટીને લંબ ઘટક છે. તેના પરિમાણ $[ML^{-1}T^{-2}]$ છે. દબાણનો SI એકમ N m^{-2} છે. તેને ફ્રેંચ વિજ્ઞાની બ્લેઝ પાસ્કલ (1623-1662)ના માનમાં પાસ્કલ (Pa) નામ અપાયું છે. તેણે તરલના દબાણ અંગે પ્રારંભિક અભ્યાસો કર્યા હતા. દબાણનો એક સામાન્ય એકમ વાતાવરણ, (atm) છે. તે દરિયાની સપાટીએ વાતાવરણ વડે લાગતું દબાણ છે. (1 atm = 1.013×10^5 Pa)

બીજી એક રાશિ જે તરલના વર્ણનમાં અનિવાર્ય છે તે ઘનતા ρ છે. m દળના અને V કદ ધરાવતા તરલ માટે,

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (10.3)$$

ઘનતાના પરિમાણ $[ML^{-3}]$ છે. તેનો SI એકમ kg m^{-3} છે. તે ધન અદિશ રાશિ છે. પ્રવાહી મહદંશે અદબનીય છે અને તેથી બધા દબાણે તેની ઘનતા લગભગ અચળ છે. બીજી બાજુ, વાયુઓ દબાણ સાથે ઘનતામાં મોટા ફેરફારો દર્શાવે છે.

$4^{o}C$ (277 K) તાપમાને પાણીની ઘનતા 1.0×10^3 kg m^{-3} છે. કોઈ દ્રવ્યની સાપેક્ષ ઘનતા એ તેની ઘનતા અને $4^{o}C$ તાપમાને પાણીની ઘનતાનો ગુણોત્તર છે. તે પરિમાણરહિત, ધન અદિશ રાશિ છે. દાખલા તરીકે ઍલ્યુમિનિયમની સાપેક્ષ ઘનતા 2.7 છે. તેની ઘનતા 2.7×10^3 kg m^{-3} છે. કેટલાંક સામાન્ય તરલોની ઘનતા કોષ્ટક 10.1માં દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 10.1 કેટલાંક સામાન્ય તરલોની STP* એ ઘનતા

તરલ	ρ (kg m^{-3})
પાણી	1.00×10^3
દરિયાનું પાણી	1.03×10^3
પારો	13.6×10^3
ઈથાઈલ આલ્કોહૉલ	0.806×10^3
સંપૂર્ણ લોહી (અવિઘટીત લોહી)	1.06×10^3
હવા	1.29
ઑક્સિજન	1.43
હાઈડ્રોજન	9.0×10^{-2}
આંતરતારાકીય અવકાશ	$\approx 10^{-20}$

* *STP એટલે પ્રમાણભૂત (Standard) તાપમાન ($0^{o}C$) અને 1 atm દબાણ*

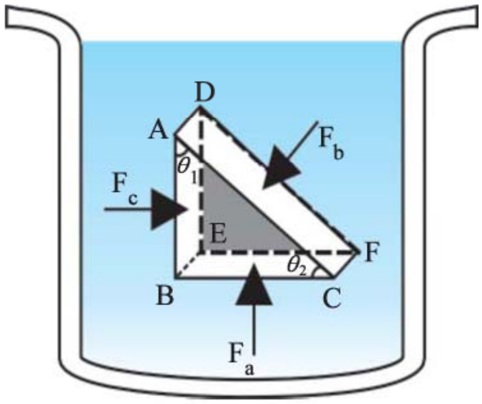
▶ *ઉદાહરણ 10.1* 10 cm^2 જેટલું દરેકનું આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા સાથળના બે અસ્થિઓ (ફિમર્સ) માનવશરીરના ઉપરના ભાગના 40 kg દળને આધાર આપે છે. આ દરેક અસ્થિ (ફિમર્સ) વડે સહન કરાતા સરેરાશ દબાણનો અંદાજ મેળવો.

ઉકેલ ફિમર્સના કુલ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ $A = 2 \times 10$ cm^2 $= 20 \times 10^{-4}$ m^2. તેમની પર લાગતું બળ $F = 40$ kg wt $= 400$ N ($g = 10$ m s^{-2} લેતાં). આ બળ અધોદિશામાં લાગે છે અને તેથી ફિમર્સ પર લંબરૂપે છે. આમ, સરેરાશ દબાણ

$$P_{av} = \frac{F}{A} = 2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$ ◀

10.2.1 પાસ્કલનો નિયમ (Pascal's Law)

ફ્રેંચ વિજ્ઞાની બ્લેઝ પાસ્કલે એવું નિરીક્ષણ કર્યું કે, સ્થિર તરલમાં એક સમાન ઊંચાઈએ આવેલાં બધાં બિંદુઓએ દબાણ એકસરખું હોય છે. આ હકીકતનું નિદર્શન એક સરળ રીતે કરી શકાય.



આકૃતિ 10.2 *પાસ્કલના નિયમની સાબિતી. ABC-DEF એ સ્થિર પ્રવાહીના, અંદરના ભાગમાં આવેલ ખંડ (અંશ) છે. આ ખંડ એક કાટકોણ પ્રિઝમના સ્વરૂપમાં છે. આ ખંડ એટલો નાનો છે કે ગુરુત્વાકર્ષણની અસર અવગણી શકાય છે, પરંતુ તેને સ્પષ્ટતા માટે મોટો કરીને બતાવેલ છે.*

આકૃતિ 10.2 એક સ્થિર પ્રવાહીનો, તેના અંદરના ભાગમાં રહેલ એક ખંડ દર્શાવે છે. આ ખંડ ABC-DEF એક કાટકોણ પ્રિઝમના સ્વરૂપમાં છે. સૈદ્ધાંતિક રીતે આ પ્રિઝમ જેવો ખંડ ખૂબ નાનો છે જેથી તેનું દરેક બિંદુ પ્રવાહીની સપાટીથી એકસરખી ઊંડાઈએ ગણી શકાય અને તેથી આ બધાં બિંદુઓ પર ગુરુત્વાકર્ષણની અસર એક સમાન છે. પરંતુ સ્પષ્ટતા માટે આપણે આ ખંડને મોટો કરીને બતાવેલ છે. આ ખંડ પર લાગતાં બળો, તરલના બાકીના ભાગ વડે લાગતાં હોય છે અને ઉપરની ચર્ચા મુજબ તેઓ સપાટીઓને લંબ હોય છે. આમ, તરલ વડે A_a, A_b અને A_c વડે દર્શાવાતાં ક્ષેત્રફળો ધરાવતી અનુક્રમે BEFC, ADFC અને ADEB બાજુઓ પર લંબરૂપે લાગતાં બળો F_a, F_b અને F_c અનુરૂપ દબાણો P_a, P_b અને P_c ઉત્પન્ન કરે છે. આથી,

$F_b \sin\theta_2 = F_c$, $\quad F_b \cos\theta_2 = F_a$ (સંતુલન પરથી)

$A_b \sin\theta_2 = A_c$, $\quad A_b \cos\theta_2 = A_a$ (ભૂમિતિ પરથી)

$$\text{આમ, } \frac{F_b}{A_b} = \frac{F_c}{A_c} = \frac{F_a}{A_a}; \quad P_b = P_c = P_a \qquad (10.4)$$

આથી, સ્થિર તરલમાં આપેલ બિંદુએ બધી દિશાઓમાં લાગતું દબાણ એક સમાન છે. તે ફરીથી આપણને યાદ કરાવે છે કે બીજા પ્રકારોના પ્રતિબળની જેમ, દબાણ એ સદિશ રાશિ નથી. તેને કોઈ દિશા આપી શકાતી નથી. સ્થિર અને દબાણમાં હોય તેવા તરલના અંદરના ભાગમાં (અથવા સપાટી પરના) કોઈ ક્ષેત્રફળ પર, તે ક્ષેત્રફળ ગમે તે રીતે રહેલું હોય તોપણ લાગતું બળ તે ક્ષેત્રફળને લંબરૂપે હોય છે.

હવે સમાન આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા સમક્ષિતિજ પટ્ટીના સ્વરૂપમાં રહેલ તરલ-ખંડનો વિચાર કરો. આ પટ્ટી સંતુલનમાં છે. તેના બે છેડા પર લાગતાં સમક્ષિતિજ બળો એકબીજાંને સમતોલતાં હોવાં જોઈએ અથવા બે છેડાઓ પર દબાણ એક સમાન હોવું જોઈએ. આ સાબિત કરે છે કે સંતુલનમાં રહેલા પ્રવાહી માટે એક જ સમક્ષિતિજ સમતલમાં આવેલાં બધાં બિંદુઓએ દબાણ એક સમાન હોય છે. ધારો કે તરલના અલગ-અલગ ભાગમાં આ દબાણ સરખાં ન હોત તો તેનું વહન થાત કે તરલ પર પરિણામી બળ લાગતું હોત. આથી વહનની ગેરહાજરીમાં તરલમાં એક જ સમક્ષિતિજ સમતલમાં બધે દબાણ એકસમાન હોય છે.

10.2.2 ઊંડાઈ સાથે દબાણમાં ફેરફાર (Variation of Pressure with Depth)

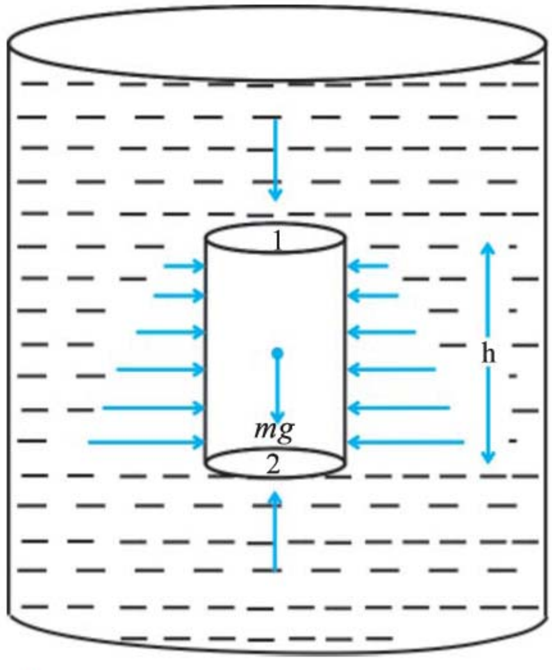
એક પાત્રમાં રહેલા સ્થિર પ્રવાહીનો વિચાર કરો. આકૃતિ 10.3માં બિંદુ 1 એ, બિંદુ 2થી ઉપર h ઊંચાઈએ આવેલ છે. બિંદુઓ 1 અને 2 આગળનાં દબાણ અનુક્રમે P_1 અને P_2 છે. તરલનો એક નળાકાર ખંડ કે જેના પાયાનું ક્ષેત્રફળ A અને ઊંચાઈ h છે તેનો વિચાર કરો. તરલ સ્થિર હોવાથી પરિણામી સમક્ષિતિજ બળ શૂન્ય થવું જોઈએ અને પરિણામી ઊર્ધ્વ બળ આ ખંડના વજનને સમતોલતું હોવું જોઈએ. તરલના દબાણને લીધે લાગતાં બળો ટોચ પર (P_1A) અધોદિશામાં અને તળિયા પર (P_2A) ઊર્ધ્વદિશામાં છે. નળાકારમાં તરલનું વજન mg હોય તો,

$$(P_2 - P_1)\text{A} = mg \qquad (10.5)$$

હવે, જો તરલની દળ ઘનતા ρ હોય, તો આપણને

$m = \rho V = \rho hA$ મળે, જેથી

$$P_2 - P_1 = \rho gh \qquad (10.6)$$



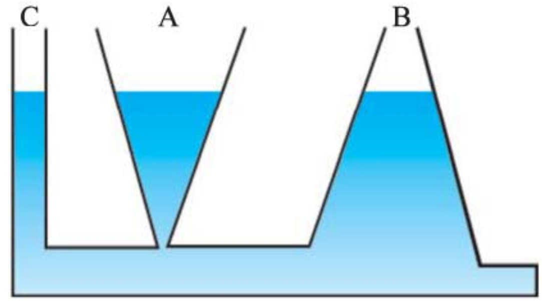
આકૃતિ 10.3 *ગુરુત્વની અસર હેઠળ તરલ. ગુરુત્વની અસર ઊર્ધ્વ નળાકાર સ્તંભ પરના દબાણ દ્વારા દર્શાવેલ છે.*

દબાણ તફાવત બે બિંદુઓ (1 અને 2) વચ્ચેના ઊર્ધ્વ દિશામાંના અંતર h, તરલની દળ ઘનતા ρ અને ગુરુત્વપ્રવેગ g પર આધારિત છે. જો ચર્ચામાં લીધેલ બિંદુ 1ને ખસેડીને તરલ (ધારો કે પાણી)ની ટોચ જે વાતાવરણમાં ખુલ્લી છે ત્યાં લઈ જઈએ તો P_1ને સ્થાને વાતાવરણનું દબાણ (P_a) લખી શકાય અને આપણે P_2ને સ્થાને P લખીએ તો, સમીકરણ 10.6 પરથી,

$$P = P_a + \rho gh \qquad (10.7)$$

મળે. આમ, વાતાવરણના સંપર્કમાં રહેલી તરલની સપાટીથી h ઊંડાઈએ દબાણ P, વાતાવરણના દબાણ કરતાં, ρgh જેટલું વધારે હોય છે. h ઊંડાઈએ વધારાના દબાણ $P - P_a$ને તે બિંદુએ **ગેજ (gauge) દબાણ** કહે છે.

સમીકરણ 10.7માં નિરપેક્ષ (absolute) દબાણના સૂત્રમાં નળાકારનું ક્ષેત્રફળ આવતું નથી. આમ તરલની ઊંચાઈ મહત્ત્વની છે, નહિ કે આડછેદનું ક્ષેત્રફળ કે પાયાનું ક્ષેત્રફળ કે પાત્રનો આકાર. એક જ સમક્ષિતિજ સપાટી પરના (એક સમાન ઊંડાઈ ધરાવતાં) બધાં બિંદુઓએ પ્રવાહીનું દબાણ એક સમાન હોય છે. **દ્રવસ્થિત વિરોધાભાસ (Hydrostatic Paradox)**ના ઉદાહરણ દ્વારા આ પરિણામને સમજી શકાય છે. જુદા જુદા આકારના ત્રણ પાત્રો A, B અને C (આકૃતિ 10.4)નો વિચાર કરો. તેઓ તળિયા પાસે એક સમક્ષિતિજ નળી દ્વારા જોડાયેલ છે. તેમને પાણીથી ભરતાં ત્રણે પાત્રોમાં જુદા જુદા જથ્થાનું પાણી હોવા છતાં સપાટીઓ એક જ સમક્ષિતિજ સમતલમાં છે. આવું એટલા માટે છે કે, બધા પાત્રના વિભાગોની નીચે તળિયે રહેલા પાણી પર દબાણ એક સમાન છે.



આકૃતિ 10.4 *હાઇડ્રોસ્ટેટિક પેરાડોક્સનું ઉદાહરણ. ત્રણ પાત્રો જુદા જુદા જથ્થાનું પણ સમાન ઊંચાઈ સુધીનું પ્રવાહી ધરાવે છે.*

> ***ઉદાહરણ 10.2*** એક તળાવની સપાટીથી 10 m ઊંડાઈએ રહેલા તરવૈયા પર દબાણ કેટલું હશે ?

ઉકેલ અહીં,

$h = 10$ m અને $\rho = 1000$ kg m^{-3}. $g = 10$ m s^{-2} લો.

સમીકરણ 10.7 પરથી

$$P = P_a + \rho gh$$
$$= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times 10 \text{ m}$$
$$= 2.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$\simeq 2 \text{ atm}$$

સપાટી પરના દબાણથી આ 100 ટકાનો વધારો દર્શાવે છે. 1 km ઊંડાઈએ દબાણનો વધારો 100 atm હોય છે. સબમરીનોને આવા પ્રચંડ દબાણોનો સામનો કરી શકે તેવી બનાવવામાં આવે છે. ◀

10.2.3 વાતાવરણનું દબાણ અને ગેજ-દબાણ (Atmospheric Pressure and Gauge Pressure)

કોઈ પણ બિંદુએ વાતાવરણનું દબાણ, તે બિંદુથી ઉપર વાતાવરણની ટોચ સુધીની હવાના એકમ આડછેદના સ્તંભના વજન જેટલું હોય છે. દરિયાની સપાટીએ તે 1.013×10^5 Pa (1 atm – 1 વાતાવરણ) છે. ઇટાલિયન વિજ્ઞાની ઇવાન્ગેલિસ્ટા ટૉરિસેલી (Evangelista Torricelli 1608-1647) એ સૌપ્રથમ વાતાવરણનું દબાણ માપવાની રીત શોધી. આકૃતિ 10.5(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ એક છેડે બંધ હોય તેવી અને પારાથી ભરેલી એક લાંબી કાચની નળી, એક પારો ભરેલા પાત્રમાં ઊંધી વાળવામાં આવે છે. આ રચનાને પારાનું દબાણમાપક (Mercury Barometer) કહે છે. નળીની અંદર પારાની ઉપરનો અવકાશ માત્ર પારાની બાષ્પ ધરાવે છે અને તેનું દબાણ P અત્યંત ઓછું હોવાથી અવગણી શકાય છે. પારાના સ્તંભની અંદરના A બિંદુ આગળનું દબાણ = 0. સ્તંભની અંદરના B બિંદુ આગળનું દબાણ, C બિંદુ આગળના દબાણ જેટલું છે, જે વાતાવરણનું દબાણ P_a છે.

B આગળનું દબાણ = વાતાવરણનું દબાણ P_a

$$P_a = \rho gh \qquad (10.8)$$

જ્યાં, ρ પારાની ઘનતા છે અને h નળીમાંના પારાના સ્તંભની ઊંચાઈ છે.

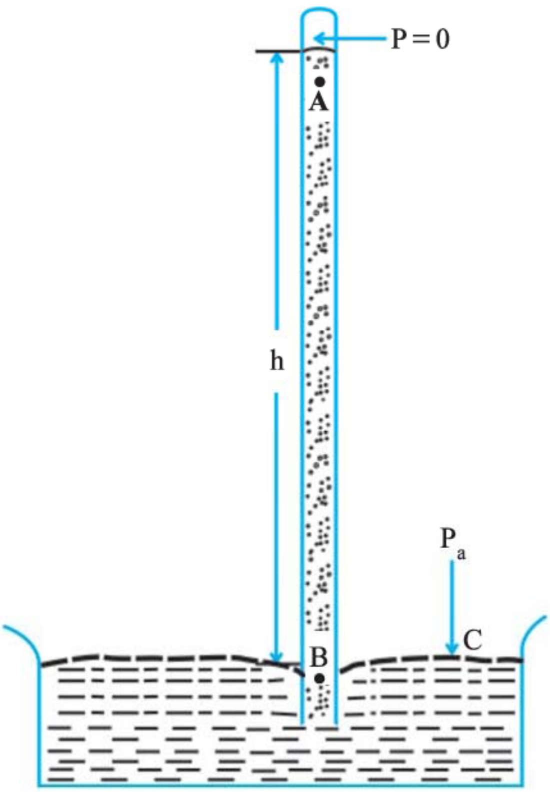
આવા પ્રયોગમાં એમ જણાયું છે કે, દબાણમાપકમાં દરિયાની સપાટીએ 76 cm ઊંચાઈના પારાના સ્તંભનું દબાણ એક વાતાવરણ (1 atm)ને સમતુલ્ય છે. સમીકરણ (10.8)માં ρનું મૂલ્ય વાપરીને પણ આ મેળવી શકાય છે. સામાન્ય પદ્ધતિમાં દબાણને cm અથવા mm of mercury (Hg)ના પદમાં રજૂ કરવામાં આવે છે. 1 mm of mercuryને સમતુલ્ય દબાણને 1 torr (ટૉરિસેલીના નામ પરથી) કહે છે.

1 torr = 133 Pa

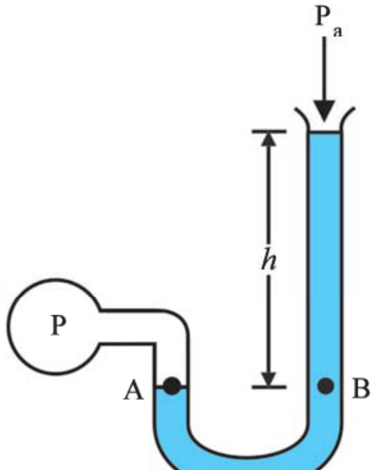
દબાણના એકમો mm of mercury અને torr ખાસ કરીને દાક્તરીમાં અને શરીરવિજ્ઞાનમાં વપરાય છે. હવામાનશાસ્ત્રમાં દબાણના સામાન્ય એકમ તરીકે bar અને millibar વપરાય છે.

1 bar = 10^5 Pa

ખુલ્લી નળી ધરાવતું મૅનોમીટર દબાણ-તફાવતો માપવામાં ઉપયોગી સાધન છે. તે એક યુ-ટ્યૂબનું બનેલું છે જેમાં યોગ્ય પ્રવાહી રાખેલ છે. નાના દબાણ તફાવત માપવા માટે ઓછી ઘનતાનું પ્રવાહી (દા.ત., ઑઇલ) અને મોટા દબાણ તફાવત માપવા માટે વધુ ઘનતાનું પ્રવાહી (દા.ત., પારો) રાખેલ છે. ટ્યૂબનો એક છેડો વાતાવરણમાં ખુલ્લો છે અને બીજો છેડો જે તંત્રનું દબાણ આપણે માપવું હોય તેની સાથે જોડેલ છે (આકૃતિ 10.5(b)). તેમાં A બિંદુ આગળનું દબાણ B બિંદુ આગળના દબાણ જેટલું છે. આપણે સામાન્યતઃ જે માપીએ છીએ તે Gauge દબાણ $(P - P_a)$ છે જે સમીકરણ (10.8) પરથી મળે છે અને તે મૅનોમીટર ઊંચાઈ hને સમપ્રમાણમાં છે.



આકૃતિ 10.5 *(a) પારાનું બૅરોમીટર*



(b) ખુલ્લી નળીવાળું મૅનોમીટર

***આકૃતિ 10.5** બે દબાણમાપક રચનાઓ*

તરલ ધરાવતા યુ-ટ્યૂબના બંને ભુજમાં સમાન સપાટી (Level)એ દબાણ સમાન હોય છે. પ્રવાહીઓ માટે દબાણ અને તાપમાનના મોટા વિસ્તારો સુધી ઘનતા અત્યંત ઓછા પ્રમાણમાં બદલાય છે અને આપણે અત્યારના હેતુઓ માટે તેને સલામત રીતે અચળ ગણી શકીએ છીએ. બીજી બાજુ વાયુઓ દબાણ અને તાપમાનના ફેરફારો સાથે ઘનતાના મોટા ફેરફારો દર્શાવે છે. તેથી વાયુઓથી વિપરીત, પ્રવાહીઓને મોટે ભાગે અદબનીય ગણવામાં આવે છે.

▶ ***ઉદાહરણ 10.3*** દરિયાની સપાટી આગળ વાતાવરણની ઘનતા 1.29 kg/m^3 છે. ઊંચાઈ સાથે તેમાં ફેરફાર થતો નથી એમ ધારો તો વાતાવરણ કેટલી ઊંચાઈ સુધી વિસ્તરેલું હશે ?

ઉકેલ સમીકરણ (10.7)નો ઉપયોગ કરીને

$\rho g h = 1.29\ \text{kg m}^{-3} \times 9.8\ \text{m s}^{-2} \times h\ \text{m} = 1.01 \times 10^5\ \text{Pa}$

$\therefore\ h = 7989\ \text{m} \approx 8\ \text{km}$

વાસ્તવમાં હવાની ઘનતા ઊંચાઈ સાથે ઘટતી જાય છે અને g પણ ઊંચાઈ સાથે ઘટે છે. વાતાવરણ ઘટતા દબાણ સાથે લગભગ 100 km સુધી વિસ્તરેલ છે. આપણે એ પણ નોંધવું જોઈએ કે, દરિયાની સપાટીએ દબાણ હંમેશાં 760 mm હોતું નથી. 10 mm of mercury જેટલો કે તેથી વધુ ઘટાડો આવનારા તોફાનનો સંકેત છે. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 10.4*** દરિયામાં 1000 m ઊંડાઈએ (a) નિરપેક્ષ દબાણ કેટલું હશે ? (b) ગેજ (gauge) દબાણ કેટલું હશે ? (c) અંદરના ભાગમાં વાતાવરણનું દબાણ જાળવેલ હોય તેવી એક સબમરીનની 20 cm × 20 cmની બારી પર આ ઊંડાઈએ લાગતું બળ કેટલું હશે ? (દરિયાના પાણીની ઘનતા 1.03×10^3 kg m^{-3} છે. $g = 10$ m s^{-2})

ઉકેલ અત્રે $h = 1000$ m અને $\rho = 1.03 \times 10^3$ kg m^{-3}

(a) સમીકરણ (10.6) પરથી, નિરપેક્ષ દબાણ

$$P = P_a + \rho gh$$
$$= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$+ 1.03 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times 1000 \text{ m}$$
$$= 104.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$= 104 \text{ atm}$$

(b) ગેજ (Gauge) દબાણ $P - P_a = \rho gh = P_g$

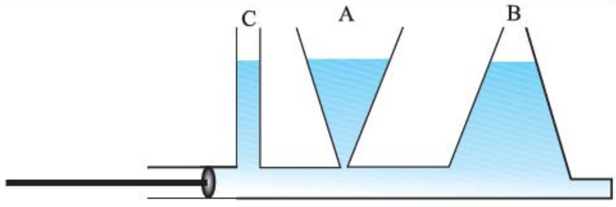
$$P_g = 1.03 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times 1000 \text{ m}$$
$$= 103 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$= 103 \text{ atm}$$

(c) સબમરીનની બહારનું દબાણ $P = P_a + \rho gh$ અને તેની અંદરનું દબાણ P_a છે. આથી બારી પર લાગતું ચોખ્ખું દબાણ એ ગેજ દબાણ $P_g = \rho gh$ છે. બારીનું ક્ષેત્રફળ $A = 0.04$ m^2, તેની પર લાગતું બળ

$$F = P_g A = 103 \times 10^5 \text{ Pa} \times 0.04 \text{ m}^2 = 4.12 \times 10^5 \text{ N}$$ ◀

10.2.4 હાઈડ્રોલિક યંત્રો (Hydraulic Machines - દ્રવ સંચાલિત યંત્રો)

એક બંધ પાત્રમાં રાખેલા તરલ પરના દબાણમાં ફેરફાર કરવાથી શું થાય છે તેનો વિચાર કરીએ. પિસ્ટન (દટ્ટા) સહિતના અને જુદાં જુદાં બિંદુઓ આગળ ત્રણ ઊર્ધ્વ નળીઓ ધરાવતા એક સમક્ષિતિજ નળાકારનો વિચાર કરો. સમક્ષિતિજ નળાકારની અંદરનું દબાણ ઊર્ધ્વ નળીઓમાંના પ્રવાહી સ્તંભ વડે દર્શાવાય છે અને બધી નળીઓમાં આ સ્તંભ એકસરખો જ હોય તે ચોક્કસ છે. જો આપણે પિસ્ટનને અંદર ધકેલીએ તો દરેક નળીઓમાં તરલની મુક્ત સપાટી (લેવલ) ઊંચે ચઢે છે જે બધામાં સમાન ઊંચાઈએ પહોંચે છે.



આકૃતિ 10.6(a) *જ્યારે પાત્રમાંના તરલ પર કોઈ બાહ્ય દબાણ લગાડવામાં આવે ત્યારે તે બધી દિશામાં સમાન રીતે પ્રસરણ પામે છે.*

આ દર્શાવે છે કે જ્યારે નળાકારની અંદરનું દબાણ વધારવામાં આવ્યું ત્યારે તે દરેક સ્થાને સમાન રીતે વિતરિત (Distributed) થયું છે. આપણે કહી શકીએ કે **જ્યારે બંધ પાત્રમાં રહેલા તરલ પર બાહ્ય દબાણ લગાડવામાં આવે છે ત્યારે તે ઘટ્યા સિવાય દરેક સ્થાને બધી દિશામાં સમાન રીતે પહોંચે છે. આ પાસ્કલના નિયમનું બીજું સ્વરૂપ છે અને રોજિંદા જીવનમાં તેના ઘણા ઉપયોગો છે.**

હાઈડ્રોલિક લિફ્ટ અને **હાઈડ્રોલિક બ્રેક** જેવી ઘણી રચનાઓ પાસ્કલના નિયમ પર રચાયેલી છે. આ રચનાઓમાં દબાણનું પ્રસારણ કરવા માટે તરલો વપરાય છે. આકૃતિ 10.6માં દર્શાવ્યા મુજબ બે પિસ્ટન વચ્ચેની જગ્યામાં પ્રવાહી ભરેલું છે. નાના આડછેદ A_1 વાળો પિસ્ટન, F_1 જેટલું બળ સીધું પ્રવાહી પર લગાડવા માટે વપરાય છે. દબાણ $P = \frac{F_1}{A_1}$ પ્રવાહીમાં દરેક સ્થાને પ્રસરીને મોટા નળાકારમાંના A_2 આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા મોટા પિસ્ટન પર લાગે છે. જેના પરિણામે ઉપર તરફ $P \times A_2$ બળ લાગે છે. તેથી તે પિસ્ટન મોટા બળ $F_2 = PA_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1}$ (પ્લૅટફૉર્મ પર મૂકેલા કાર કે ટ્રકના મોટા વજન)ને ટેકવી શકે છે. A_1 આગળ બળમાં

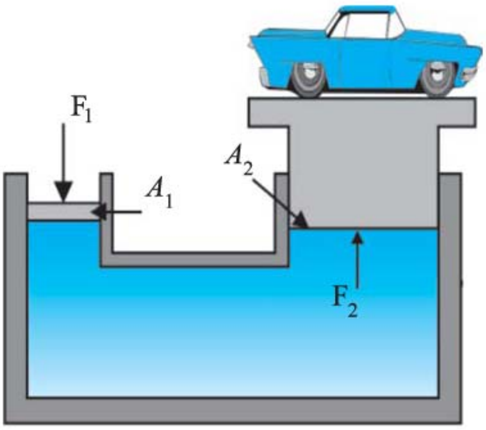
આર્કિમિડિઝનો સિદ્ધાંત

તરલ તેમાં મૂકેલા પદાર્થને અંશતઃ ટેકો પૂરો પાડે છે. જ્યારે કોઈ પદાર્થ સ્થિર પ્રવાહીમાં પૂરેપૂરો કે અંશતઃ ડૂબે છે ત્યારે તરલ, પદાર્થની તેની સાથેની સંપર્ક સપાટી પર દબાણ લગાડે છે. નીચેની સપાટીઓ પર દબાણ ઉપરની સપાટીઓ પરના દબાણ કરતાં વધુ હોય છે. કારણ કે તરલમાં દબાણ ઊંડાઈ સાથે વધે છે. આ બધાં બળોનું પરિણામી બળ ઊર્ધ્વદિશામાં હોય છે જેને ઉત્પ્લાવક બળ કહે છે. ધારો કે એક નળાકાર પદાર્થ તરલમાં ડૂબેલો છે. તેના તળિયા પર ઊર્ધ્વદિશામાં લાગતું બળ, તેની ટોચ પર અધોદિશામાં લાગતા બળ કરતાં વધુ છે. તરલ પદાર્થ પર પરિણામી ઊર્ધ્વ બળ એટલે કે ઉત્પ્લાવક બળ લગાડે છે જે $(P_2 - P_1)A$ જેટલું છે. સમીકરણ 10.4માં આપણે જોયું છે કે $(P_2 - P_1)A = \rho ghA$. અહીં hA એ ઘન પદાર્થનું કદ છે અને ρhA તેના જેટલા જ કદના પ્રવાહીનું દળ છે. $(P_2 - P_1)A = mg$. આમ ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગતું બળ, સ્થાનાંતરિત થયેલા તરલના વજન જેટલું છે. આ આર્કિમિડિઝનો સિદ્ધાંત છે.

પદાર્થ ગમે તે આકારનો હોય તોપણ આ પરિણામ સત્ય છે અને અહીં તો નળાકાર પદાર્થ માત્ર સગવડ પૂરતો જ વિચારેલ છે. પૂર્ણતઃ ડૂબેલા પદાર્થ માટે, પદાર્થે સ્થાનાંતરિત કરેલા તરલનું કદ તેના પોતાના કદ જેટલું હોય છે. જો પદાર્થની ઘનતા તરલની ઘનતા કરતાં વધુ હોય તો પદાર્થ તરલમાં ડૂબી જાય છે કારણ કે પદાર્થનું વજન ઊર્ધ્વ દાબ (ઉત્પ્લાવક બળ) કરતાં વધુ હોય છે. જો પદાર્થની ઘનતા તરલની ઘનતા કરતાં ઓછી હોય તો તે પદાર્થ તરલમાં અંશતઃ ડૂબેલો રહીને તરે છે. ડૂબેલા ભાગનું કદ શોધવા માટે ધારો કે ઘન પદાર્થનું કુલ કદ V_s અને તેના ડૂબેલા ભાગનું કદ V_p છે. તેના પર ઊર્ધ્વદિશામાં લાગતું બળ જે સ્થાનાંતરિત થયેલા તરલનું વજન છે તે $\rho_l g V_p$ છે અને તે પદાર્થના વજન જેટલું થવું જોઈએ. $\rho_s g V_s = \rho_l g V_p$ અથવા $\rho_s/\rho_l = V_p/V_s$. આ પરથી V_p મળી શકે. તરતા પદાર્થનું આભાસી વજન શૂન્ય હોય છે.

આ સિદ્ધાંતને ટૂંકમાં આમ લખી શકાય : "તરલમાં (અંશતઃ કે પૂર્ણતઃ) ડૂબેલા પદાર્થના વજનમાંનો ઘટાડો, સ્થાનાંતરિત થયેલા તરલના વજન બરાબર હોય છે."

ફેરફાર કરીને પ્લૅટફૉર્મને ઉપર કે નીચે ખસેડી શકાય છે. આમ, લગાડેલા બળને $\frac{A_2}{A_1}$ ગણું મોટું કરવામાં આવ્યું છે અને આ અવયવ ($\frac{A_2}{A_1}$) આ રચનાનો યાંત્રિક લાભ (Mechanical Advantage) છે. નીચેનું ઉદાહરણ તેનું સ્પષ્ટીકરણ કરે છે :



આકૃતિ 10.6(b) *હાઇડ્રોલિક લિફ્ટનો સિદ્ધાંત દર્શાવતી સંજ્ઞાત્મક આકૃતિ. આ રચના ભારે બોજ (Load)ને ઊંચકવા માટે વપરાય છે.*

> **ઉદાહરણ 10.5** આડછેદના જુદાં જુદાં ક્ષેત્રફળ ધરાવતી બે સિરિંજ (સોય વિનાની) પાણીથી ભરેલી છે અને પાણીથી ભરેલી એક રબરટ્યૂબ સાથે ચુસ્તપણે (Tightly) જોડેલી છે. સિરિંજોમાંના નાના પિસ્ટન અને મોટા પિસ્ટનના વ્યાસ અનુક્રમે 1.0 cm અને 3.0 cm છે. (a) જ્યારે નાના પિસ્ટન પર 10 N બળ લગાડવામાં આવે ત્યારે મોટા પિસ્ટન પર લાગતું બળ શોધો. (b) જો નાના પિસ્ટનને 6.0 cm જેટલો અંદર તરફ ધકેલવામાં આવે તો મોટો પિસ્ટન બહાર તરફ કેટલો ખસશે ?

ઉકેલ (a) તરલમાં દબાણ ઘટ્યા સિવાય પ્રસરતું હોવાથી

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1 = \frac{\pi(3/2\times10^{-2}m)^2}{\pi(1/2\times10^{\ 2}m)^2} \times 10\text{N}$$

$$= 90 \text{ N}$$

(b) પાણીને સંપૂર્ણ અદબનીય ગણેલ છે. નાના પિસ્ટનને અંદર તરફ ખસેડતાં જેટલું કદ ખસે તેટલું જ કદ મોટા પિસ્ટનને લીધે બહાર તરફ ખસે.

$$L_1A_1 = L_2A_2$$

$$L_2 = \frac{A_1}{A_2}L_1 = \frac{\pi(1/2\times10^{-2}m)^2}{\pi(3/2\times10^{-2}m)^2} \times 6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\simeq 0.67 \times 10^{-2} \text{ m} = 0.67 \text{ cm}$$

એ નોંધો કે વાતાવરણનું દબાણ બંને પિસ્ટન માટે સામાન્ય છે અને તે અવગણેલ છે. ◀

> **ઉદાહરણ 10.6** એક કાર-લિફ્ટમાં 5.0 cm ત્રિજ્યા ધરાવતા એક નાના પિસ્ટન પર સંકોચિત હવા દ્વારા F_1 બળ લગાડવામાં આવે છે. આ દબાણ 15.0 cm ત્રિજ્યા ધરાવતા બીજા પિસ્ટન સુધી પ્રસરે છે (આકૃતિ 10.6). જો ઊંચકવામાં આવતી કારનું દળ 1350 kg હોય, તો F_1ની ગણતરી કરો. આ કાર્ય સંપન્ન કરવા માટે જરૂરી દબાણ કેટલું હશે ? ($g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$)

ઉકેલ સમગ્ર તરલમાં દબાણ ઘટ્યા વિના પ્રસારિત થતું હોવાથી,

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2}F_2 = \frac{\pi(5\times10^{-2}\text{m})^2}{\pi(15\times10^{-2}\text{m})^2}(1350 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2})$$

$$= 1470 \text{ N}$$

$$\approx 1.5 \times 10^3 \text{ N}$$

આટલું બળ ઉત્પન્ન કરવા માટેનું હવાનું દબાણ

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.5\times10^3\text{N}}{\pi(5\times10^{-2})^2\text{m}^2} = 1.9 \times 10^5 \text{ Pa}$$

આ દબાણ વાતાવરણના દબાણ કરતા લગભગ બમણું છે. ◀

ઑટોમોબાઇલ્સમાં હાઇડ્રોલિક બ્રેક પણ આ સિદ્ધાંત પર કાર્ય કરે છે. જ્યારે આપણે આપણા પગ વડે નાનું બળ પૅડલ (Pedal) પર લગાડીએ છીએ ત્યારે માસ્ટર નળાકારમાં માસ્ટર પિસ્ટન અંદર તરફ ધકેલાય છે અને બ્રેક ઑઇલ

આર્કિમિડિઝ (ઈ.સ. પૂર્વે 287-212) Archimedes (287-212 B.C.)

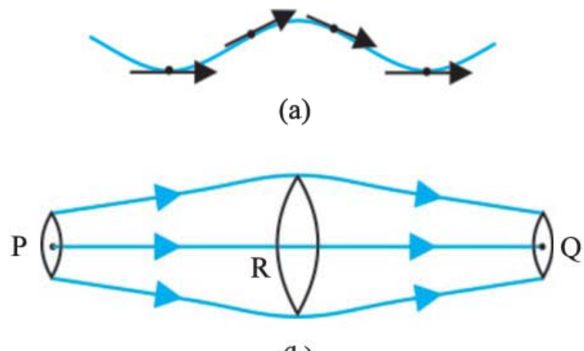
આર્કિમિડિઝ એક ગ્રીક તત્ત્વચિંતક, ગણિતશાસ્ત્રી, વિજ્ઞાની અને ઇજનેર હતો. તેણે ગિલોલની શોધ કરી અને ભારે વજનોને ઊંચકવા માટે ગરગડીઓનું તંત્ર અને ઉચ્ચાલનની રચના કરી. તેના જન્મના શહેર સિરેક્સના રાજા હેરો (Hiero) II એ તેને તેના સુવર્ણ મુગટમાં ચાંદી જેવી કોઈ સસ્તી ધાતુનો ભેળ થયો છે કે નહિ તે મુગટને હાનિ પહોંચાડ્યા વિના નક્કી કરવાનું કહ્યું. તેના બાથટબમાં પોતે અનુભવેલા વજનના આંશિક ઘટાડાથી તેને ઉકેલનું સૂચન મળ્યું. દંતકથા પ્રમાણે તે સિરેક્સની શેરીઓમાં નગ્ન દોડ લગાવતો આશ્ચર્યોદ્‌ગાર "Eureka eureka" જેનો અર્થ છે "તે મને જડ્યું છે, તે મને જડ્યું છે" કરતો ગયો.

મારફત દબાણ મોટા ક્ષેત્રફળના પિસ્ટન પર લાગે છે. આથી પિસ્ટન પર મોટું બળ લાગે છે અને તે નીચે તરફ ધકેલાઈને બ્રેક શુઝને વિસ્તારિત કરે છે જે બ્રેક લાઈનિંગ પર બળ લગાડે છે.

આ રીતે પૅડલ પર લગાડેલ નાનું બળ પૈડાં પર મોટું ગતિ-વિરોધક બળ લગાડે છે. આ તંત્રનો એક મુખ્ય ફાયદો એ છે કે પૅડલને લગાડેલું દબાણ ચાર પૈડાં સાથે જોડાયેલ બધાં નળાકારોમાં સમાન રીતે પ્રસારિત થાય છે અને તેથી બ્રેક લાગવાનો પ્રયત્ન બધાં પૈડાં પર સમાન હોય છે.

10.3 ધારારેખી વહન (STREAMLINE FLOW)

અત્યાર સુધી આપણે સ્થિર તરલોનો અભ્યાસ કર્યો. ગતિ કરતા તરલના અભ્યાસને તરલ ગતિશાસ્ત્ર (Fluid Dynamics) કહે છે. જ્યારે પાણીનો નળ ધીમેથી ખોલવામાં આવે છે ત્યારે શરૂઆતમાં પાણીનો પ્રવાહ સરળ (Smooth) હોય છે પણ બહાર નીકળતા પ્રવાહની ઝડપ વધતાં તે સરળતા ગુમાવી દે છે. તરલની ગતિના અભ્યાસમાં આપેલ સમયે આપેલ બિંદુએ જુદા જુદા તરલ કણોનું શું થાય છે તેના પર આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીશું. જો આપેલ બિંદુએ પસાર થતા દરેક કણનો વેગ સમય સાથે અફર રહેતો હોય, તો તેવા વહનને **સ્થાયી વહન** કહે છે. આનો અર્થ એવો નથી કે જુદાં જુદાં બિંદુ આગળના વેગ સમાન છે. કોઈ એક કણ એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ જાય તેમ તેનો વેગ બદલાઈ શકે છે. એટલે કે, કોઈ બીજા બિંદુએ તેનો વેગ જુદો હોઈ શકે છે પણ બીજા દરેક કણ આ બીજા બિંદુએથી પસાર થાય ત્યારે હમણાં જ પસાર થયેલા અગાઉના કણની જેમ જ વર્તે છે. દરેક કણ એક સરળ માર્ગ અનુસરે છે અને કણના માર્ગો એકબીજાને છેદતા નથી.



આકૃતિ **10.7** *ધારારેખાઓનો અર્થ (a) તરલ કણનો એક લાક્ષણિક ગતિપથ (b) ધારારેખી વહનનો વિસ્તાર*

સ્થાયી વહનમાં તરલ કણનો ગતિપથ **ધારારેખા** છે. તેને એવા વક્ર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે કે જેના કોઈ પણ બિંદુએ સ્પર્શક તે બિંદુ આગળ તરલના વેગની દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 10.7(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ એક કણના ગતિપથનો વિચાર કરો. આ વક્ર કોઈ તરલ કણ સમય સાથે કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે દર્શાવે છે. PQ વક્ર તરલના વહનના એક કાયમી નકશા (Map) જેવો છે, જે તરલ કેવી રીતે વહન પામે છે તે દર્શાવે છે. કોઈ બે ધારારેખાઓ એકબીજીને છેદતી નથી, કારણ કે જો તે છેદે તો તે છેદનબિંદુએ આવતો તરલનો નવો કણ એક પથ પર અથવા બીજા પથ પર જઈ શકે અને વહન સ્થાયી ન હોય. આથી સ્થાયી વહનમાં વહનનો નકશો (માર્ગ/પથ) સમય સાથે સ્થાયી છે. એકબીજાની ખૂબ નજીકની ધારારેખાઓને આપણે કેવી રીતે દર્શાવીએ ? જો આપણે વહન પામતા દરેક કણની ધારારેખા દર્શાવીએ તો તે અસંખ્ય રેખાઓ એકબીજામાં ભળી જઈને સતત બની જાય. તરલ વહનની દિશાને લંબ એવાં સમતલો વિચારો, દા.ત., આકૃતિ 10.7(b)માં ત્રણ બિંદુઓ P, R અને Q આગળ. આ સમતલ-ખંડો એવાં પસંદ કરેલાં છે કે તેમની કિનારીઓ ધારારેખાઓના એક જ સમૂહ વડે નિશ્ચિત કરાય છે. આનો અર્થ એ છે કે P, R અને Q આગળ દર્શાવેલ સપાટીઓને પસાર કરતા તરલ કણની સંખ્યા સમાન સમયમાં એક સમાન છે. આ બિંદુઓ આગળ આડછેદનાં ક્ષેત્રફળ A_P, A_R અને A_Q હોય અને તરલ કણના વેગ υ_P, υ_R અને υ_Q હોય, તો A_P આગળથી સૂક્ષ્મ સમયગાળા Δtમાં પસાર થતા તરલનું દળ Δm_P; $\rho_P A_P \upsilon_P \Delta t$ છે. તે જ રીતે A_R પાસેથી સૂક્ષ્મ સમયગાળા Δtમાં પસાર થતા તરલનું દળ $\rho_R A_R \upsilon_R \Delta t$ અને A_Q આગળથી પસાર થતા તરલનું દળ $\rho_Q A_Q \upsilon_Q \Delta t$ છે. બધા કિસ્સાઓમાં દાખલ થતું અને બહાર નિકળતું દળ સમાન છે. આથી,

$$\rho_P A_P \upsilon_P \Delta t = \rho_R A_R \upsilon_R \Delta t = \rho_Q A_Q \upsilon_Q \Delta t \qquad (10.9)$$

અદબનીય તરલના વહન માટે

$$\rho_P = \rho_R = \rho_Q$$

સમીકરણ (10.9) પરથી,

$$A_P \upsilon_P = A_R \upsilon_R = A_Q \upsilon_Q \qquad (10.10)$$

જેને **સાતત્ય (Continuity) સમીકરણ** કહે છે. તે અદબનીય તરલના વહનમાં દળના સંરક્ષણનું વિધાન છે. વ્યાપક રૂપે,

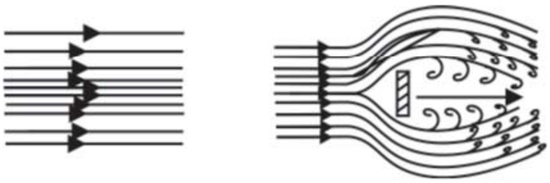
$$A\upsilon = \text{અચળ} \qquad (10.11)$$

$A\upsilon$એ એકમ સમયદીઠ વહન પામતા કદનો જથ્થો(Flux) અથવા વહન દર (Flow Rate) આપે છે અને વહનની સમગ્ર નળીમાં અચળ રહે છે. આમ, વધુ સાંકડા વિભાગો કે જ્યાં ધારારેખાઓ પાસપાસે રહેલી છે ત્યાં આગળ વેગ વધુ હોય છે અને પહોળા વિભાગો કે જ્યાં ધારારેખાઓ પ્રમાણમાં દૂર દૂર છે ત્યાં આગળ વેગ ઓછો છે. આકૃતિ 10.7(b) પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે $A_R > A_Q$ અથવા $\upsilon_R < \upsilon_Q$, R થી Q તરફ પસાર થતાં તરલ પ્રવેગિત થાય છે. આ બાબત સમક્ષિતિજ નળીમાંના તરલ વહનમાં દબાણના તફાવત સાથે સંકળાયેલ છે.

વહનની ઝડપ ઓછી હોય ત્યારે સ્થાયી વહન મળે છે.

ક્રાંતિ ઝડપ તરીકે ઓળખાતા ઝડપના એક સીમાંત મૂલ્ય કરતાં વધુ ઝડપ માટે આ વહન સ્થાયીપણું ગુમાવે છે અને **પ્રક્ષુબ્ધ** (Turbulent) બને છે. જ્યારે વધારે ઝડપી ઝરણાને ખડકનો ભેટો થાય છે ત્યારે ફીણવાળા નાના ઘૂમરી (વમળ) જેવા વિભાગો રચાય છે જેમને દૂધિયા જળના ધરા (White Water Rapids) કહે છે.

આકૃતિ 10.8 કેટલાક વિશિષ્ટ પ્રકારના વહન માટેની ધારારેખાઓ દર્શાવે છે. દાખલા તરીકે આકૃતિ 10.8(a) સ્તરિય વહન દર્શાવે છે કે જેમાં તરલમાં જુદાં જુદાં બિંદુએ વેગનાં માન જુદાં જુદાં હોઈ શકે પણ તેમની દિશાઓ સમાંતર જ છે. આકૃતિ 10.8(b) પ્રક્ષુબ્ધ વહનનું રેખાચિત્ર દર્શાવે છે.



આકૃતિ **10.8** *(a) તરલના વહન માટેની કેટલીક ધારારેખાઓ (b) જોશમાં નીકળતી હવા વહનને લંબરૂપે મૂકેલ સપાટ તકતીને અથડાય છે. આ પ્રક્ષુબ્ધ વહનનું ઉદાહરણ છે.*

10.4 બર્નુલીનો સિદ્ધાંત (BERNOULLI'S PRINCIPLE)

તરલનું વહન એ જટિલ ઘટના છે. પરંતુ આપણે ઊર્જા-સંરક્ષણનો ઉપયોગ કરીને સ્થાયી કે ધારારેખી વહન માટે કેટલાક ઉપયોગી ગુણધર્મો મેળવી શકીએ છીએ.

બદલાતા આડછેદના ક્ષેત્રફળ ધરાવતી નળીમાં વહન કરતા તરલનો વિચાર કરો. આકૃતિ 10.9માં દર્શાવ્યા મુજબ નળીની ઊંચાઈ પણ બદલાતી જાય છે. ધારો કે આ નળીમાંથી એક અદબનીય તરલ સ્થાયી વહન કરે છે. સાતત્યના સમીકરણના પરિણામ સ્વરૂપ તેનો વેગ બદલાવો જોઈએ. આવો પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળની જરૂર છે જે તેની આસપાસના તરલ વડે ઉદ્ભવે છે, જેમાં જુદા જુદા વિભાગોમાં દબાણ જુદા જુદા હોવા જોઈએ. બર્નુલીનું સમીકરણ એ વ્યાપક સમીકરણ છે કે જે નળીમાંનાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના દબાણ તફાવતને, વેગ-તફાવત (ગતિઊર્જામાં ફેરફાર) અને ઊંચાઈ તફાવત (સ્થિતિઊર્જામાં ફેરફાર) બંને સાથે સાંકળે છે. સ્વિસ ભૌતિકવિજ્ઞાની ડેનિયલ બર્નુલીએ આ સંબંધ 1738માં મેળવ્યો હતો.

બે વિસ્તારો 1 (એટલે કે BC) અને 2 (એટલે કે DE) આગળ વહનનો વિચાર કરો. પ્રારંભમાં B અને D વચ્ચેના વિભાગમાં રહેલા તરલનો વિચાર કરો. અત્યંત સૂક્ષ્મ સમયગાળા Δt દરમિયાન આ તરલનું વહન થશે. ધારો કે B આગળ ઝડપ υ_1 અને D આગળ ઝડપ υ_2 છે. પ્રારંભમાં B આગળ રહેલું તરલ $\upsilon_1 \Delta t$ અંતર કાપીને C પર પહોંચે છે. ($\upsilon_1 \Delta t$ એટલું પૂરતા પ્રમાણમાં નાનું છે કે BC સુધીમાં એકસમાન આડછેદ ગણી શકીએ.) એ જ સમયગાળા દરમિયાન પ્રારંભમાં D આગળ રહેલું તરલ $\upsilon_2 \Delta t$ અંતરે E પર પહોંચે છે. આ બે વિભાગો આગળની A_1 અને A_2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતી બે બાજુઓ પર દબાણ અનુક્રમે P_1 અને P_2 આકૃતિ મુજબ લાગે છે. ડાબા (BC) છેડે, તરલ પર થતું કાર્ય $W_1 = P_1 A_1 (\upsilon_1 \ \Delta t) = P_1 \Delta V$ છે. બંને વિભાગોમાંથી એક સમાન કદ ΔV પસાર થતું (સાતત્યના સમીકરણ મુજબ) હોવાથી, બીજા (DE) છેડે તરલ વડે થતું કાર્ય $W_2 = P_2 A_2 (\upsilon_2 \ \Delta t) = P_2 \Delta V$ છે અથવા તરલ પર થતું કાર્ય $-P_2 \Delta V$ છે. આથી તરલ પર થતું કુલ કાર્ય

$$W_1 + W_2 = (P_1 - P_2)\Delta V$$

છે. આ કાર્યનો અમુક ભાગ તરલની ગતિઊર્જામાં ફેરફાર કરવામાં અને બાકીનો ભાગ તરલની ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જામાં ફેરફાર કરવામાં વપરાય છે. જો તરલની ઘનતા ρ હોય અને નળીમાંથી Δt સમયમાં વહન પામતું દળ $\Delta m = \rho A_1 \upsilon_1 \Delta t = \rho \Delta V$ હોય તો ગુરુત્વ સ્થિતિઊર્જામાં ફેરફાર

$\Delta U = \rho g \Delta V \, (h_2 - h_1)$ છે.

તેની ગતિઊર્જામાં ફેરફાર

$\Delta K = \left(\frac{1}{2}\right) \rho \Delta V (\upsilon_2^{\,2} - \upsilon_1^{\,2})$ છે.

આપણે કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય (પ્રકરણ 6) વાપરી શકીએ અને તે પરથી,

$$(P_1 - P_2)\Delta V = \left(\frac{1}{2}\right) \rho \Delta V (\upsilon_2^{\,2} - \upsilon_1^{\,2}) + \rho g \Delta V (h_2 - h_1)$$

દરેક પદને ΔV વડે ભાગતાં,

$$(P_1 - P_2) = \left(\frac{1}{2}\right) \rho (\upsilon_2^{\,2} - \upsilon_1^{\,2}) + \rho g (h_2 - h_1)$$

ડેનિયલ બર્નુલી (1700-1782)

ડેનિયલ બર્નુલી સ્વિસ વૈજ્ઞાનિક અને ગણિતશાસ્ત્રી હતો. જેણે લીઓનાર્ડ ઑઈલર સાથે 10 વખત ગણિતશાસ્ત્ર માટેનું ફ્રેન્ચ ઍકેડેમી પ્રાઇઝ મેળવેલ હતું. તેણે દાક્તરીનો પણ અભ્યાસ કર્યો હતો અને સ્વીટ્ઝલૅન્ડના બેસ્લેમાં શરીરરચના અને વનસ્પતિશાસ્ત્રના અધ્યાપક તરીકે થોડો વખત સેવાઆપી હતી. તેનું સૌથી પ્રખ્યાત કાર્ય હાઇડ્રોડાયનેમિક્સમાં હતું, જે વિષય તેણે એક જ સિદ્ધાંત : ઊર્જાનું સંરક્ષણ પરથી વિકસિત કર્યો હતો. તેના કાર્યમાં કલનશાસ્ત્ર, સંભાવના, કંપન કરતી દોરીનો સિદ્ધાંત અને પ્રયોજિત (Applied) ગણિતશાસ્ત્રનો સમાવેશ થાય છે. તેને ગાણિતિય ભૌતિકવિજ્ઞાનનો સ્થાપક કહે છે.

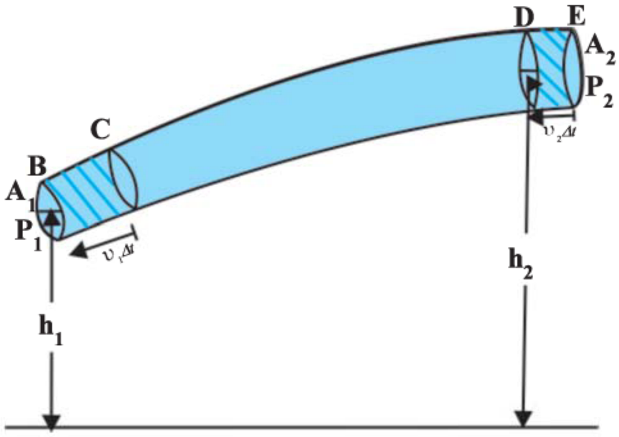
પદોની પુનઃ ગોઠવણી કરતાં,

$$P_1 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho \upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho \upsilon_2^2 + \rho g h_2 \quad (10.12)$$

મળે છે. આ **બર્નુલીનું સમીકરણ** છે. નળીમાં 1 અને 2 કોઈ પણ બે સ્થાનોનો ઉલ્લેખ કરે છે તેથી આપણે વ્યાપકરૂપે આ સમીકરણને

$$P + \left(\frac{1}{2}\right)\rho \upsilon^2 + \rho g h = \text{અચળ} \quad (10.13)$$

તરીકે લખી શકીએ.



આકૃતિ 10.9 *અસમાન આડછેદવાળી નળીમાં આદર્શ તરલનું વહન. Δt સમયમાં $\upsilon_1\Delta t$ લંબાઈના વિભાગમાંનું તરલ $\upsilon_2\Delta t$ લંબાઈના વિભાગમાં જાય છે.*

શબ્દોમાં, બર્નુલીનું સમીકરણ નીચે મુજબ લખી શકાય : આપણે ધારારેખા સાથે જેમ આગળ વધીએ તેમ, દબાણ (P), એકમ કદ દીઠ ગતિઊર્જા $\left(\frac{\rho \upsilon^2}{2}\right)$ અને એકમ કદ દીઠ સ્થિતિઊર્જા ($\rho g h$)નો સરવાળો અચળ રહે છે.

અહીં નોંધો કે, ઊર્જા-સંરક્ષણના સિદ્ધાંતના ઉપયોગમાં આપણે એમ ધારી લીધું છે કે ઘર્ષણને લીધે કોઈ ઊર્જાનો વ્યય થતો નથી. અહીં હકીકત એ છે કે તરલવહનમાં તરલના જુદા જુદા સ્તરો જુદા જુદા વેગથી વહન કરે છે. આ સ્તરો એકબીજા પર ઘર્ષણબળો લગાડતાં હોય છે. જેથી ઊર્જાનો વ્યય થાય છે. તરલના આ ગુણધર્મને શ્યાનતા (Viscosity) કહે છે અને તેની વિગતવાર છણાવટ હજી આગળ આવનારા વિભાગમાં કરેલી છે. તરલે ગુમાવેલી ગતિઊર્જા ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતર પામે છે. આમ બર્નુલીનું સમીકરણ આદર્શ રીતે તો શૂન્ય શ્યાનતા ધરાવતા એટલે કે અશ્યાન (Non-viscous) તરલને લાગુ પડે છે. બર્નુલીનું પ્રમેય લગાડવા માટેનું બીજું એક બંધન એ છે કે તરલ અદબનીય હોવું જોઈએ, કારણ કે તરલની સ્થિતિસ્થાપક (Elastic) ઊર્જાને ધ્યાનમાં લીધેલ નથી. જોકે વ્યવહારમાં તેના ઘણા ઉપયોગો છે અને ઓછી શ્યાનતા ધરાવતાં અદબનીય તરલ માટે ઘણી ઘટનાઓ સમજાવવામાં મદદરૂપ થાય છે. બર્નુલીનું સમીકરણ અસ્થાયી અથવા પ્રક્ષુબ્ધ (Turbulent) વહનને લાગુ પાડી શકાતું નથી કારણ કે તેવા વહનમાં વેગ અને દબાણ સમય સાથે સતત વધઘટ થતા હોય છે.

જ્યારે તરલ સ્થિર હોય છે એટલે કે તેનો વેગ બધે સ્થાને શૂન્ય હોય છે ત્યારે બર્નુલીનું સમીકરણ આવું બને છે.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$

$$(P_1 - P_2) = \rho g (h_2 - h_1)$$

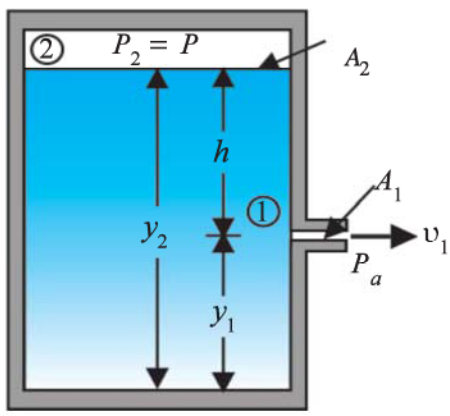
જે સમીકરણ 10.6 મુજબનું જ છે.

10.4.1 બહાર આવતા તરલની ઝડપ

ટૉરિસેલીનો નિયમ (Speed of Efflux : Torricelli's Law) : શબ્દ Effluxનો અર્થ બહાર ધસી આવતું તરલ. ટૉરિસેલીએ એમ શોધ્યું કે ખુલ્લી ટાંકીમાંથી બહાર નીકળતા તરલની ઝડપનું સૂત્ર, કોઈ મુક્ત પતન કરતા પદાર્થની ઝડપના સૂત્ર જેવું જ છે. ρ ઘનતાનું પ્રવાહી ધરાવતી ટાંકીનો વિચાર કરો જેની એક બાજુએ તળિયાથી y_1 ઊંચાઈ પર એક છિદ્ર છે. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) તળિયાથી y_2 ઊંચાઈએ પ્રવાહીની સપાટીની ઉપર રહેલી હવા P દબાણે છે. સાતત્યના સમીકરણ પરથી,

$$\upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2$$

$$\upsilon_2 = \frac{A_1}{A_2}\upsilon_1$$



આકૃતિ 10.10 *ટૉરિસેલીનો નિયમ. પાત્રની બાજુમાંથી બહાર નીકળતા પ્રવાહીનો વેગ બર્નુલીના સમીકરણ પરથી મળે છે. જો પાત્ર ટોચના ભાગે વાતાવરણમાં ખુલ્લું હોય તો $\upsilon_1 = \sqrt{2gh}$*

જો ટાંકીના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A_2, છિદ્રના ક્ષેત્રફળ કરતાં ઘણું વધારે ($A_2 >> A_1$) હોય, તો આપણે ટોચ પર તરલને લગભગ સ્થિર ગણી શકીએ, એટલે કે $\upsilon_2 = 0$. હવે બર્નુલીનું સમીકરણ 1 અને 2 બિંદુઓએ લગાડતાં અને P_1 = વાતાવરણનું દબાણ P_a છે તેમ નોંધીને સમીકરણ (10.12) પરથી,

$$P_a + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho\, g\, y_1 = P + \rho\, g\, y_2$$

$y_2 - y_1 = h$ લખતાં,

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\,h + \frac{2(P-P_a)}{\rho}} \qquad (10.14)$$

મળે. જ્યારે $P >> P_a$ હોય અને 2 ghને અવગણી શકાય ત્યારે ટાંકીમાંથી બહાર ધસી આવતા પ્રવાહીની ઝડપ, પાત્રમાંના દબાણ દ્વારા નક્કી થાય છે. આવી સ્થિતિ રૉકેટમાં હોય છે. બીજી બાજુ, જો ટાંકી વાતાવરણમાં ખુલ્લી હોય, તો $P = P_a$ અને

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} \qquad (10.15)$$

આ મુક્ત પતન કરતા પદાર્થની ઝડપનું જ સૂત્ર છે. સમીકરણ (10.15)ને **ટૉરિસેલીનો નિયમ** કહે છે.

10.4.2 વેન્ચુરિમીટર (Venturi-meter)

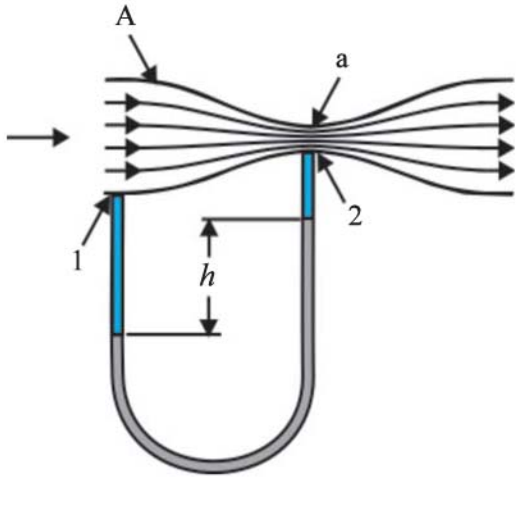
વેન્ચુરિમીટર એ અદબનીય તરલના વહનની ઝડપ માપવાની રચના છે. તે પહોળો વ્યાસ ધરાવતી અને મધ્યમાં સંકોચાયેલી એવી એક નળીનું બનેલું છે. (આકૃતિ 10.11) તેની સાથે એક યુ-ટ્યૂબના આકારનું મૅનોમીટર જોડેલું છે. જેનો એક ભુજ પહોળા વિભાગ અને બીજો ભુજ સાંકડા મધ્ય ભાગ સાથે આકૃતિ 10.11 મુજબ જોડેલ છે. મૅનોમીટરમાં ρ_m ઘનતાવાળું પ્રવાહી છે. A ક્ષેત્રફળ ધરાવતા પહોળા વિભાગ આગળ નળીમાંથી વહન પામતા પ્રવાહીની ઝડપ υ_1 માપવાની છે. સાતત્યના સમીકરણ (10.10) મુજબ મધ્યમાંના સાંકડા વિભાગમાં ઝડપ $\upsilon_2 = \frac{A}{a}\upsilon_1$ છે. બર્નુલીના સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\,(A/a)^2$$

આથી,

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\,\rho\upsilon_1^2\,\left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right] \qquad (10.16)$$

આ દબાણ તફાવતને લીધે યુ-ટ્યૂબના સાંકડા ભાગ સાથે જોડેલ ભુજમાં પ્રવાહી બીજા ભુજ કરતા ઊંચે ચઢે છે. ઊંચાઈ-તફાવત h પરથી દબાણ-તફાવત મળે છે.



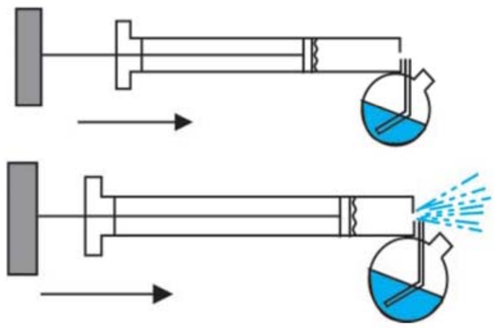
આકૃતિ 10.11 વેન્ચુરિમીટરની રેખાકૃતિ

$$P_1 - P_2 = \rho_m gh = \frac{1}{2}\,\rho\upsilon_1^2\left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right]$$

આથી પહોળા વિભાગ આગળ તરલના વહનની ઝડપ,

$$\upsilon_1 = \sqrt{\left(\frac{2\rho_m gh}{\rho}\right)}\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} \qquad (10.17)$$

આ વેન્ચુરિમીટરની પાછળ રહેલા સિદ્ધાંતના ઘણા ઉપયોગ છે. ઑટોમોબાઇલના કાર્બ્યુરેટરમાં એક વેન્ચુરી ચેનલ (નૉઝલ-Nozzle) હોય છે, જેમાં થઈને હવા વધારે ઝડપથી વહન પામે છે. સાંકડા વિભાગ આગળ દબાણ ઘટી જાય છે અને પેટ્રોલ (ગૅસોલીન) ચેમ્બરમાં ચુસાઈને (ખેંચાઈને) આવે છે જેથી દહન માટે જરૂરી હવા અને બળતણનું યોગ્ય મિશ્રણ પૂરું પાડી શકાય. ફિલ્ટર પંપ કે ઍસ્પીરેટર, બન્સન બર્નર, એટમાઇઝર અને પરફ્યુમ્સ અથવા જંતુનાશકોના છંટકાવ માટેના સ્પ્રેયર્સ (જુઓ આકૃતિ 10.12.) આ જ સિદ્ધાંત પર કાર્ય કરે છે.



આકૃતિ 10.12 સ્પ્રેગન, પિસ્ટન હવાને મોટી ઝડપથી ધકેલે છે. જેનાથી પાત્રના ગળા (Neck) પાસે દબાણ ઘટી જાય છે.

ઉદાહરણ 10.7 લોહીનો વેગ : બેભાન કરેલા એક કૂતરાની મોટી ધમનીમાંથી વહન પામતા લોહીને વેન્ચુરિમીટર મારફતે અન્ય માર્ગે વાળવામાં આવેલ છે. વેન્ચુરિમીટરના પહોળા ભાગનું ક્ષેત્રફળ ધમનીના ક્ષેત્રફળ જેટલું જ A = 8 mm^2 છે. સાંકડા ભાગનું ક્ષેત્રફળ a = 4 mm^2 છે. ધમનીમાં દબાણ ઘટાડો 24 Pa છે. ધમનીમાં વહેતા લોહીની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ કોષ્ટક 10.1માંથી આપણે લોહીની ઘનતા 1.06×10^3 kg m^{-3} લઈએ. ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર $\left(\frac{A}{a}\right) = 2$ છે. સમીકરણ 10.17નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2 \times 24 Pa}{1060 \text{ kg m}^{-3} \times (2^2 - 1)}} = 0.123 \text{ m s}^{-1}$$ ◀

10.4.3 લોહીનું વહન અને હાર્ટઅટૅક (Blood Flow and Heart Attack)

બર્નુલીનો સિદ્ધાંત ધમનીમાં લોહીનું વહન સમજાવવામાં મદદરૂપ છે. ધમની તેની અંદરની દીવાલો પર પ્લાક (એક પ્રકારનો ચીકણો પદાર્થ)ના જમા થવાથી સાંકડી થઈ જાય છે. આ સાંકડા વિભાગમાંથી લોહીને આગળ ધકેલવા માટે હૃદયની ક્રિયાશીલતાની મોટી માંગ ઉદ્ભવે છે. આ સાંકડા વિસ્તારમાંથી લોહીના વહનની ઝડપ વધી જાય છે, જેથી અંદરના ભાગમાં દબાણ ઘટી જાય છે અને બહારના દબાણને લીધે ધમની ખૂબ દબાઈ જવાની (Collapse) શક્યતા છે. હૃદય વધારે દબાણ લગાડી ધમનીને ખોલવાનો પ્રયત્ન કરે છે અને લોહીને બળપૂર્વક ધકેલે છે. જેમ લોહી થોડા ખુલ્લા ભાગમાંથી ધસી જાય છે. તેમ અંદરનું દબાણ ફરી વાર તે જ કારણથી ઘટી જાય છે અને વારંવાર ધમની સંકોચાતી જાય છે. આના પરિણામે હાર્ટઅટૅક આવે છે.

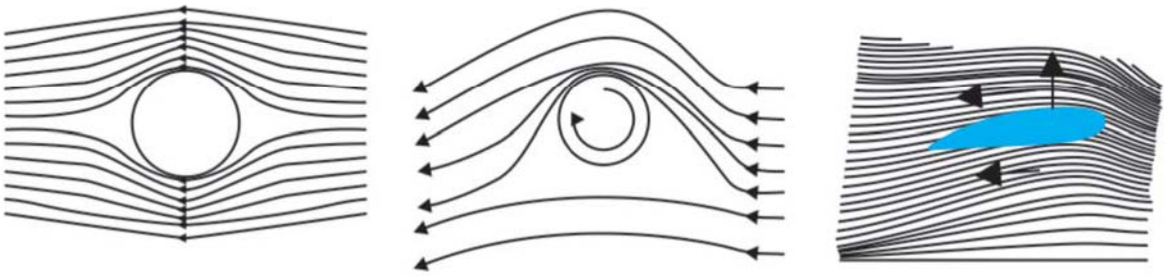
10.4.4 ડાયનેમિક લિફ્ટ (Dynamic Lift)

ડાયનેમિક લિફ્ટ એ વિમાનની પાંખ, હાઈડ્રોફોઈલ અથવા સ્પિનિંગ બૉલ જેવા પદાર્થ પર તરલમાંની તેમની ગતિને લીધે લાગતું બળ છે. ક્રિકેટ, ટેનિસ, બેઈઝબૉલ અથવા ગોલ્ફ જેવી ઘણી રમતોમાં સ્પિન થતો જતો બૉલ હવામાં જેમ આગળ વધે છે તેમ તેના પરવલયાકાર ગતિપથથી વિચલિત થાય છે (Deviates). આ બાબતને બર્નુલીના સિદ્ધાંત પરથી અંશતઃ સમજાવી શકાય છે.

(i) **સ્પિન થયા વિના ગતિ કરતો બૉલ (Ball moving without spin) :** આકૃતિ 10.13(a) તરલની સાપેક્ષે સ્પિન થયા વિના ગતિ કરતા બૉલની આસપાસની ધારારેખાઓ દર્શાવે છે. ધારારેખાઓની સંમિતિ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે, બૉલની ઉપરના અને નીચેનાં અનુરૂપ બિંદુઓ આગળ તરલના (હવાના) વેગ એક સમાન છે, પરિણામે દબાણ-તફાવત શૂન્ય રહે છે. આથી હવા બૉલ પર ઉપર તરફ કે નીચે તરફ કોઈ બળ લગાડતી નથી.

(ii) **સ્પિન થવા સાથે ગતિ કરતો બૉલ (Ball moving with spin) :** સ્પિન થતો બૉલ હવાને તેની સાથે ઘસડે (Drags) છે. જો સપાટી ખરબચડી હોય તો વધુ હવા ઘસડાય છે. આકૃતિ 10.13(b) આગળ ગતિ કરતા અને સાથે સાથે સ્પિન થતા બૉલ માટે હવાની ધારારેખાઓ દર્શાવે છે. બૉલ જેમ આગળ ગતિ કરે છે તેમ તેની સાપેક્ષમાં હવા પાછળ ગતિ કરે છે. આથી બૉલની ઉપરની હવાનો વેગ વધુ અને નીચેની હવાનો વેગ ઓછો છે. આમ ઉપરના ભાગમાં ધારારેખાઓ ગીચ થાય છે અને નીચેના ભાગમાં છૂટી છૂટી (Rarified) હોય છે.

હવાના વેગમાંના આ તફાવતને લીધે બૉલની ઉપર અને નીચેની સપાટીઓ વચ્ચે દબાણ-તફાવત ઉદ્ભવે છે અને તેથી બૉલ પર એક ચોખ્ખું (Net) બળ ઊર્ધ્વદિશામાં લાગે છે. સ્પિન થવાને લીધે ઉદ્ભવતા આ ડાયનેમિક લિફ્ટને **મૅગ્નસ (Magnus) અસર** કહે છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ **10.13** *(a) સ્થિર ગોળાની પાસેથી પસાર થતી તરલની ધારારેખાઓ (b) સમઘડી દિશામાં સ્પિન થતા ગોળાની આસપાસ તરલની ધારારેખાઓ (c) ઍરોફોઈલ પાસેથી પસાર થતી હવા*

ઍરોફોઇલ અથવા વિમાનની પાંખ પર લાગતું ઊર્ધ્વબળ (Aerofoil or Lift on Aircraft Wing) : આકૃતિ 10.13(c)માં એક ઍરોફોઇલ દર્શાવેલ છે. તે એક વિશિષ્ટ આકારનો ઘન પદાર્થ છે જેની હવામાંની સમક્ષિતિજ ગતિને લીધે તેના પર ઊર્ધ્વદિશામાં બળ લાગે છે. વિમાનની પાંખોનો આડછેદ આકૃતિ 10.13(c)માં દર્શાવેલ, ઍરોફોઇલના જેવો લગભગ દેખાય છે. તેની આસપાસની ધારારેખાઓ પણ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. જ્યારે ઍરોફોઇલ પવનની સામે ગતિ કરે છે ત્યારે વહનની દિશાની સાપેક્ષે પાંખનું નમન (Orientation), પાંખની ઉપરના ભાગની ધારારેખાઓને નીચેના ભાગની ધારારેખાઓ કરતાં વધારે ગીચ બનાવે છે. ઉપરના ભાગમાં વહનની ઝડપ નીચેના ભાગમાંના વહનની ઝડપ કરતાં વધુ હોય છે. આથી પાંખો પર ઊર્ધ્વદિશામાં બળ લાગે છે અને આ ડાયનેમિક લિફ્ટ વિમાનના વજનને સમતોલે છે. નીચેનું ઉદાહરણ આને રજૂ કરે છે :

▶ *ઉદાહરણ 10.8* એક આખા ભરેલા બોઇંગ વિમાનનું દળ 3.3×10^5 kg છે. તેની પાંખોનું કુલ ક્ષેત્રફળ 500 m^2 છે. તે 960 km/hની ઝડપથી સમક્ષિતિજ ઉડ્ડયન કરી રહ્યું છે. (a) પાંખોની નીચે અને ઉપરની સપાટીઓ વચ્ચેનો દબાણ-તફાવત શોધો. (b) પાંખની નીચેની સપાટીની સાપેક્ષે ઉપરની સપાટી પરની હવાની ઝડપનો આંશિક (Fractional) વધારો કેટલો હશે ? (હવાની ઘનતા $\rho = 1.2$ kg m^{-3} છે.)

ઉકેલ (a) બોઇંગ વિમાનનું વજન, દબાણ-તફાવતને લીધે લાગતા ઊર્ધ્વ બળ વડે સમતોલાય છે.

$\Delta P \times A = 3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}$

$\Delta P = (3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}) / 500 \text{ m}^2$

$= 6.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$

(b) સમીકરણ 10.12માં આપણે ઉપર અને નીચેની બાજુઓ વચ્ચેનો અલ્પ ઊંચાઈ તફાવત અવગણીએ છીએ. હવે તેમની વચ્ચેનો દબાણ-તફાવત

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

જ્યાં υ_2 ઉપલી સપાટીની ઉપરની હવાની ઝડપ છે અને υ_1 નીચલી સપાટીની નીચેની હવાની ઝડપ છે :

$$(\upsilon_2 - \upsilon_1) = \frac{2\Delta P}{\rho(\upsilon_2 + \upsilon_1)}$$

સરેરાશ ઝડપ

$\upsilon_{av} = (\upsilon_2 + \upsilon_1)/2 = 960$ km/h $= 267$ m s^{-1} લેતાં,

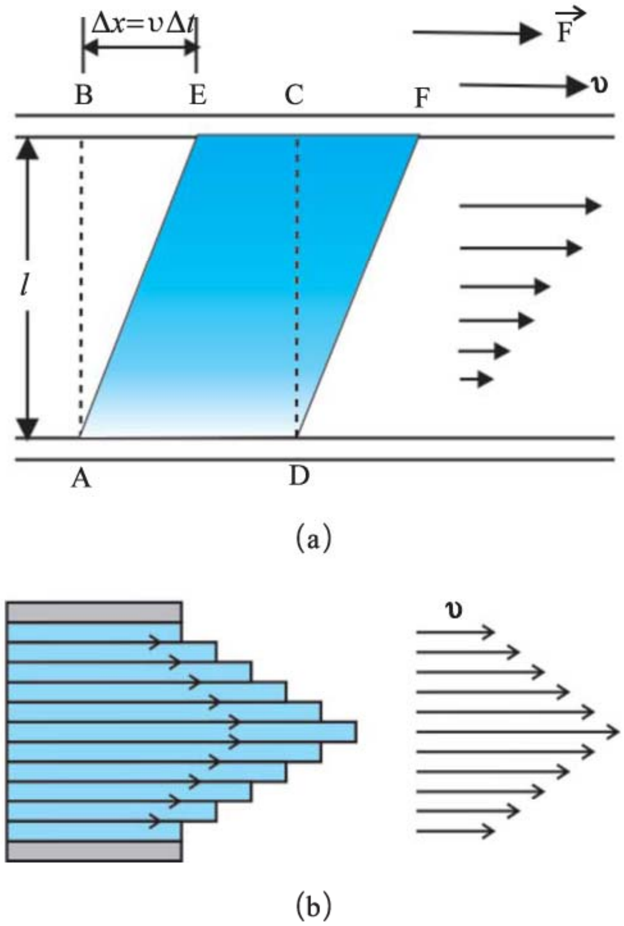
$$(\upsilon_2 - \upsilon_1)/\upsilon_{av} = \frac{\Delta P}{\rho \upsilon_{av}^2} \approx 0.08$$

પાંખની ઉપરની હવાની ઝડપ નીચેની હવાની ઝડપ કરતાં ફક્ત 8 % વધુ હોવી જરૂરી છે. ◀

10.5 શ્યાનતા (સ્નિગ્ધતા) (VISCOSITY)

મોટા ભાગનાં તરલ આદર્શ હોતા નથી અને ગતિને કંઈક અવરોધ લગાડે છે. તરલની ગતિને લાગતો આ અવરોધ એક ઘન પદાર્થ કોઈ સપાટી પર ગતિ કરે ત્યારે લાગતા આંતરિક ઘર્ષણના જેવો છે. તેને શ્યાનતા કહે છે. જ્યારે પ્રવાહીના સ્તરો વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ થતી હોય ત્યારે આ બળ લાગે છે. આકૃતિ 10.14(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ આપણે કાચની બે પ્લેટ વચ્ચે રાખેલા તેલ જેવા તરલનો વિચાર કરીએ. નીચેની પ્લેટ સ્થિર (જકડેલી) છે અને ઉપરની પ્લેટ નીચેની પ્લેટની સાપેક્ષે $\mathbf{v}$ જેટલા અચળ વેગથી ગતિ કરે છે. જો તેલને સ્થાને મધ મૂકીએ તો પ્લેટને તેટલા જ વેગથી ગતિ કરાવવા માટે વધુ મોટા બળની જરૂર પડે છે. આથી તેલ કરતાં મધ વધુ શ્યાન (Viscous) છે તેમ આપણે કહીએ છીએ. કોઈ સપાટીના સંપર્કમાં રહેલા તરલને તે સપાટીના વેગ જેટલો જ વેગ હોય છે. આથી પ્રવાહીનું જે સ્તર ઉપરની સપાટી સાથે સંપર્કમાં છે. તે $\mathbf{v}$ જેટલા વેગથી ગતિ કરે છે અને જે સ્તર સ્થિર પ્લેટ સાથે સંપર્કમાં છે તે સ્થિર છે. જુદા જુદા સ્તરોના વેગ, તળિયે (શૂન્ય વેગ)થી ઉપરના સ્તર (વેગ $\mathbf{v}$) સુધી નિયમિત રીતે વધતા જાય છે. પ્રવાહીના કોઈ પણ સ્તરને ઉપરનું સ્તર આગળ ખેંચે છે અને નીચેનું સ્તર પાછળ ખેંચે છે. આના પરિણામે સ્તરો વચ્ચે બળ લાગે છે. આ પ્રકારના વહનને સ્તરિય વહન કહે છે. કોઈ પુસ્તકને સપાટ ટેબલ પર મૂકીને તેના ઉપરના પૂંઠાને સમક્ષિતિજ બળ લગાડીએ ત્યારે પુસ્તકનાં પાનાઓ જેમ સરકે છે તેમ પ્રવાહીના સ્તરો એકબીજા પર સરકતા હોય છે. જ્યારે તરલ કોઈ નળીમાં વહન કરે છે ત્યારે અક્ષ પરના પ્રવાહી સ્તરનો વેગ મહત્તમ હોય છે અને આપણે જેમ દીવાલ તરફ જઈએ તેમ ક્રમશઃ ઘટે છે અને દીવાલ પર શૂન્ય બને છે, આકૃતિ 10.14(b). નળીમાંની નળાકાર સપાટી પર વેગ અચળ છે.

આ ગતિને લીધે કોઈ એક ક્ષણે ABCD આકારમાં રહેલું પ્રવાહી Δt જેટલા સૂક્ષ્મ સમયગાળા બાદ AEFD આકાર ધારણ કરે છે. આ સમય દરમિયાન પ્રવાહીએ $\Delta x/l$ જેટલી

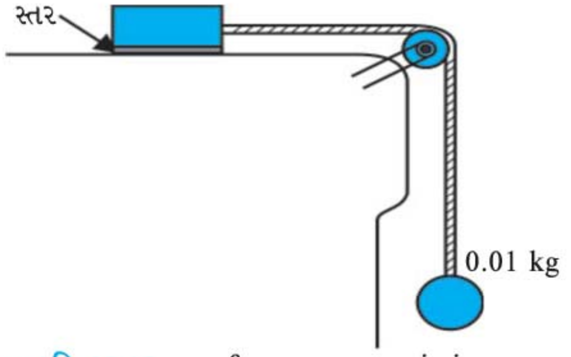


આકૃતિ 10.14 *(a) પ્રવાહીનું સ્તર જે કાચની બે સમાંતર પ્લેટ વચ્ચે રહેલું છે. નીચેની પ્લેટ સ્થિર અને ઉપરની પ્લેટ જમણી તરફ υ વેગથી ગતિ કરે છે. (b) નળીમાં શ્યાન વહન માટે વેગ વિતરણ*

આકાર વિકૃતિ (Shearing Strain) અનુભવી છે. વહન પામતા પ્રવાહીમાં વિકૃતિ સમય સાથે સતત વધતી જાય છે. ઘન પદાર્થથી અલગ બાબત એ છે કે, અહીં પ્રાયોગિક રીતે પ્રતિબળ વિકૃતિને બદલે 'વિકૃતિના ફેરફારના દર' અથવા 'વિકૃતિના દર' એટલે કે $\Delta x/(l\ \Delta t)$ અથવા υ/l પર આધાર રાખતું જણાયું છે. તરલ માટે શ્યાનતા ગુણાંક η (ઉચ્ચારણ : ઈટા)ને આકાર પ્રતિબળ અને વિકૃતિ દરના ગુણોત્તર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\eta = \frac{F/A}{\upsilon/l} = \frac{Fl}{\upsilon A} \qquad (10.18)$$

શ્યાનતા ગુણાંકનો SI એકમ પૉઈસિલ (Pl) છે. તેના બીજા એકમ N s m^{-2} અથવા Pa s છે. શ્યાનતા ગુણાંકના પરિમાણ $[ML^{-1}T^{-1}]$ છે. સામાન્ય રીતે પાણી, આલ્કોહૉલ વગેરે જેવાં પાતળા પ્રવાહીની શ્યાનતા ડામર (Coal tar), લોહી, ગ્લિસરિન જેવા જાડા પ્રવાહી કરતાં ઓછી હોય છે. લોહી અને પાણી અંગેની બે બાબતો અત્રે દર્શાવીએ છીએ, જે તમને કદાચ રસપ્રદ લાગે. કોષ્ટક 10.2 દર્શાવે છે કે લોહી, પાણી કરતા વધારે જાડું (વધારે શ્યાન) છે. વધારામાં લોહીની સાપેક્ષ શ્યાનતા (η/η_{water})O °C અને 37 °Cની વચ્ચે અચળ રહે છે.



આકૃતિ 10.15 *પ્રવાહીના શ્યાનતા ગુણાંકનું માપન*

પ્રવાહીની શ્યાનતા તાપમાન સાથે ઘટે છે જ્યારે વાયુઓની શ્યાનતા તાપમાન સાથે વધે છે.

> ***ઉદાહરણ 10.9*** આકૃતિ 10.15માં દર્શાવ્યા મુજબ 0.10 m^2 ક્ષેત્રફળનો ધાતુનો એક બ્લૉક એક આદર્શ ગરગડી પરથી પસાર થતી દોરી (દળરહિત અને ઘર્ષણરહિત ધારો) મારફતે 0.010 kg દળ સાથે જોડેલ છે. પ્રવાહીનું 0.3 mm જાડાઈ ધરાવતું સ્તર બ્લૉક અને કોષ્ટક વચ્ચે રાખેલ છે. બ્લૉકને ગતિ કરવા દઈએ ત્યારે 0.085 m s^{-1}ની અચળ ઝડપથી જમણી તરફ ગતિ કરે છે. પ્રવાહીનો શ્યાનતા ગુણાંક શોધો.

ઉકેલ ધાતુનો બ્લૉક દોરીમાંના તણાવને લીધે જમણી તરફ ગતિ કરે છે. તણાવ *T*નું માન લટકાવેલ દળ mના વજન જેટલું છે. આમ, આકાર વિકૃતિ કરનારું બળ $F = T = mg$ $= 0.010\ kg \times 9.8\ m\ s^{-2} = 9.8 \times 10^{-2}$ N

$$\text{તરલ પરનું આકાર પ્રતિબળ} = F/A = \frac{9.8\times10^{-2}}{0.10}\ \frac{N}{m^2}$$

$$\text{વિકૃતિ દર} = \frac{\upsilon}{l} = \frac{0.085}{0.3\times10^{-3}}\ \frac{m\ s^{-1}}{m}$$

$$\eta = \frac{\text{પ્રતિબળ}}{\text{વિકૃતિ દર}}$$

$$= \frac{(9.8\times10^{-2} N)(0.30\times10^{-3} m)}{(0.085 m\ s^{-1})(0.10 m^2)}$$

$$= 3.46 \times 10^{-3}\ \text{Pa s}$$

કોષ્ટક 10.2 કેટલાંક તરલોની શ્યાનતા

તરલ	T(°C)	શ્યાનતા (mPl)
પાણી	20	1.0
	100	0.3
લોહી	37	2.7
મશીન ઑઇલ	16	113
	38	34
ગ્લિસરિન	20	830
મધ		200
હવા	0	0.017
	40	0.019

10.5.1 સ્ટૉક્સનો નિયમ (Stokes' Law) : જ્યારે કોઈ પદાર્થનું તરલમાં પતન થાય છે ત્યારે તેના સંપર્કમાં રહેલા તરલના સ્તરને પોતાની સાથે ઘસડે છે. તરલના જુદા જુદા સ્તરો વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ ઉદ્‌ભવે છે અને પરિણામે પદાર્થ ગતિ-અવરોધક બળનો અનુભવ કરે છે. વરસાદના ટીપાનું પડવું અને લોલકના ગોળાનાં દોલનો આવી ગતિનાં કેટલાંક સામાન્ય ઉદાહરણો છે. એવું જણાય છે કે શ્યાનતા બળ પદાર્થના વેગના સમપ્રમાણમાં અને ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે. બીજી જે રાશિઓ પર આ બળ F આધાર રાખે છે તે તરલની શ્યાનતા η અને ગોળાની ત્રિજ્યા a છે. ઇંગ્લિશ વિજ્ઞાની સર જ્યોર્જ જી. સ્ટૉક્સ (1819-1903) એ સ્પષ્ટપણે જણાવ્યું કે શ્યાનતા બળ F

$$F = 6\,\pi\,\eta\,a\,\upsilon \qquad (10.19)$$

સૂત્ર પરથી મળે છે. આને સ્ટૉક્સનો નિયમ કહે છે. આપણે સ્ટૉક્સના નિયમને સાધિત કરીશું નહિ.

આ નિયમ ગતિ-વિરોધક બળ એ વેગના સમપ્રમાણમાં હોય તેનું એક રસપ્રદ ઉદાહરણ છે. શ્યાન માધ્યમમાં થઈને પતન પામતા પદાર્થ પર તેનાં પરિણામોનો આપણે અભ્યાસ કરીશું. વરસાદનું એક ટીપું હવામાં પતન પામે તેનો વિચાર કરીએ. પ્રારંભમાં તે ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે પ્રવેગિત થાય છે. જેમ વેગ વધે છે તેમ ગતિ-વિરોધક બળ વધતું જાય છે. અંતે જ્યારે શ્યાનતા બળ વત્તા ઉત્પ્લાવક બળ (Buoyant Force) ગુરુત્વને લીધે લાગતા બળ જેટલું બને ત્યારે ચોખ્ખું (Net) બળ શૂન્ય બને છે અને પ્રવેગ પણ શૂન્ય બને છે. વરસાદનું ટીપું (ગોળો) ત્યાર બાદ અચળ વેગથી નીચે ઊતરે છે. આમ, સંતુલનમાં આ અંતિમ (Terminal) વેગ υ_t નીચેના સમીકરણ પરથી મળે છે :

$$6\pi\eta a\upsilon_t = \frac{4}{3}\pi\, a^3(\rho - \sigma)g$$

જ્યાં ρ અને σ એ અનુક્રમે ગોળાની અને તરલની દળ ઘનતા છે. આ પરથી આપણને,

$$\upsilon_t = \frac{2}{9}\frac{a^2 g}{\eta}(\rho - \sigma) \qquad (10.20)$$

મળે છે. આથી અંતિમ વેગ υ_t, ગોળાની ત્રિજ્યાના વર્ગના સમપ્રમાણમાં અને માધ્યમની શ્યાનતાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

આ સંદર્ભમાં તમને ફરીથી કદાચ ઉદાહરણ 6.2 જોઈ જવું ગમશે.

▶ *ઉદાહરણ 10.10* એક ટાંકીમાં 20 °C તાપમાને ભરેલા તેલમાં થઈને પતન પામતા 2.0 mm ત્રિજ્યાના એક કૉપર બૉલનો અંતિમ વેગ 6.5 cm s^{-1} છે. 20 °C તાપમાને તેલની શ્યાનતા ગણો. તેલની ઘનતા 1.5×10^3 kg m^{-3} છે, તાંબાની ઘનતા 8.9×10^3 kg m^{-3} છે.

ઉકેલ અહીં, $\upsilon_t = 6.5 \times 10^{-2}$ m s^{-1}, $a = 2 \times 10^{-3}$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\rho = 8.9 \times 10^3$ kg m^{-3}

$\sigma = 1.5 \times 10^3$ kg m^{-3}

સમીકરણ 10.20 પરથી,

$$\eta = \frac{2}{9} \times \frac{(2\times10^{-3})^2 m^2 \times 9.8\ m s^{-2}}{6.5\times10^{-2}\ m s^{-1}} \times 7.4\times10^3 kg\, m^{-3}$$

$$= 9.9 \times 10^{-1} kg\ m^{-1}\ s^{-1}$$ ◀

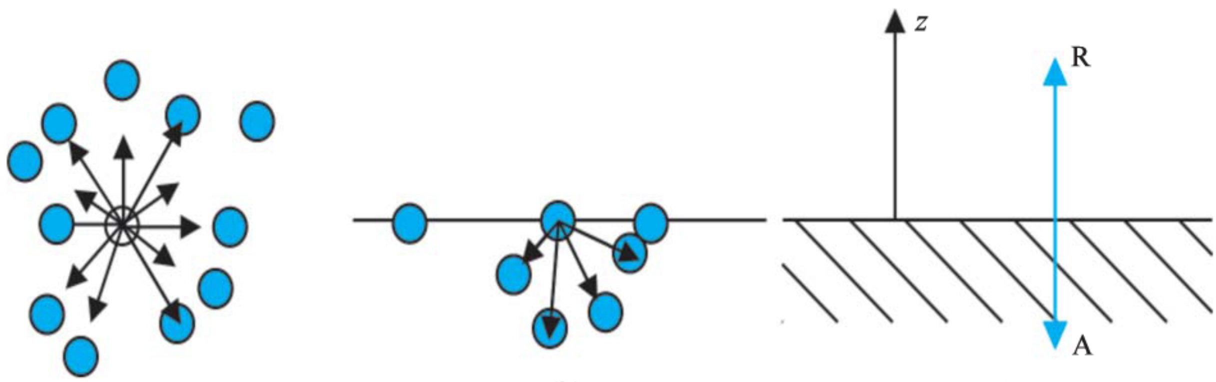
10.6 પૃષ્ઠતાણ (SURFACE TENSION)

તમે કદાચ નોંધ્યું હશે કે તેલ અને પાણી ભળતાં નથી, પાણી આપણને ભીંજવે છે પણ બતકને ભીંજવતું નથી, પારો કાચને ભીંજવતો નથી પણ પાણી કાચને ચોંટીને રહે છે, ગુરુત્વ હોવા છતાં તેલ સુતરની વાટ પર ગુરુત્વથી વિરુદ્ધ ઊંચે ચઢે છે, પોષકરસ અને પાણી વૃક્ષનાં પાંદડાંઓની ટોચ સુધી ઊંચે ચડે છે, રંગવાના બ્રશના તાર જ્યારે સૂકા હોય કે પાણીમાં ડૂબેલા હોય ત્યારે એકબીજાને ચીટકીને રહેતા નથી પણ બહાર કાઢતાં તીક્ષ્ણ ટોચ બનાવે છે. આ બધા અને આવા બીજા ઘણા અનુભવો પ્રવાહીઓની મુક્ત સપાટીઓ સાથે સંબંધ ધરાવે છે. પ્રવાહીઓને કોઈ ચોક્કસ આકાર હોતો નથી પણ નિશ્ચિત કદ હોય છે તેથી જ્યારે તેમને પાત્રમાં રેડવામાં આવે ત્યારે એક મુક્ત સપાટી પ્રાપ્ત કરે છે. આ સપાટીઓ કેટલીક વધારાની ઊર્જા ધરાવે છે. આ ઘટનાને પૃષ્ઠતાણ કહે છે અને તે માત્ર પ્રવાહીને જ હોય છે કારણ કે વાયુઓને મુક્ત સપાટીઓ હોતી નથી. આપણે હવે આ ઘટના સમજીએ.

10.6.1 પૃષ્ઠઊર્જા (Surface Energy)

પ્રવાહીના અણુઓ વચ્ચેના આકર્ષણને લીધે પ્રવાહી એક સાથે રહે છે. પ્રવાહીની ઠીક ઠીક અંદરના ભાગમાં રહેલા કોઈ અણુનો વિચાર કરો. અણુઓ વચ્ચેનાં અંતરો એવાં છે કે તે આસપાસના બધા અણુઓ વડે આકર્ષાય છે [આકૃતિ 10.16 (a)]. આ આકર્ષણના પરિણામ સ્વરૂપે અણુને ઋણ સ્થિતિઊર્જા હોય છે, જે પસંદ કરેલા અણુની આસપાસ અણુઓની સંખ્યા અને વિતરણ પર આધાર રાખે છે. પરંતુ બધા અણુઓની સરેરાશ સ્થિતિઊર્જા એક સમાન હોય છે. એ હકીકત આ બાબતની પુષ્ટિ કરે છે કે આવા અણુઓનો લાવવા જરૂરી ઊર્જા કેટલી હશે ? ઉપર જણાવ્યું તેમ પ્રવાહીમાંથી તેને સંપૂર્ણ દૂર કરવા માટે જરૂરી ઊર્જા કરતા લગભગ અડધી એટલે કે બાષ્પાયન ઉષ્મા કરતાં અડધી હોય છે.

અંતે તો પૃષ્ઠ શું છે ? પ્રવાહીના અણુઓ આમતેમ ફરતા હોતા હોવાથી કોઈ સંપૂર્ણપણે તીક્ષ્ણ (sharp) સપાટી હોઈ શકે નહિ. આકૃતિ 10.16(c)માં દર્શાવેલ દિશામાં કેટલાક અણુઓના પરિમાણના ક્રમનું અંતર કાપતાં $z = 0$ આગળ પ્રવાહીના અણુઓની સંખ્યાઘનતા ઝડપથી ઘટીને શૂન્ય બને છે.



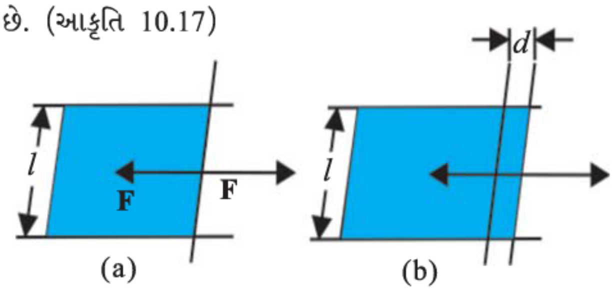
આકૃતિ 10.16 પ્રવાહીમાં સપાટી પર અણુઓની અને બળોના સંતુલનની સંજ્ઞાત્મક આકૃતિ. (a) પ્રવાહીની અંદરનો અણુ. અણુ પર બીજાઓને લીધે લાગતાં બળો દર્શાવ્યાં છે. તીરની દિશા આકર્ષણ કે અપાકર્ષણ દર્શાવે છે. (b) તે જ બાબતો સપાટી પરના અણુ માટે (c) આકર્ષક (A) અને અપાકર્ષક (R) બળોનું સંતુલન

સમૂહ (પ્રવાહી) લઈ, તેમાંના અણુઓને એકબીજાથી ખૂબ દૂર લઈ જઈ વાયુ કે બાષ્પ કરવા માટે જરૂરી બાષ્પાયન ઉષ્મા ઘણી વધારે હોય છે. પાણી માટે તે 40 kJ/molના ક્રમની છે.

હવે, આપણે સપાટીની નજીકના અણુનો વિચાર કરીએ, આકૃતિ 10.16 (b). તેનો નીચેનો અર્ધો ભાગ પ્રવાહી અણુઓથી ઘેરાયેલો છે. આને લીધે થોડીક ઋણ સ્થિતિઊર્જા હોય છે. પરંતુ સ્વાભાવિક રીતે જ તે જથ્થાની અંદર રહેલા એટલે કે પૂરેપૂરા અંદર રહેલા અણુની સ્થિતિઊર્જા કરતાં ઓછી ઋણ છે; લગભગ તેના કરતાં અડધી હોય છે. આમ પ્રવાહીની સપાટી પરના અણુઓ પાસે અંદરના અણુઓની સરખામણીએ થોડી વધારાની ઊર્જા હોય છે. આમ પ્રવાહી, જેટલે અંશે બાહ્ય પરિસ્થિતિ છૂટ આપે તેટલે અંશે, લઘુતમ પૃષ્ઠ ક્ષેત્રફળ ધરાવવાનું વલણ ધરાવે છે. પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ વધારવા માટે ઊર્જાની જરૂર પડે છે. મોટા ભાગની પૃષ્ઠ ઘટના આ હકીકતના પદમાં સમજી શકાય છે. અણુને સપાટી પર

10.6.2 પૃષ્ઠઊર્જા અને પૃષ્ઠતાણ (Surface Energy and Surface Tension)

આપણે ચર્ચા કરી તે મુજબ પ્રવાહીના પૃષ્ઠ સાથે વધારાની ઊર્જા સંકળાયેલી છે. કદ જેવી બીજી બાબતો અચળ રાખીને વધારે પૃષ્ઠ (સપાટી)ના સર્જન (એટલે કે સપાટીમાં વધારો કરવા) માટે વધારાની ઊર્જાની જરૂર પડે છે. આ સમજવા માટે એક પ્રવાહીની સમક્ષિતિજ કપોટી (film)નો વિચાર કરો, જેના છેડા પરનો તાર સમાંતરબાજુઓ પર સરકવા માટે મુક્ત છે. (આકૃતિ 10.17)



આકૃતિ 10.17 એક કપોટીને ખેંચીને વિસ્તારવી. (a) સંતુલનમાં રહેલી કપોટી (b) કપોટીને થોડા વધારાના અંતર સુધી ખેંચેલી છે.

ધારો કે આપણે આકૃતિ મુજબ તારને થોડાક અંતર d સુધી ખસેડેલ છે. પૃષ્ઠનું ક્ષેત્રફળ વધતું હોવાથી તંત્ર પાસે હવે વધુ ઊર્જા છે, એટલે કે આંતરિક બળની વિરુદ્ધમાં કંઈક કાર્ય કરવામાં આવ્યું છે. ધારો કે આ આંતરિક બળ F છે. બાહ્ય બળ વડે થતું કાર્ય $\mathbf{F \cdot d}$ = Fd. ઊર્જા-સંરક્ષણ અનુસાર આ કાર્ય વધારાની ઊર્જા તરીકે કપોટીમાં સંગ્રહીત થાય છે. જો એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ કપોટીની પૃષ્ઠઊર્જા S હોય, તો ક્ષેત્રફળનો વધારો $2\,dl$ છે. કપોટીને બે બાજુઓ અને વચ્ચે પ્રવાહી છે આથી બે સપાટી છે અને વધારાની ઊર્જા

$$S(2dl) = Fd \qquad (10.21)$$

અથવા $S = Fd\,/\,(2dl) = F\,/\,2l$ (10.22)

આ રાશિ પૃષ્ઠતાણનું માપ છે. તે પ્રવાહીની આંતરસપાટીના એકમ ક્ષેત્રફળમાં રહેલી પૃષ્ઠઊર્જા જેટલી છે અને તે તરલ વડે તાર પર એકમ લંબાઈ દીઠ લાગતું બળ છે. અત્યાર સુધી આપણે એક પ્રવાહીની સપાટીની વાત કરી છે. વ્યાપક રીતે, આપણે એક તરલ સપાટી, બીજા તરલ કે ઘન સપાટીઓના સંપર્કમાં હોય તેનો વિચાર કરવો જોઈએ, તેવા કિસ્સામાં, પૃષ્ઠતાણ સપાટીની બંને બાજુએ આવેલાં દ્રવ્યો પર આધાર રાખે છે. દાખલા તરીકે, જો દ્રવ્યોનાં અણુઓ એકબીજાને આકર્ષતાં હશે તો પૃષ્ઠઊર્જા ઘટે છે અને જો તેઓ અપાકર્ષતાં હશે તો પૃષ્ઠઊર્જા વધે છે. આમ, વધુ યથાર્થ રીતે તો, પૃષ્ઠઊર્જા એ બે દ્રવ્યો વચ્ચેની આંતરસપાટીની ઊર્જા છે અને તે આ બંને દ્રવ્યો પર આધારિત છે.

ઉપરનામાંથી આપણે નીચેનાં અવલોકનો કરીએ :

(i) પૃષ્ઠતાણ એ પ્રવાહીના સમતલ અને બીજા પદાર્થ વચ્ચેની આંતરસપાટીમાં એકમ લંબાઈ દીઠ લાગતું બળ (અથવા એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ પૃષ્ઠઊર્જા) છે. તે આંતરસપાટી પરના અણુઓ પાસે રહેલી અંતરિયાળ ભાગમાંના અણુઓની સરખામણીએ વધારાની ઊર્જા પણ છે.

(ii) આંતરસપાટીની સીમાઓ સિવાયના કોઈ પણ બિંદુએ આપણે એક રેખા દોરીએ તો રેખાની બંને બાજુએ રેખાને લંબરૂપે, એકમ લંબાઈ દીઠ પૃષ્ઠતાણનાં બળ સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં તેમજ, આંતરસપાટીના સમતલમાં હોય છે. આથી આ રેખા સંતુલનમાં છે. વધુ ચોક્કસ બનવા માટે, સપાટી પર અણુઓ કે પરમાણુઓની એક રેખા કલ્પો. ડાબી બાજુના પરમાણુઓ રેખાને તેમની તરફ અને જમણી બાજુના પરમાણુઓ રેખાને તેમની તરફ ખેંચે છે. આ પરમાણુઓની રેખા તણાવ હેઠળ સંતુલનમાં રહેલી છે. જો આ રેખા આંતરસપાટીના છેડા પર હોય, તો આકૃતિ 10.17 (a) અને (b) મુજબ એકમ લંબાઈ દીઠ બળ S સપાટી પર ફક્ત અંદર તરફ લાગે છે.

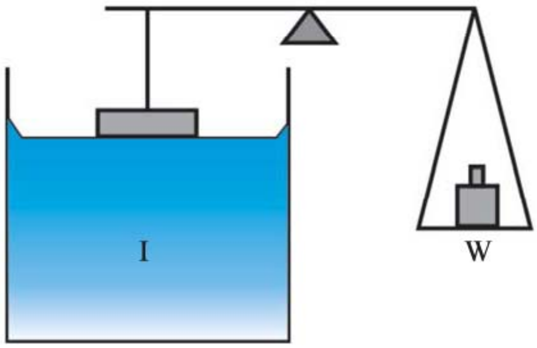
કોષ્ટક 10.3 જુદાં જુદાં પ્રવાહીઓનાં પૃષ્ઠતાણ દર્શાવે છે. પૃષ્ઠતાણનું મૂલ્ય તાપમાન પર આધાર રાખે છે. શ્યાનતાની જેમ પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ તાપમાન સાથે ઘટે છે.

કોષ્ટક 10.3 કેટલાંક પ્રવાહીઓનાં જુદાં જુદાં તાપમાને પૃષ્ઠતાણ તેમની બાષ્પાયન ઉષ્મા સાથે દર્શાવ્યાં છે.

પ્રવાહી	તાપમાન°C	પૃષ્ઠતાણ (N/m)	બાષ્પાયન ઉષ્મા (kJ/mol)
હિલિયમ	-270	0.000239	0.115
ઑક્સિજન	-183	0.0132	7.1
ઈથેનોલ	20	0.0227	40.6
પાણી	20	0.0727	44.16
પારો	20	0.4355	63.2

જો તરલ અને ઘન વચ્ચેની પૃષ્ઠઊર્જા, ઘન-હવા વચ્ચેની અને તરલ-હવા વચ્ચેની પૃષ્ઠઊર્જાના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય, તો તરલ તે ઘન સપાટીને ચીટકીને (ચોંટીને) રહે છે. વળી ઘન સપાટી અને પ્રવાહી વચ્ચે આકર્ષણ છે. તે આકૃતિ 10.18 મુજબ પ્રાયોગિક રીતે માપી શકાય છે. તુલાની એક ભુજા સાથે એક પાત્રમાં રહેલા પ્રવાહીમાં કાચની એક સપાટ તક્તી ઊર્ધ્વ રાખેલ છે.

આ તક્તીની સમક્ષિતિજ ધારને પાણીથી સહેજ ઊંચે રાખી બીજી ભુજામાં મૂકેલા વજન વડે સમતુલિત કરવામાં આવે છે. પાત્રને સહેજ ઊંચે પ્રવાહી કાચની પ્લેટને સહેજ સ્પર્શે અને પૃષ્ઠતાણને લીધે તેને સહેજ નીચે ખેંચે તેટલું લઈ જવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ પ્લેટ પાણીથી છૂટી પડે ત્યાં સુધી વજન ઉમેરવામાં આવે છે.



આકૃતિ **10.18** *પૃષ્ઠતાણ માપવું*

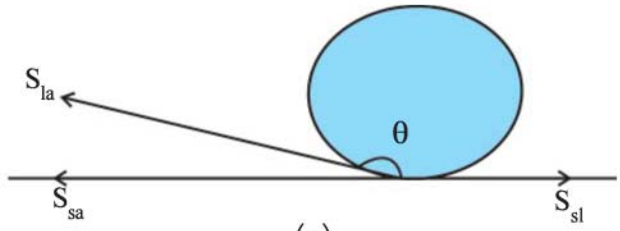
ધારો કે વધારાનું જરૂરી વજન *W* છે. સમીકરણ 10.22 અને ત્યાં કરેલી ચર્ચા પરથી, પ્રવાહી-હવા આંતરસપાટીનું પૃષ્ઠતાણ

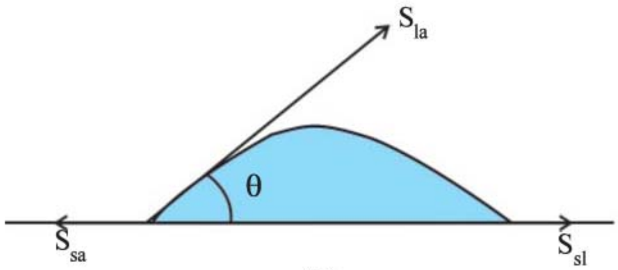
$$S_{la} = (W/2l) = (mg/2l) \qquad (10.23)$$

છે, જ્યાં m = વધારાનું દળ અને *l* પ્લેટની ધારની લંબાઈ છે. અહીં નિમ્નાક્ષર (subscript/(*la*)), એ પ્રવાહી-હવા (liquid-air) આંતરસપાટીના તણાવની વાત થાય છે, એમ દર્શાવે છે.

10.6.3 સંપર્કકોણ (Angle of contact)

પ્રવાહીની સપાટી બીજા માધ્યમ સાથેના સંપર્ક સમતલ આગળ સામાન્ય રીતે વક્ર હોય છે. સંપર્ક બિંદુએ પ્રવાહીની સપાટીને સ્પર્શક અને ઘન સપાટી વચ્ચે પ્રવાહીની અંદરના કોણને સંપર્કકોણ કહે છે. તેને θ વડે દર્શાવાય છે. તે પ્રવાહીઓ અને ઘન પદાર્થોની જુદી જુદી જોડ (pairs)ની આંતરસપાટીઓ આગળ જુદો જુદો હોય છે. પ્રવાહી ઘન સપાટી પર ફેલાઈ જશે (spread) કે તેના પર નાનાં બુંદ (droplets) રચશે તે θના મૂલ્ય દ્વારા નક્કી થાય છે. દાખલા તરીકે પાણી કમળની પાંખડી પર આકૃતિ 10.19 (a)માં દર્શાવ્યા મુજબ નાનાં બુંદ રચે છે જ્યારે આકૃતિ 10.19(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ સ્વચ્છ પ્લાસ્ટિક પ્લેટ પર ફેલાઈ જાય છે.





આકૃતિ **10.19** *આંતરસપાટીઓમાંના તણાવ અને પાણીનાં બુંદ (ટીપાં)નાં જુદા જુદા આકારો (a) કમળની પાંખડી પર (b) સ્વચ્છ પ્લાસ્ટિક પ્લેટ પર*

આકૃતિ 10.19(a) અને (b)માં દર્શાવ્યા મુજબ પ્રવાહી-હવા, ઘન-હવા અને ઘન-પ્રવાહી આંતરસપાટીઓમાંના અનુક્રમે S_{la}, S_{sa} અને S_{sl} વડે દર્શાવેલ ત્રણ પૃષ્ઠતાણોનો વિચાર કરીએ. સંપર્ક રેખા પર ત્રણ માધ્યમો વચ્ચેનાં પૃષ્ઠબળો સંતુલિત થવાં જોઈએ. આકૃતિ 10.19 (b) પરથી નીચેનો સંબંધ સહેલાઈથી મેળવી શકાય :

$$S_{la} \cos\theta + S_{sl} = S_{sa} \qquad (10.24)$$

જો પાણી-પાંખડી આંતરસપાટીના કિસ્સાની જેમ $S_{sl} > S_{sa}$ તો θ ગુરુકોણ ($\theta > 90°$) હોય છે અને પાણી-પ્લાસ્ટિક આંતરસપાટીના કિસ્સાની જેમ $S_{sl} < S_{sa}$ હોય, તો θ લઘુકોણ ($\theta < 90$) હોય છે. જ્યારે θ ગુરુકોણ હોય છે ત્યારે પ્રવાહીના પોતાના અણુઓ એકબીજા સાથે વધુ પ્રબળતાથી આકર્ષાયેલા હોય છે અને ઘનના અણુઓ સાથે નિર્બળ આકર્ષણ ધરાવે છે. આથી પ્રવાહી-ઘન સપાટી રચવા માટે ઘણી વધુ ઊર્જા ખર્ચવી પડે છે અને પ્રવાહી ઘનને ભીંજવતું નથી. મીણવાળી કે તેલવાળી સપાટી પર પાણી માટે આવું જ થાય છે અને પારા માટે કોઈ પણ સપાટી પર આવું થાય છે. બીજી તરફ જો પ્રવાહીના અણુઓ ઘનના અણુઓ પ્રત્યે પ્રબળતાથી

આકર્ષાય છે તો S_{sl} ઘટે છે અને તેથી $\cos\theta$માં વધારો અથવા θમાં ઘટાડો થાય છે. આ કિસ્સામાં θ લઘુકોણ છે. આવું કાચ કે પ્લાસ્ટિક પ્લેટ પર પાણી માટે અને લગભગ કોઈ પણ સપાટી પર કેરોસીન માટે થાય છે (તે ફેલાય છે). સાબુ, ડિટર્જન્ટ્સ અને રંગવાના પદાર્થો ભીંજવતાં (આર્દ્ર) માધ્યમો (Agents) છે. જ્યારે તેમને ઉમેરવામાં આવે છે ત્યારે સંપર્કકોણ નાનો બને છે અને તેઓ વધારે અંદર સુધી ઘૂસી જઈ શકે છે અને અસરકારક બને છે. બીજી તરફ, પાણી અને રેસાઓ વચ્ચે મોટો સંપર્કકોણ રચવા માટે વૉટર પ્રૂફિંગ એજન્ટ ઉમેરવામાં આવે છે.

10.6.4 બુંદ અને પરપોટા (Drops and Bubbles)

પૃષ્ઠતાણનું એક પરિણામ એ છે કે, જો ગુરુત્વાકર્ષણની અસર અવગણી શકાય તેમ હોય તો પ્રવાહીનાં બુંદ અને પરપોટા મુક્ત અવસ્થામાં ગોળાકાર હોય છે. હાઈ-સ્પીડ સ્પ્રે અથવા જેટમાં તમે નાનાં ટીપાં રચાતાં અને બાળપણમાં ઉડાડેલા સાબુના પરપોટા જોયાં હશે. બુંદ અને પરપોટા ગોળાકાર કેમ હોય છે ? સાબુનો પરપોટો કેવી રીતે સ્થાયી (Stable) રહે છે ?

આપણે ઘણી વાર કહ્યું છે તેમ પ્રવાહી-હવા આંતરસપાટીને ઊર્જા હોય છે, આથી આપેલા કદ માટે લઘુતમ ઊર્જા ધરાવતી સપાટીનું ક્ષેત્રફળ લઘુતમ હોય છે. ગોળાને આ ગુણધર્મ હોય છે. જોકે તે આ પુસ્તકની મર્યાદાની બહાર છે પણ તમે એ ચકાસી શકો છો કે ઓછામાં ઓછું આ બાબતમાં ગોળો ઘન કરતાં વધુ સારો છે. આથી જો ગુરુત્વ અને બીજાં બળો (દાખલા તરીકે હવાનો અવરોધ) બિનઅસરકારક હોય, તો પ્રવાહીનાં બુંદ ગોળાકાર હોય છે.

પૃષ્ઠતાણનું બીજું એક રસપ્રદ પરિણામ એ છે કે ગોળાકાર બુંદની અંદરનું દબાણ બહારના દબાણ કરતાં વધુ હોય છે (આકૃતિ 10.20). ધારો કે r ત્રિજ્યાનું એક ગોળાકાર બુંદ સંતુલનમાં છે. તેની ત્રિજ્યામાં Δr જેટલો વધારો કરીએ તો વધારાની પૃષ્ઠઊર્જા

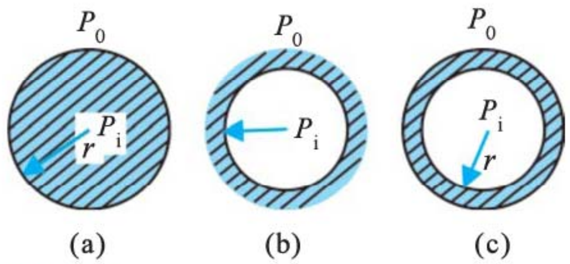
$[4\pi(r+\Delta r)^2 - 4\pi r^2]S_{la} = 8\pi r\,\Delta r\,S_{la}$ હોય. (10.25)

જો આ બુંદ સંતુલનમાં હોય તો ખર્ચવી પડતી આ ઊર્જા, બુંદના અંદરના અને બહારના દબાણ-તફાવત $(P_i - P_0)$ ની અસર હેઠળ વિસ્તરણમાં પ્રાપ્ત ઊર્જા જેટલી થવી જોઈએ. આ વિસ્તરણમાં થતું કાર્ય

$$W = (P_i - P_0)\,4\pi r^2\,\Delta r \quad (10.26)$$

આથી, $(P_i - P_0) = (2\,S_{la}/r)$ (10.27)

વ્યાપક રીતે, પ્રવાહી-વાયુ આંતરસપાટી માટે બહિર્ગોળ બાજુએથી થતા દબાણ કરતાં, અંતર્ગોળ બાજુએથી થતું દબાણ વધુ હોય છે. દાખલા તરીકે પ્રવાહીમાં રહેલા હવાના પરપોટાની અંદરનું દબાણ વધુ હોય છે. જુઓ આકૃતિ 10.20(b).



આકૃતિ 10.20 *r ત્રિજ્યાના બુંદ, બખોલ (Cavity) અને પરપોટો (બખોલનું ઉદાહરણ પ્રવાહીની અંદર રચાયેલો પરપોટો)*

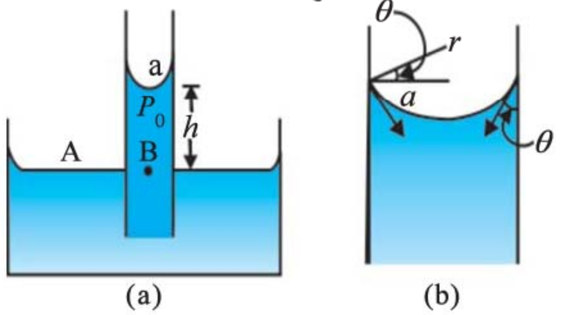
પરપોટો (આકૃતિ 10.20(c)) એ બુંદ અને કેવીટીથી જુદો પડે છે, તેને બે આંતરસપાટી હોય છે. ઉપરનો તર્ક લાગુ પાડતાં આપણને પરપોટા માટે

$(P_i - P_0) = (4\,S_{la}/r)$ મળે છે. (10.28)

આને લીધે સાબુનો પરપોટો રચવા માટે તમારે જોરથી ફૂંક મારવી પડે, પણ બહુ જોરથી નહિ. અંદરના ભાગમાં હવાનું દબાણ થોડું વધારે જરૂરી છે.

10.6.5 કેશનળીમાં પ્રવાહીનું ઊંચે ચઢવું (Capillary Rise)

પ્રવાહી-હવાની વક્ર આંતરસપાટીની અંદર અને બહારના દબાણ-તફાવતનું એક પરિણામ એ બહુ જાણીતી અસર છે કે પાણી સાંકડી નળીમાંથી ગુરુત્વાકર્ષણની વિરુદ્ધમાં પણ ઊંચે ચઢે છે. Capilla શબ્દનો લેટિનમાં અર્થ વાળ છે, જો નળી વાળ જેટલી પાતળી (સાંકડી) હોય, તો પ્રવાહી વધારે ઊંચે ચઢે છે. આ જોવા માટે, વર્તુળાકાર આડછેદ ધરાવતી



આકૃતિ 10.21 *કેશનળીમાં પ્રવાહી ઊંચે ચઢે છે. (a) પાણીમાં ડુબાડેલ છેડાવાળી કેશનળીનું રેખાચિત્ર (b) આંતરસપાટી આગળનું વિવર્ધિત કરેલ ચિત્ર*

ઊર્ધ્વ કેશનળી (ત્રિજ્યા a)ને પાણીભરેલા ખુલ્લા પાત્રમાં અંશતઃ ડુબાડેલી છે. (આકૃતિ 10.21). પાણી અને કાચ વચ્ચેનો સંપર્કકોણ લઘુકોણ છે. આમ **કેશનળીમાં પાણીની સપાટી અંતર્ગોળ છે. આનો અર્થ એ છે કે ટોચની સપાટીની બે બાજુએ અમુક દબાણ-તફાવત છે. તે**

$$(P_i - P_o) = (2S/r) = 2S/(a \sec \theta)$$

$$= (2S/a) \cos \theta \qquad (10.29)$$

આમ, નળીમાં બરાબર મિનિસ્કસ (હવા-પાણી આંતરસપાટી) પાસે પાણીની અંદર દબાણ, વાતાવરણના દબાણ કરતાં ઓછું છે. આકૃતિ 10.21(a) મુજબ બે બિંદુઓ A અને B વિચારો. તેઓ એક સમાન દબાણે હોવાં જોઈએ. આમ, અહીં $P_i = P_a = P_A = P_B$ છે.

$$P_o + h \rho g = P_i = P_A \qquad (10.30)$$

જ્યાં ρ પાણીની ઘનતા અને h કેશનળીમાં ઊંચે ચઢેલ પ્રવાહી સ્તંભની ઊંચાઈ છે. (આકૃતિ 10.21(a)). સમીકરણ (10.29) અને (10.30) પરથી,

$$h \rho g = (P_i - P_o) = (2S\cos\theta) / a \qquad (10.31)$$

અત્રે કરેલી ચર્ચા અને સમીકરણ (10.26) અને (10.97) પરથી સ્પષ્ટ છે કે, કેશનળીમાં પ્રવાહી પૃષ્ઠતાણને લીધે ઊંચે ચઢે છે. ત્રિજ્યા a જેમ નાની હોય તેમ સ્તંભની ઊંચાઈ વધુ હોય છે. કાચની સાંકડી કેશનળીઓ માટે તે થોડા cmના ક્રમની હોય છે. દાખલા તરીકે, જો $a = 0.05$ cm હોય, તો પાણીના પૃષ્ઠતાણના મૂલ્ય (કોષ્ટક 10.3)નો ઉપયોગ કરતાં, (અને પાણી-કાચ માટે $\theta = 0$ હોવાથી)

$$h = 2S/(\rho g a)$$

$$= \frac{2 \times (0.073\,\mathrm{N m^{-1}})}{(10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}})(9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}})(5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m})}$$

$$= 2.98 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 2.98\,\mathrm{cm}$$

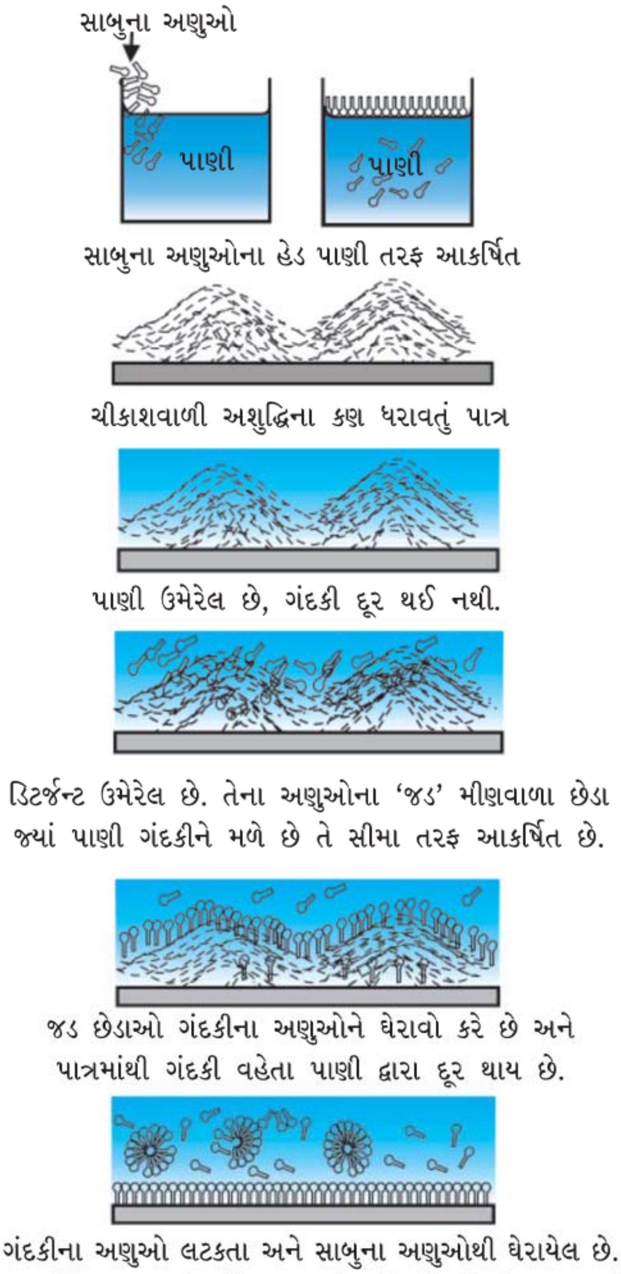
નોંધો કે જો પ્રવાહીનો મિનિસ્કસ બહિર્ગોળ હોય (દા.ત., પારા માટે) એટલે કે $\cos\theta$ ઋણ હોય તો સમીકરણ (10.30) પરથી સ્પષ્ટ છે કે કેશનળીમાં પ્રવાહી નીચે ઊતરશે !

10.6.6 ડિટર્જન્ટ્સ અને પૃષ્ઠતાણ (Detergents and Surface Tension)

આપણે સુતરાઉ કે બીજા કાપડ પર લાગેલા ગ્રીઝ કે તેલના ડાઘવાળાં ગંદા કપડાંઓને પાણીમાં ડિટર્જન્ટ્સ કે સાબુ ઉમેરીને તેમાં કપડાંને બોળીને અને હલાવીને સાફ કરીએ છીએ. આ પ્રક્રિયાને આપણે વધુ સારી રીતે સમજીએ.

પાણી વડે ધોવાથી ગ્રીઝના ડાઘ જતા નથી. આનું કારણ એ છે કે પાણી ચીકાશવાળી અશુદ્ધિને ભીંજવતું નથી, એટલે કે તેમની વચ્ચે સંપર્કનું ક્ષેત્રફળ ઘણું ઓછું હોય છે. જો પાણી ચીકાશવાળા પદાર્થ (grease)ને ભીંજવી શકે તો પાણીનો પ્રવાહ થોડા ગ્રીઝને તેની સાથે દૂર લઈ જાય. ડિટર્જન્ટ્સ મારફતે આવું કંઈક કરવામાં આવે છે. ડિટર્જન્ટના અણુઓ હૅર-પિન (hair pin) આકારના હોય છે. તેનો એક છેડો પાણી અને બીજો છેડો ગ્રીઝ, તેલ કે મીણ તરફ આકર્ષિત હોય છે અને આમ પાણી-તેલ આંતરસપાટીઓ રચવા માટે પ્રયત્નશીલ છે. આ પરિણામ આકૃતિ 10.22માં આકૃતિઓની શ્રેણી રૂપે દર્શાવેલ છે.

આપણી ભાષામાં, આપણે એમ કહીએ કે ડિટર્જન્ટ ઉમેરતાં તેના અણુઓ એક તરફ પાણી અને બીજી તરફ તેલ (કે તેવા પદાર્થ)ને આકર્ષે છે. તેથી પૃષ્ઠતાણ S (પાણી-તેલ) ઘણું ઘટી જાય છે. કદાચ, આવી અશુદ્ધિના ગોળા ડિટર્જન્ટથી અને પછી પાણીથી ઘેરાયેલ હોય તેવી-આંતરસપાટીઓ રચવાનું ઊર્જાની દૃષ્ટિએ પણ સાનુકૂળ (favourable) હોય છે. પૃષ્ઠ સક્રિય ડિટર્જન્ટ્સ (અથવા surfactants) વાપરતી આ પ્રકારની પ્રક્રિયાઓ માત્ર સફાઈકામમાં નહિ પણ તેલ, ખનિજ, કાચી ધાતુની પુનઃપ્રાપ્તિમાં પણ મહત્ત્વની છે.



આકૃતિ 10.22 ડિટર્જન્ટ અણુઓ શું કરે છે તેના પદમાં ડિટર્જન્ટ-પ્રક્રિયા

ઉદાહરણ 10.12 2.00 mm વ્યાસની એક કેશનળીનો નીચેનો છેડો બીકરમાંના પાણીની સપાટીથી 8.00 cm નીચે સુધી ડુબાડેલ છે. નળીના પાણીમાંના છેડા આગળ એક અર્ધગોળાકાર પરપોટો રચવા માટે નળીમાં કેટલું દબાણ જરૂરી છે ? પ્રયોગના તાપમાને પાણીનું પૃષ્ઠતાણ 7.30×10^{-2} Nm^{-1} છે. એક વાતાવરણ દબાણ 1.01×10^5 Pa છે. પાણીની ઘનતા = 1000 kg/m^3, $g = 9.80$ m s^{-2}. વધારાના દબાણની પણ ગણતરી કરો.

ઉકેલ પ્રવાહીની અંદર વાયુના પરપોટાની અંદરનું વધારાનું દબાણ $2\,S/r$, છે જ્યાં S એ પ્રવાહી-વાયુ આંતરસપાટીનું પૃષ્ઠતાણ છે. તમારે એ નોંધવું જોઈએ કે અત્રે ફક્ત એક જ પ્રવાહી-સપાટી છે. (વાયુમાં પ્રવાહીના પરપોટા માટે બે પ્રવાહી-સપાટીઓ છે આથી તે કિસ્સામાં વધારાના દબાણનું સૂત્ર $4\,S/r$ છે.) પરપોટાની ત્રિજ્યા r છે. હવે પરપોટાની બહારનું દબાણ P_o, વાતાવરણના દબાણ વત્તા પાણીના 8.00 cm સ્તંભના દબાણ જેટલું છે એટલે કે,

$$P_o = (1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 0.08 \text{ m} \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 9.8 \text{ m s}^{-2})$$

$$= 1.01784 \times 10^5 \text{ Pa}$$

આથી, પરપોટાની અંદરનું દબાણ

$$P_i = P_o + 2\,S/r$$

$$= 1.01784\times10^5 \text{ Pa} + (2\times7.3\times10^{-2} \text{ Pa m}/10^{-3} \text{ m})$$

$$= (1.01784 + 0.00146) \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}$$

જ્યાં, પરપોટાની ત્રિજ્યા કેશનળીની ત્રિજ્યા જેટલી લીધેલી છે, કારણ કે પરપોટો અર્ધગોળાકાર છે. (જવાબ ત્રણ સાર્થક અંકો સુધી round off કરેલ છે.) પરપોટાની અંદરનું વધારાનું દબાણ 146 Pa છે.

સારાંશ

1. તરલનો મૂળભૂત ગુણધર્મ એ છે કે તે વહી શકે છે. તરલને આકારના ફેરફારનો કોઈ વિરોધ હોતો નથી. આમ, તરલનો આકાર પાત્રના આકાર દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે.
2. પ્રવાહી અદબનીય છે અને તેને પોતાની મુક્ત સપાટી હોય છે. વાયુ દબનીય છે અને જે પણ મળે તે સમગ્ર અવકાશમાં વિસ્તરે છે.
3. જો તરલ વડે A ક્ષેત્રફળ પર લંબરૂપે લગાડાતું બળ F હોય, તો સરેરાશ દબાણ P_{av}ને બળ અને ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

   $$P_{av} = \frac{F}{A}$$

4. દબાણનો એકમ Pascal (Pa) છે. તે N m^{-2}ને સમાન છે. દબાણના બીજા સામાન્ય એકમો આ મુજબ છે :

   1 atm = 1.01×10^5 Pa

   1 bar = 10^5 Pa

   1 torr = 133 Pa = 0.133 kPa

   1 mm of Hg = 1 torr = 133 Pa
5. પાસ્કલનો નિયમ જણાવે છે કે, સ્થિર તરલમાં સમાન ઊંચાઈએ રહેલાં બિંદુઓ આગળ દબાણ એક સમાન હોય છે. બંધ પાત્રમાં રહેલા તરલ પર લગાડેલા દબાણનો ફેરફાર તરલના દરેક બિંદુએ અને પાત્રની દીવાલ પર ઘટ્યા વિના પહોંચે છે.
6. તરલમાં દબાણ ઊંડાઈ h સાથે $P = P_a + \rho gh$ સૂત્ર મુજબ બદલાય છે, જ્યાં ρ એ તરલની ઘનતા છે, જેને અચળ ગણેલી છે.
7. સ્થાયી વહનમાં અનિયમિત આડછેદની નળીમાં કોઈ પણ બિંદુ આગળથી દર સેકન્ડે પસાર થતા અદબનીય તરલનું કદ એક સમાન હોય છે.

   vA = અચળ (v વેગ છે અને A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ છે.) આ સમીકરણ અદબનીય તરલના વહનમાં દળ-સંરક્ષણને લીધે મળે છે.
8. બર્નુલીનો સિદ્ધાંત જણાવે છે કે ધારારેખાની સાથે આપણે જેમ આગળ વધીએ તેમ દબાણ (P), એકમ કદ દીઠ ગતિઊર્જા ($\rho v^2/2$) અને એકમ કદ દીઠ સ્થિતિઊર્જા (ρgy)નો સરવાળો અચળ રહે છે.

   $P + \rho v^2/2 + \rho gy$ = અચળ.

આ સમીકરણ મૂળભૂત રીતે સ્થાયી વહનમાં અદબનીય તરલને લગાડેલું ઊર્જા-સંરક્ષણ છે. કોઈ તરલને શૂન્ય શ્યાનતા નથી, તેથી ઉપર્યુક્ત કથન માત્ર આશરા પડતું સાચું છે. શ્યાનતા એ ઘર્ષણ જેવું છે અને ગતિ-ઊર્જાનું ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતર કરે છે.

9. તરલમાં આકાર વિકૃતિ માટે આકાર પ્રતિબળની જરૂર ન હોવા છતાં, જ્યારે તરલ પર આકાર પ્રતિબળ લગાડવામાં આવે છે ત્યારે ગતિ ઉદ્ભવે છે જે સમય સાથે આકાર-વિકૃતિમાં વધારો કરે છે. આકાર પ્રતિબળ અને આકાર વિકૃતિના સમય-દરના ગુણોત્તરને શ્યાનતા ગુણાંક η કહે છે, જ્યાં સંજ્ઞાને પ્રચલિત અર્થ છે અને આ પ્રકરણના લખાણમાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે.

10. સ્ટૉક્સનો નિયમ જણાવે છે કે શ્યાન તરલમાંથી, a ત્રિજ્યા ધરાવતા અને $\mathbf{v}$ વેગથી ગતિ કરતા ગોળા પર લાગતું શ્યાન બળ $\mathbf{F} = -6\pi\eta a\mathbf{v}$ છે.

11. પૃષ્ઠતાણ એ પ્રવાહી અને સીમા રચતી સપાટીની આંતરસપાટીના સમતલમાં એકમ લંબાઈ દીઠ બળ (અથવા એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ સપાટી ઊર્જા) છે. તે આંતરસપાટી પરના અણુઓ પાસે અંતરિયાળ અણુઓની સરખામણીમાં રહેલી વધારાની ઊર્જા છે.

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. દબાણ એ અદિશ રાશિ છે. ''એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ બળ'' તરીકે દબાણની વ્યાખ્યા દબાણ સદિશ હોવાની ખોટી છાપ ઊભી કરી શકે છે. વ્યાખ્યામાં અંશમાં આવતું બળ એ જેના પર તે લાગે છે તે ક્ષેત્રફળને લંબરૂપે બળનો ઘટક છે. તરલને કણ અને દૃઢ વસ્તુ કરતાં અલગ તરીકે વર્ણવવામાં યંત્રશાસ્ત્રની જરૂર છે. આપણે તરલમાં બિંદુએ બિંદુએ બદલાતા જતા ગુણધર્મો જાણવા માગીએ છીએ.

2. આપણે તરલનું દબાણ માત્ર પાત્રની દીવાલ જેવા ઘન પદાર્થ પર કે તરલમાં ડૂબેલા ઘન દ્રવ્યના ટુકડા પર લાગે તેમ વિચારવું ન જોઈએ. તરલના દરેક બિંદુએ દબાણ હોય જ છે. તરલનો એક ખંડ (આકૃતિ 10.2માં દર્શાવ્યા જેવો) સંતુલનમાં એટલા માટે છે કે જુદી જુદી બાજુઓ પર લાગતાં દબાણ સરખાં હોય છે.

3. દબાણનું સૂત્ર $P = P_a + \rho gh$ એ ત્યારે સત્ય છે કે જ્યારે તરલ અદબનીય હોય છે. વ્યવહારમાં કહીએ તો તેવાં પ્રવાહીઓ માટે સત્ય છે, જેઓ મહદંશે અદબનીય છે અને તે ઊંચાઈ સાથે અચળ હોય છે.

4. ગેજ દબાણ એ વાસ્તવિક દબાણ અને વાતાવરણના દબાણ વચ્ચેનો તફાવત છે. ઘણી દબાણ-માપક રચનાઓ ગેજ દબાણ માપે છે, તેઓમાં ટાયર દબાણ ગેજ અને બ્લડ પ્રેશર ગૉજ (સ્ફિગ્મોમૅનોમીટર)નો સમાવેશ થાય છે.

5. ધારારેખા એ તરલ વહનનો નકશો છે. સ્થાયી વહનમાં બે ધારારેખાઓ એકબીજીને છેદતી નથી કારણ કે જો તેમ હોત તો તેનો અર્થ એ થાય કે તે બિંદુએ તરલ કણને બે શક્ય વેગ હોય.

6. બર્નુલીનો સિદ્ધાંત તરલમાં શ્યાનતાની હાજરીમાં સત્ય રહેતો નથી (લાગુ પડતો નથી.) એ સ્થિતિમાં વ્યય કરનારા શ્યાનતા બળ દ્વારા થતું કાર્ય ધ્યાનમાં લેવું પડે અને P_2 (આકૃતિ 10.9) સમીકરણ 10.12 થી મળતા મૂલ્ય કરતાં ઓછું હોય છે.

7. તાપમાન વધે તેમ પ્રવાહીના અણુઓ વધુ ગતિશીલ બને અને શ્યાનતાગુણાંક η ઘટે છે. વાયુમાં તાપમાનનો વધારો અસ્તવ્યસ્ત ગતિમાં વધારો કરે છે અને η વધે છે.

8. પ્રવાહીના અંતરિયાળ વિસ્તારમાંના અણુઓની સ્થિતિઊર્જાની સરખામણીએ સપાટી પરના અણુઓ પાસેની વધારાની સ્થિતિઊર્જાને લીધે પૃષ્ઠતાણ ઉદ્ભવે છે. બે દ્રવ્યો જેમાંથી ઓછામાં ઓછું એક તરલ છે તેમની આંતરસપાટી પર આવી સ્થિતિઊર્જા હાજર હોય છે. તે એક તરલનો એકલાનો ગુણધર્મ નથી.

ભૌતિક રાશિ	પ્રતીક	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
દબાણ	P	$[ML^{-1}T^{-2}]$	Pascal (Pa)	$1\ atm = 1.013 \times 10^5\ Pa$, અદિશ
ઘનતા	ρ	$[ML^{-3}]$	$kg\ m^{-3}$	અદિશ
વિશિષ્ટ ગુરુત્વ		નથી	નથી	$\frac{\rho\ પદાર્થ}{\rho\ પાણી}$, અદિશ
શ્યાનતાગુણાંક	η	$[ML^{-1}T^{-1}]$	Pa s અથવા poisetulles (Pl)	અદિશ
પૃષ્ઠતાણ	S	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	અદિશ

સ્વાધ્યાય

10.1 સમજાવો, શા માટે

(a) માનવમાં પગ આગળ લોહીનું દબાણ (blood pressure), મગજ આગળ હોય તે કરતાં વધુ હોય છે.

(b) વાતાવરણની ઊંચાઈ 100 kmથી પણ વધુ હોવા છતાં લગભગ 6 kmની ઊંચાઈએ વાતાવરણનું દબાણ ઘટીને તેના દરિયાની સપાટી આગળના મૂલ્યનું લગભગ અડધું હોય છે.

(c) દબાણ એ બળ ભાગ્યા ક્ષેત્રફળ હોવા છતાં હાઈડ્રોસ્ટેટિક (દ્રવસ્થિત) દબાણ એ અદિશ રાશિ છે.

10.2 સમજાવો, શા માટે

(a) પારાનો કાચ સાથેનો સંપર્કકોણ ગુરુકોણ છે જ્યારે પાણીનો કાચ સાથેનો સંપર્કકોણ લઘુકોણ છે.

(b) સ્વચ્છ કાચની સપાટી પર પાણી ફેલાઈ જાય છે જ્યારે તે જ સપાટી પર પારો બુંદો રચે છે. (બીજી રીતે કહીએ તો, પાણી કાચને ભીંજવે છે જ્યારે પારો કાચને ભીંજવતો નથી.)

(c) પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ સપાટીના ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી.

(d) ડિટર્જન્ટ ઓગાળેલા પાણીને નાના સંપર્કકોણો હોય છે.

(e) બાહ્ય બળોની અસર હેઠળ ન હોય તેવું પ્રવાહી બુંદ હંમેશાં ગોળાકાર હોય છે.

10.3 દરેક કથન સાથે આપેલ યાદીમાંના શબ્દ (શબ્દો) વાપરીને ખાલી જગ્યા પૂરો :

(a) પ્રવાહીઓના પૃષ્ઠતાણ સામાન્યતઃ તાપમાન સાથે .... (વધે છે/ઘટે છે.)

(b) વાયુઓની શ્યાનતા તાપમાન સાથે ...., જ્યારે પ્રવાહીઓની શ્યાનતા તાપમાન સાથે .... (વધે છે/ઘટે છે.)

(c) આકાર સ્થિતિસ્થાપકતા અંક ધરાવતા ઘન પદાર્થો માટે આકાર વિરૂપક બળ .... ને સમપ્રમાણમાં જ્યારે પ્રવાહીઓ માટે તે .... ને સમપ્રમાણમાં હોય છે. (આકાર વિકૃતિ/આકાર વિકૃતિના દર)

(d) સ્થાયી વહનમાંના તરલ માટે, સંકુચિત (સાંકડા) ભાગ આગળ વહનની ઝડપમાં વધારો .... ને અનુસરે છે. (દળનું સંરક્ષણ/બર્નુલીનો સિદ્ધાંત)

(e) પવનની ટનલમાં વિમાનના નમૂના (મોડેલ) માટે જે ઝડપે પ્રક્ષુબ્ધતા થાય તે, વાસ્તવિક વિમાન માટેની જે ઝડપે પ્રક્ષુબ્ધતા થાય તેના કરતાં .... હોય છે. (વધુ/ઓછી)

10.4 સમજાવો, શા માટે

(a) કાગળના ટુકડાને સમક્ષિતિજ રાખવા માટે તમારે તેની ઉપર ફૂંક મારવી પડે, નીચે નહિ.

(b) જ્યારે આપણે પાણીના નળને આપણી આંગળીઓથી બંધ કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ ત્યારે આંગળીઓ વચ્ચેની જગ્યામાંથી પાણીની વેગવંત ધારો ધસી આવે છે.

(c) ઈન્જેક્શન આપવામાં ડૉક્ટર દ્વારા અંગૂઠાથી દાખવાતા દબાણ કરતાં સિરિંજની સોયનું પરિમાણ વહનના દરનું વધુ સારી રીતે નિયંત્રણ કરી શકે છે.

(d) પાત્રમાંના નાના છિદ્રમાંથી બહાર વહી આવતા તરલને પરિણામે પાત્ર પર વિરુદ્ધ દિશામાં ધક્કો લાગે છે.

(e) હવામાં સ્પિન થતો ક્રિકેટ બૉલ પરવલય ગતિપથને અનુસરતો નથી.

10.5 ઊંચી એડીના બુટ પહેરતી 50 kg ની એક છોકરી એક એડી પર સંતુલન જાળવે છે. બુટની એડીનો વ્યાસ 1.0 cm છે. એડી વડે સમક્ષિતિજ તળિયા પર કેટલું દબાણ લાગે ?

10.6 ટૉરિસેલીના બૅરોમીટરમાં પારો વપરાયો હતો. પાસ્કલે 984 kg m^{-3} ઘનતાનો ફ્રેંચ વાઇન વાપરીને તેની નકલ કરી. સામાન્ય વાતાવરણના દબાણ માટે વાઇનના સ્તંભની ઊંચાઈ કેટલી હશે ?

10.7 એક ઊર્ધ્વ બાંધકામ 10^9 Pa નું મહત્તમ પ્રતિબળ સહન કરી શકે છે. આ બાંધકામ સમુદ્રની અંદરના તેલના કૂવા પર મૂકવા માટે યોગ્ય છે ? સમુદ્રની ઊંડાઈ 3 km છે. સમુદ્રમાંના પ્રવાહોને અવગણો.

10.8 એક હાઇડ્રોલિક ઑટોમોબાઇલ લિફ્ટ મહત્તમ 3000 kg દળની કારને ઊંચકવા માટે બનાવેલી છે. આ વજન ઊંચકતા પિસ્ટનના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 425 cm^2 છે. આ પિસ્ટનને કેટલું મહત્તમ દબાણ સહન કરવું પડશે ?

10.9 એક યુ-ટ્યૂબમાં પારા વડે જુદા પાડેલા પાણી અને મિથિલેટેડ સ્પિરિટ ભરેલા છે. એક ભુજમાં 10.0 cm પાણી અને બીજામાં 12.5 cm સ્પિરિટ વડે બે ભૂજમાંના પારાના સ્તંભ એક લેવલમાં (સપાટી એક જ સમક્ષિતિજ સમતલમાં) આવે છે. સ્પિરિટનું વિશિષ્ટ ગુરુત્વ કેટલું હશે ?

10.10 અગાઉના પ્રશ્નમાં જો વધારામાં 15.0 cm પાણી અને સ્પિરિટ અનુરૂપ ભૂજાઓમાં રેડવામાં આવે તો બે ભૂજાઓમાં પારાના લેવલ (સપાટી) વચ્ચેનો તફાવત કેટલો હશે ? પારાનું વિશિષ્ટ ગુરુત્વ = 13.6

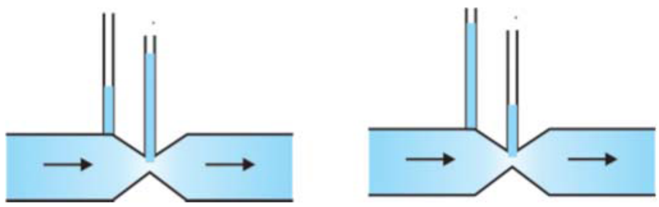
10.11 બર્નુલીનું સમીકરણ નદીમાંના ઢાળ પરથી પાણીના વહનનું વર્ણન કરવા માટે વાપરી શકાય ? સમજાવો.

10.12 જો બર્નુલીનું સમીકરણ લાગુ પાડવામાં નિરપેક્ષ દબાણને બદલે કોઈ ગેજ (gauge) દબાણ વાપરે તો ફેર પડે ? સમજાવો.

10.13 1.5 m લંબાઈ અને 1.0 cm ત્રિજ્યા ધરાવતી એક સમક્ષિતિજ નળીમાંથી ગ્લિસરિનનું સ્થાયી વહન થઈ રહ્યું છે. જો એક છેડે એકત્રિત કરાતા ગ્લિસરિનનો જથ્થો 4.0×10^{-3} kg s^{-1} હોય તો નળીના બે છેડે દબાણ તફાવત કેટલો હશે ? (ગ્લિસરિનની ઘનતા = 1.3×10^3 kg m^{-3} અને ગ્લિસરિનની શ્યાનતા = 0.83 Pa s)

10.14 પવનની ટનલમાં એક નમૂના (model)ના વિમાન પરના પ્રયોગમાં પાંખની ઉપર અને નીચેની સપાટીઓ આગળ વહનની ઝડપ અનુક્રમે 70 m s^{-1} અને 63 m s^{-1} છે. જો પાંખનું ક્ષેત્રફળ 2.5 m^2 હોય તો પાંખ પર ઊર્ધ્વ ધક્કો (બળ) (lift) કેટલો હશે ? હવાની ઘનતા 1.3 kg m^{-3} લો.

10.15 આકૃતિ 10.23 (a) અને (b) એક (અદબનીય) પ્રવાહીના સ્થાયી વહન અંગેની છે. બેમાંની કઈ આકૃતિ ખોટી છે ? કેમ ?



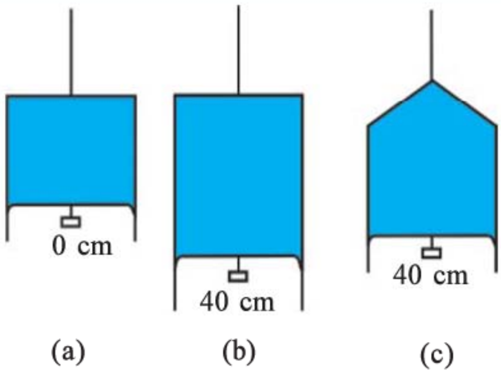
(a) (b)

આકૃતિ **10.23**

10.16 સ્પ્રે-પંપ (છંટકાવ માટે વપરાતો પંપ)ની નળાકાર નળીનો આડછેદ 8.0 cm^2 છે. તેના એક છેડે 1.0 mm વ્યાસનાં 40 છિદ્રો છે. જો નળીની અંદર પ્રવાહી વહનની ઝડપ 1.5 m min^{-1} હોય, તો છિદ્રોમાંથી બહાર આવતા પ્રવાહીની ઝડપ કેટલી હશે ?

10.17 એક U-આકારનો તાર સાબુના દ્રાવણમાં બોળી બહાર કાઢેલ છે. તાર અને હલકા સરકતા ભુજ (slider) વચ્ચેની સાબુની પાતળી કપોટી (film) 1.5×10^{-2} N વજનને ટેકવે છે. (જેમાં તે ભુજનું વજન પણ સમાવિષ્ટ છે.) સરકતા ભુજની લંબાઈ 30 cm છે. તો તે કપોટીનું પૃષ્ઠતાણ કેટલું હશે ?

10.18 આકૃતિ 10.24 (a) પ્રવાહીની એક પાતળી કપોટી 4.5×10^{-2} N વજનને લટકાવતી દર્શાવે છે. તે જ પ્રવાહીની તે જ તાપમાને પાતળી કપોટી આકૃતિ (b) અને (c)માં કેટલું વજન લટકાવતી હશે ?



આકૃતિ 10.24

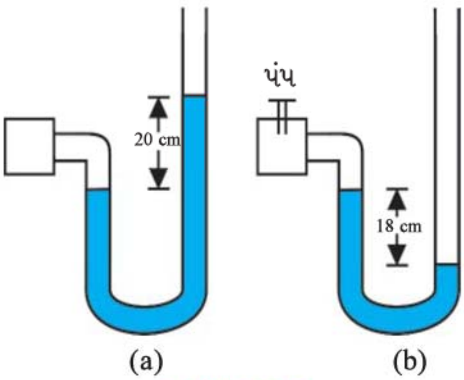
10.19 ઓરડાના તાપમાને 3.0 mm ત્રિજ્યાના પારાના બુંદ (ટીપું)ની અંદરનું દબાણ કેટલું હશે ? પારાનું તે તાપમાને (20 °C) પૃષ્ઠતાણ 4.65×10^{-1} N m^{-1} છે. વાતાવરણં દબાણ 1.01×10^5 Pa. બુંદની અંદરનું વધારાનું દબાણ પણ જણાવો.

10.20 સાબુના દ્રાવણનું 20 °C તાપમાને પૃષ્ઠતાણ 2.50×10^{-2} N m^{-1} આપેલ છે. 5.00 mm ત્રિજ્યાના સાબુના દ્રાવણના પરપોટાની અંદરનું વધારાનું દબાણ કેટલું હશે ? જો આ જ પરિમાણનો હવાનો પરપોટો પાત્રમાંના સાબુના દ્રાવણ (સાપેક્ષ ઘનતા 1.2)ની અંદર 40.0 cm ઊંડાઈએ રચાય, તો તે પરપોટાની અંદરનું દબાણ કેટલું હશે ? (1 વાતાવરણ દબાણ = 1.01×10^5 Pa)

વધારાના સ્વાધ્યાય

10.21 1.0 m^2 ક્ષેત્રફળનું ચોરસ તળિયું ધરાવતી એક ટાંકી મધ્યમાં એક ઊર્ધ્વ દીવાલ વડે વિભાજિત કરેલ છે. આ દીવાલના તળિયે એક નાના મિજાગરાવાળું 20 cm^2 ક્ષેત્રફળનું બારણું છે. ટાંકીના એક વિભાગમાં પાણી અને બીજામાં ઍસિડ (1.7 સાપેક્ષ ઘનતા ધરાવતો) બંને 4.0 mની ઊંચાઈ સુધી ભરેલ છે. આ બારણાને બંધ રાખવા માટે જરૂરી બળની ગણતરી કરો.

10.22 આકૃતિ 10.25(a)માં દર્શાવ્યા મુજબ એક મૅનોમીટર એક બંધ પાત્રમાંના વાયુનું દબાણ માપે છે. જ્યારે એક પંપ કેટલાક વાયુને બહાર કાઢે છે ત્યારે મૅનોમીટર આકૃતિ 10.25 (b)માં દર્શાવ્યા મુજબ દબાણ માપે છે. મૅનોમીટરમાં વપરાયેલ પ્રવાહી પારો છે અને વાતાવરણનું દબાણ પારાના 76 cm જેટલું છે.
(a) બંધ પાત્રમાંના વાયુનું નિરપેક્ષ દબાણ અને ગેજ (gauge) દબાણ કિસ્સા (a) અને (b) માટે પારાના cm ના એકમોમાં જણાવો.
(b) કિસ્સા (b)માં જો 13.6 cm પાણી (પારા સાથે ન ભળતું) મૅનોમીટરના જમણા ભુજમાં રેડવામાં આવે, તો સ્તંભની સપાટીઓ (levels) કેવી બદલાશે ?



આકૃતિ 10.25

10.23 બે પાત્રોને તળિયાનાં સમાન ક્ષેત્રફળ પરંતુ જુદા આકાર છે. બંને પાત્રોમાં સમાન ઊંચાઈ સુધી પાણી ભરવા માટે પ્રથમ પાત્રમાં બીજા કરતાં બમણા કદનું પાણી જોઈએ છે. બે કિસ્સાઓમાં પાણી વડે તળિયા પર લગાડેલું બળ સમાન હશે ? જો તેમ હોય તો તે સમાન ઊંચાઈ સુધી પાણીભરેલા પાત્રો વજનમાપક પર કેમ જુદાં અવલોકનો દર્શાવે છે ?

10.24 લોહી ચઢાવવાની એક પ્રક્રિયામાં સોય 2000 Pa ગેજ દબાણ હોય તેવી શિરામાં દાખલ કરેલ છે. લોહીભરેલું પાત્ર કેટલી ઊંચાઈએ મૂકવું જોઈએ કે જેથી લોહી શિરામાં દાખલ થવાની શરૂઆત થાય ? (સંપૂર્ણ લોહીની ઘનતા કોષ્ટક 10.1માંથી લો.)

10.25 બર્નુલીનું સમીકરણ સાધિત કરવામાં આપણે તરલ પર થયેલા કાર્યને તેની સ્થિતિઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જાના ફેરફાર સાથે સરખાવેલ છે. (a) વહન સ્તરીય રહે તે રીતે લોહીના વહનનો મહત્તમ સરેરાશ વેગ 2×10^{-3} m વ્યાસની ધમનીમાંથી કેટલો હશે ? (b) તરલનો વેગ વધે તેમ ઊર્જા-વ્યય કરનારાં બળો મહત્ત્વનાં બને છે ? ગુણાત્મક ચર્ચા કરો.

10.26 (a) વહન સ્તરીય જ રહે તે રીતે 2×10^{-3} m ત્રિજ્યાની ધમનીમાંથી લોહીના વહનનો મહત્તમ સરેરાશ વેગ કેટલો હશે ? (b) તેને અનુરૂપ વહન-દર કેટલો હશે ? (લોહીની શ્યાનતા 2.084×10^{-3} Pa s લો.)

10.27 એક વિમાન અચળ ઝડપથી સમક્ષિતિજ ઉડ્ડયનમાં છે અને બેમાંની દરેક પાંખનું ક્ષેત્રફળ 25 m^2 છે. જો પાંખની નીચેની સપાટીએ વેગ 180 km/h અને ઉપરની સપાટીએ વેગ 234 km/h હોય, તો વિમાનનું દળ શોધો. (હવાની ઘનતા 1 kg m^{-3} લો.)

10.28 મિલિકનના ઑઇલ ડ્રોપ પ્રયોગમાં 2.0×10^{-5} m ત્રિજ્યા અને 1.2×10^3 kg m^{-3} ઘનતા ધરાવતા બુંદ (drop)નો અંતિમ (terminal) વેગ કેટલો હશે ? પ્રયોગના તાપમાને હવાની શ્યાનતા 1.8×10^{-5} Pa s લો. તે ઝડપે બુંદ પરનું શ્યાનતા બળ કેટલું હશે ? (હવાને લીધે બુંદનું ઉત્પ્લાવન અવગણો.)

10.29 પારાનો સોડાલાઈમ કાચ સાથેનો સંપર્કકોણ 140° છે. આવા કાચની 1.00 mm ત્રિજ્યાની એક પાતળી નળી પારો ભરેલા પાત્રમાં બોળેલી છે. બહારની પ્રવાહી સપાટીની સાપેક્ષે નળીમાં પારો કેટલા પ્રમાણમાં નીચે ઊતરશે ? પ્રયોગના તાપમાને પારાનું પૃષ્ઠતાણ 0.465 N m^{-1} છે. પારાની ઘનતા = 13.6×10^3 kg m^{-3}.

10.30 3.0 mm અને 6.0 mm વ્યાસના બે નાનાં છિદ્રો એકબીજા સાથે જોડીને એક યુ-ટ્યૂબ રચેલ છે, જે બંને છેડે ખુલ્લી છે. જો યુ-ટ્યૂબમાં પાણી રાખેલ હોય તો ટ્યૂબના બે ભુજમાં સપાટીઓ વચ્ચેનો તફાવત કેટલો હશે ? પ્રયોગના તાપમાને પાણીનું પૃષ્ઠતાણ 7.3×10^{-2} N m^{-1} છે. સંપર્કકોણ શૂન્ય અને પાણીની ઘનતા 1.0×10^3 kg m^{-3} લો. ($g = 9.8$ m s^{-2})

કેલ્ક્યુલેટર/કમ્પ્યુટર આધારિત પ્રશ્ન

10.31 (a) એ જાણીતું છે કે હવાની ઘનતા ρ, ઊંચાઈ y સાથે

$$\rho = \rho_o e^{-y/y_o}$$

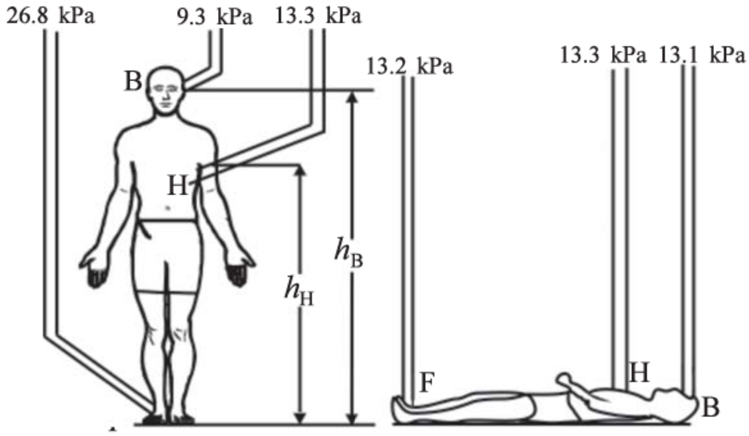
મુજબ ઘટે છે, જ્યાં $\rho_o = 1.25$ kg m^{-3} એ દરિયાની સપાટી આગળ ઘનતા છે અને y_o એ અચળાંક છે. ઘનતાના આ ફેરફારને વાતાવરણોનો નિયમ કહે છે. વાતાવરણનું તાપમાન અચળ ધારીને (સમતાપી સ્થિતિ) આ નિયમ તારવો. gનું મૂલ્ય પણ અચળ ધારો.

(b) 400 kgનો બોજ (payload) ઊંચકવા માટે 1425 m^3 કદનું મોટું He બલૂન વપરાય છે. બલૂન ઊંચે ચઢે તેમ ત્રિજ્યાને અચળ રાખતું ધારી લો. તે કેટલું ઊંચે ચઢશે ?

$$(y_o = 8000 \text{ m અને } \rho_{He} = 0.18 \text{ kg m}^{-3})$$

પરિશિષ્ટ 10.1 : લોહીનું દબાણ શું છે ?
(APPENDIX 10.1 : WHAT IS BLOOD PRESSURE ?)

ઉત્ક્રાંતિના ઇતિહાસમાં એક એવો સમય હતો જ્યારે પ્રાણીઓએ ઊભી સ્થિતિમાં સારો એવો સમય ગાળવાની શરૂઆત કરી હતી. આને કારણે રુધિરાભિસરણ તંત્ર માટે કેટલીક જરૂરિયાતો ઉદ્‌ભવી. નીચેના છેડાઓ તરફથી હૃદય તરફ લોહીને પાછું લાવતી શિરાઓમાં ફેરફારો થતા ગયા. તમે યાદ કરી લેશો કે શિરાઓ એ લોહીની એવી નળીઓ છે કે જેમના દ્વારા લોહી હૃદયમાં પાછું ફરે છે. માનવો અને જિરાફ જેવાં પ્રાણીઓએ લોહીને ગુરુત્વની વિરુદ્ધમાં ઉપર તરફ ગતિ કરાવવાની બાબતને અપનાવી લીધી છે. (અનુકૂલન સાધી લીધું છે.) પરંતુ સાપ, ઉંદરો અને સસલાં જેવાં પ્રાણીઓને જો ઊભાં પકડી રાખવામાં આવે તો તેઓ મૃત્યુ પામશે, કારણ કે લોહી નીચેના છેડાઓ પાસે રહે છે અને શિરાઓનું તંત્ર તેને હૃદય તરફ મોકલવા માટે અશક્ત છે.



આકૃતિ **10.26** *ઊભા રહેવાની કે આડા પડવાની સ્થિતિમાં માનવશરીરના વિવિધ ભાગોમાં ધમનીઓમાં ગેજ (gauge) દબાણની સંજ્ઞાત્મક આકૃતિ અત્રે દર્શાવેલ દબાણો હૃદયના એક ચક્ર (Heart cycle) પર લીધેલ સરેરાશ છે.*

આકૃતિ 10.26 માનવશરીરમાં જુદાં જુદાં બિંદુઓ આગળ ધમનીઓમાં સરેરાશ દબાણો દર્શાવે છે. શ્યાનતા અસર ઓછી હોવાથી આ દબાણનાં મૂલ્યો સમજવા માટે આપણે બર્નુલીનું સમીકરણ 10.13 વાપરી શકીએ.

$$P + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g y = \text{અચળ (Constant)}$$

ત્રણ ધમનીઓમાં વેગનાં મૂલ્યો નાનાં ($\approx$ 0.1 m s^{-1}) અને લગભગ અચળ હોવાથી ગતિઊર્જાનું પદ $(\rho \upsilon^2/2)$ અવગણી શકાય. આથી મગજ, હૃદય અને પગ આગળનાં ગેજદબાણો અનુક્રમે P_B, P_H અને P_F વચ્ચે

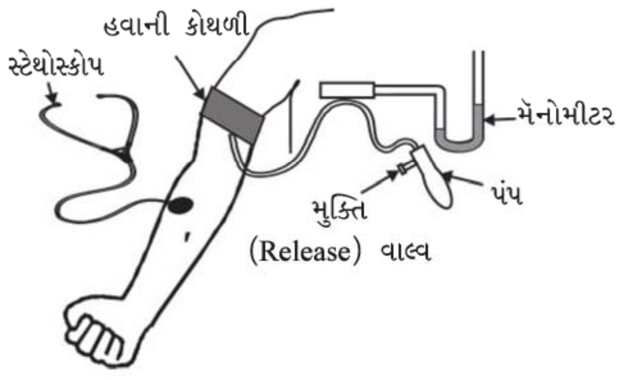
$$P_F = P_H + \rho g h_H = P_B + \rho g h_B \tag{10.34}$$

સંબંધ રહેલો છે, જ્યાં ρ એ લોહીની ઘનતા છે. હૃદય અને મગજ સુધીની ઊંચાઈનાં લાક્ષણિક મૂલ્યો $h_H = 1.3$ m અને $h_B = 1.7$ m છે. $\rho = 1.06 \times 10^3$ kg m^{-3} લેતાં, $P_H = 13.3$ kPaના આપેલા મૂલ્ય માટે $P_F = 26.8$ kPa (kilopascal) અને $P_B = 9.3$ kPa મળે છે. આમ, જ્યારે વ્યક્તિ ઊભેલ હોય ત્યારે શરીરના નીચેના અને ઉપરના ભાગોમાં દબાણો આટલાં બધાં જુદાં હોય છે. પરંતુ જ્યારે વ્યક્તિ આડી પડેલ હોય ત્યારે દબાણો લગભગ સમાન હોય છે. પ્રકરણના લખાણમાં જણાવ્યું છે તેમ મેડિસિન અને શરીરવિજ્ઞાનમાં સામાન્ય રીતે વપરાતા દબાણના એકમો torr અને mm of H_g છે. 1 mm of H_g = 1 torr = 0.133 kPa. આમ હૃદય આગળ સરેરાશ દબાણ P_H = 13.3 k Pa = 100 mm of H_g જેટલું હોય છે.

માનવશરીર એ કુદરતની અજાયબી છે. શરીરના નીચેના છેડાઓ આગળની શિરાઓ વાલ્વથી સજ્જ હોય છે, જે લોહી હૃદય તરફ વહેતું હોય ત્યારે ખૂલે છે અને નીચે ઊતરી જવા પ્રયત્ન કરે ત્યારે બંધ થાય છે. શ્વાસોચ્છ્‌વાસ સાથે સંબંધિત પંપિંગકાર્યને લીધે અને ચાલવા દરમિયાન ઇચ્છાવર્તી સ્નાયુઓની લવચીકતા દ્વારા થોડું પણ લોહી પાછું ફરે છે. આ પરથી સમજાય છે કે સૈનિકને સાવધાન સ્થિતિમાં ઊભા રહેવાની જરૂર હોવાથી લોહીનું અપૂરતા પ્રમાણમાં હૃદયમાં પાછું આવવાને લીધે મૂર્છિત (બેભાન) થઈ શકે છે. તેને એકવાર આડો સુવાડી દેવામાં આવે, તો દબાણો સમાન થઈ જાય છે અને તે પાછો ભાનમાં આવી જાય છે.

સ્ફિગ્મોમૅનોમીટર નામનું સાધન સામાન્ય રીતે માનવોનું લોહીનું દબાણ માપે છે. તે ઝડપી, અદુઃખદાયી અને બિન-આક્રમક (non-invasive) ટેક્નિક છે અને ડૉક્ટરને દર્દીની તંદુરસ્તી અંગે વિશ્વસનીય ખ્યાલ આપે છે. માપવાની પ્રક્રિયા આકૃતિ 10.27માં દર્શાવી છે. હાથનો ઉપરનો ભાગ વાપરવાનાં બે કારણો છે. પ્રથમ તે હૃદયના લેવલમાં (સમાન ઊંચાઈવાળા સ્થાને) છે અને અહીં માપેલાં મૂલ્યો હૃદય આગળનાં મૂલ્યોની ઘણાં નજીકનાં હોય છે. હાથના ઉપરના ભાગમાં માત્ર એક અસ્થિ છે અને તેથી અહીંની ધમની (brachial artery)ને સંકોચવાનું સહેલું પડે છે. આપણે સૌએ આપણી આંગળીઓ કાંડા પર મૂકીને ધબકારાનો દર (pulse rate) માપેલ છે. દરેક ધબકાર એક સેકન્ડ કરતાં સહેજ ઓછો સમય લે છે. દરેક ધબકાર દરમિયાન હૃદયમાંનું અને રુધિરાભિસરણ તંત્રમાંનું દબાણ એકવાર મહત્તમ જ્યારે હૃદય વડે લોહી પર દબાણ લગાડાય ત્યારે (systolic pressure) અને એકવાર લઘુતમ જ્યારે હૃદય શિથિલ થાય ત્યારે (diastolic pressure) બને છે. સ્ફિગ્મોમૅનોમીટર એ એવી રચના છે કે જે આ અંત્ય દબાણો માપે છે. તે એવા સિદ્ધાંત પર કાર્ય કરે છે કે **હાથના ઉપરના ભાગમાંની ધમની (brachial artery)માંથી લોહીનું વહન, યોગ્ય સંકોચન દ્વારા સ્તરીયમાંથી પ્રક્ષુબ્ધ બનાવી શકાય છે. પ્રક્ષુબ્ધ વહન ઊર્જાનો વ્યય કરનારું છે અને તેનો ધ્વનિ સ્ટેથોસ્કૉપમાં પકડી શકાય છે.**

હાથના ઉપરના ભાગ પર વિંટાળેલી હવાની એક કોથળી (air sack)માંનું ગેજદબાણ એક મૅનોમીટર અથવા ચંદાવાળા (dial) દબાણમાપક વડે માપવામાં આવે છે. આકૃતિ 10.27. કોથળીમાં દબાણ પ્રથમ એટલું વધારવામાં આવે છે કે brachial ધમની બંધ થાય. પછી કોથળીમાંનું દબાણ ધીમે ધીમે ઘટાડવામાં આવે છે અને કોથળીની સહેજ નીચે મૂકેલું સ્ટેથોસ્કૉપ brachial ધમનીમાં ઉદ્ભવતા અવાજો સાંભળવા માટે વપરાય છે. જ્યારે દબાણ **systolic (મહત્તમ)** કરતાં સહેજ જ ઓછું હોય ત્યારે ધમની સહેજ ખૂલે છે. આ ટૂંકા સમય દરમિયાન ખૂબ સંકુચિત ધમનીની સ્થિતિમાં લોહીનો વેગ વધારે અને પ્રક્ષુબ્ધ હોય છે અને તેથી અવાજ સંભળાય છે. આ અવાજ સ્ટેથોસ્કૉપ પર **હળવા ટકોરા** જેવો હોય છે. જ્યારે કોથળીમાંનું દબાણ હજી ઘટાડવામાં આવે ત્યારે ધમની હૃદય-ચક્ર દરમિયાન લાંબા સમય માટે ખુલ્લી રહે છે. આમ છતાં, હૃદયના ધબકારના **ડાયસ્ટોલિક** (લઘુતમ દબાણ)ની સ્થિતિમાં તે બંધ રહે છે. આમ, ટકોરાના અવાજનો સમયગાળો લાંબો છે. **કોથળીમાંનું દબાણ diastolic** દબાણ જેટલું થાય ત્યારે ધમની સમગ્ર હૃદય-ચક્ર દરમિયાન ખુલ્લી રહે છે. જોકે, વહન હજી પણ પ્રક્ષુબ્ધ અને અવાજ કરનારું છે. પણ ટકોરાના અવાજને બદલે સ્ટેથોસ્કૉપમાં સતત મોટો અવાજ સંભળાય છે.



આકૃતિ **10.27** સ્ફિગ્મોમૅનોમીટર અને સ્ટેથોસ્કૉપની મદદથી લોહીના દબાણની માપણી

દર્દીનું લોહીનું દબાણ systolic અને diastolic દબાણોના ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. વિરામ કરતા તંદુરસ્ત પુખ્ત વ્યક્તિ માટે તેનું લાક્ષણિક મૂલ્ય 120/80 mm of H_g (120/80 torr) છે. 140/90 થી ઉપરનાં દબાણો માટે દાક્તરી સલાહની જરૂર પડે છે. લોહીના ઊંચા દબાણને લીધે હૃદય, કિડની અને બીજા અવયવોને નુકસાન થાય છે અને તેનું નિયંત્રણ કરવું જ પડે છે.

પ્રકરણ 11

દ્રવ્યના ઉષ્મીય ગુણધર્મો (THERMAL PROPERTIES OF MATTER)

11.1 પ્રસ્તાવના
11.2 તાપમાન અને ઉષ્મા
11.3 તાપમાનનું માપન
11.4 આદર્શ વાયુ સમીકરણ અને નિરપેક્ષ તાપમાન
11.5 ઉષ્મીય પ્રસરણ
11.6 વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા
11.7 કૅલોરીમેટ્રી
11.8 અવસ્થાનો ફેરફાર
11.9 ઉષ્માનું સ્થાનાંતર (પ્રસરણ)
11.10 ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાના સ્વાધ્યાય

11.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

ઉષ્મા અને તાપમાન માટે આપણા બધા પાસે એક સામાન્ય બુદ્ધિજન્ય ખ્યાલ છે. તાપમાન પદાર્થના ગરમપણાનું માપ છે. બરફથી ભરેલા બૉક્સ કરતાં ઉકળતું પાણી ધરાવતી કીટલી વધુ ગરમ હોય છે. ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે ઉષ્મા, તાપમાન વગેરેના ખ્યાલ કાળજીપૂર્વક વ્યાખ્યાયિત કરવા જરૂરી છે. આ પ્રકરણમાં તમે ઉષ્મા શું છે અને તેનું માપન કેવી રીતે થાય તે અંગે અભ્યાસ કરશો અને ઉષ્મા એક પદાર્થમાંથી બીજા પદાર્થમાં વહન પામે તેવી જુદી જુદી પ્રક્રિયાઓનો અભ્યાસ કરશો. આ દરમિયાન તમે જાણશો કે લુહાર લોખંડની વલય (રિંગ)ને બળદગાડાનાં લાકડાનાં પૈડાં પર ફિટ કરતાં અગાઉ શા માટે ગરમ કરે છે અને શા માટે સૂર્યાસ્ત પછી પવન સમુદ્ર કિનારે ઘણી વાર વિરુદ્ધ દિશામાં ફૂંકાય છે. તમે એ પણ શીખશો કે એવું શું થાય છે કે જ્યારે પાણી ઊકળે અથવા ઠારણ પામે ત્યારે આ પ્રક્રિયા દરમિયાન તેની અંદર કે બહાર તરફ ઘણી ઉષ્મા વહન પામતી હોવા છતાં તાપમાન બદલાતું નથી.

11.2 તાપમાન અને ઉષ્મા (TEMPERATURE AND HEAT)

આપણે તાપમાન અને ઉષ્માની વ્યાખ્યાથી દ્રવ્યના ઉષ્મીય ગુણધર્મોના અભ્યાસની શરૂઆત કરીશું. તાપમાન એ ગરમપણા કે ઠંડાપણાનું સાપેક્ષ માપ અથવા સૂચન છે. ગરમ વાસણ ઊંચું તાપમાન ધરાવે છે અને બરફનો ટુકડો નીચું તાપમાન ધરાવે છે, તેમ કહી શકાય. એક પદાર્થ કરતાં ઊંચું તાપમાન ધરાવતો બીજો પદાર્થ વધુ ગરમ છે તેમ કહેવાય. અહીં નોંધો કે ગરમ અને ઠંડું એ ઊંચા અને નીચા જેવી સાપેક્ષ સ્થિતિ છે. આપણે સ્પર્શ દ્વારા તાપમાન અનુભવી શકીએ છીએ પરંતુ આ તાપમાનની અનુભૂતિ અવિશ્વસનીય છે અને વૈજ્ઞાનિક હેતુસર તેનો ઉપયોગ કરવા માટે તેનો વિસ્તાર ઘણો મર્યાદિત હોય છે.

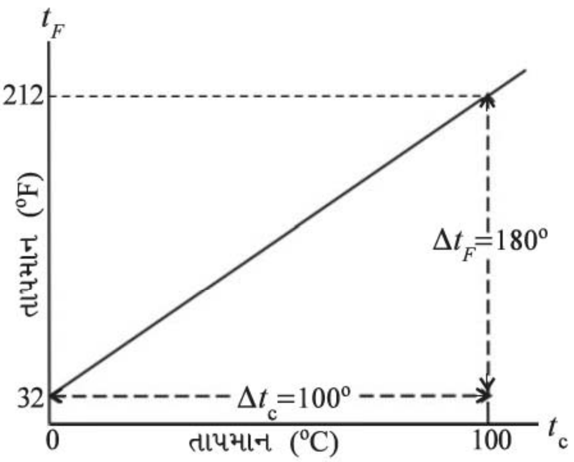
ઉનાળામાં ગરમ દિવસે બરફના પાણીથી ભરેલ પ્યાલાને ટેબલ પર મૂકીએ તો સમય જતાં ગરમ થાય છે અને આ જ ટેબલ પર ગરમ ચા ભરેલો કપ ઠંડો થાય છે, તેમ આપણે અનુભવ દ્વારા જોઈ શકીએ છીએ. આનો અર્થ એ થાય કે આ કિસ્સામાં જ્યારે બરફના ઠંડા પાણીનું અથવા ગરમ ચાનું તાપમાન તેની આસપાસનાં માધ્યમ કરતાં જુદું હોય ત્યારે તંત્ર

અને તેની આસપાસનાં માધ્યમનું તાપમાન સમાન ન થાય ત્યાં સુધી તંત્ર અને તેની આસપાસનાં માધ્યમ વચ્ચે ઉષ્માની આપ-લે થાય છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે બરફનાં ઠંડા પાણીથી ભરેલા કાચના પ્યાલાના કિસ્સામાં ઉષ્મા વાતાવરણમાંથી કાચના પ્યાલા તરફ જ્યારે ગરમ ચાનાં કિસ્સામાં તેનું વહન ચાના કપમાંથી વાતાવરણમાં થાય છે. આમ આપણે કહી શકીએ છીએ કે **ઉષ્મા, ઊર્જાનું એવું સ્વરૂપ છે જેનું વહન બે (અથવા બેથી વધુ) તંત્રો વચ્ચે અથવા કોઈ તંત્ર અને તેના પરિસર વચ્ચે તાપમાનના તફાવતને કારણે થાય છે.** વહન પામતી ઉષ્માઊર્જાનો SI એકમ જૂલ (J)માં દર્શાવાય છે જ્યારે તાપમાનનો SI એકમ કૅલ્વિન (K) અને તાપમાન માટે સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવાતો એકમ અંશ સૅલ્સિયસ (°C) છે. જ્યારે કોઈ પદાર્થને ગરમ કરવામાં આવે ત્યારે તેમાં ઘણાબધા ફેરફારો થાય છે. તેનું તાપમાન વધી શકે છે, તે વિસ્તારિત (expand) થઈ શકે છે; તેની અવસ્થા બદલાઈ શકે છે. અનુવર્તી પરિચ્છેદોમાં આપણે જુદા જુદા પદાર્થ પર ઉષ્માની અસર વિશેનો અભ્યાસ કરીશું.

11.3 તાપમાનનું માપન (MEASUREMENT OF TEMPERATURE)

થરમૉમીટરનો ઉપયોગ કરીને તાપમાનનું માપન કરી શકાય છે. તાપમાનમાં વધારા સાથે દ્રવ્યના ઘણા ભૌતિક ગુણધર્મોમાં થતાં પર્યાપ્ત ફેરફારોનો, થરમૉમીટરની રચનામાં આધાર તરીકે ઉપયોગ કરી શકાય છે. તાપમાન સાથે પ્રવાહીના કદમાં થતાં ફેરફારો એ સામાન્ય રીતે ઉપયોગમાં લેવાતો ગુણધર્મ છે. ઉદાહરણ તરીકે સામાન્ય થરમૉમીટર (કાચમાં ભરેલ પ્રવાહી પ્રકારનું)થી તમે સૌ પરિચિત છો. પ્રવાહી - કાચ થરમૉમીટરમાં મોટે ભાગે પ્રવાહી તરીકે આલ્કોહૉલ અને પારાનો ઉપયોગ થાય છે.

થરમૉમીટરોનું અંકન એવી રીતે કરવામાં આવે છે કે જેથી તે આપેલ તાપમાને આંકડાકીય મૂલ્ય આપી શકે. કોઈ એક પ્રમાણભૂત માપક્રમ વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે બે નિશ્ચિત સંદર્ભ બિંદુઓની જરૂર પડે. હવે તાપમાન સાથે દરેક પદાર્થના પરિમાણ બદલાય છે. પ્રસરણ માટે નિરપેક્ષ સંદર્ભ ઉપલબ્ધ નથી. જોકે, જરૂરી નિશ્ચિત બિંદુ તે જ તાપમાને બનતી ભૌતિક ઘટનાઓ સાથે સંબંધિત હોવું જોઈએ. આવા બે સાનુકૂળ નિશ્ચિત બિંદુઓ જાણીતાં છે, પાણીનું ઠારણ બિંદુ અને ઉત્કલન બિંદુ. આ બે બિંદુઓ જે તાપમાનોએ પ્રમાણભૂત દબાણ હેઠળ શુદ્ધ પાણી ઠારણ પામે અને ઉત્કલન પામે તે છે. ફેરનહીટ તાપમાન માપક્રમ અને સેલ્સિયસ તાપમાન માપક્રમ એ તાપમાનના બે જાણીતા માપક્રમ છે. ઠારણબિંદુ અને ઉત્કલનબિંદુ માટે ફેરનહીટ માપક્રમ પર મૂલ્યો અનુક્રમે 32 °F અને 212 °F તથા સેલ્સિયસ માપક્રમ પર 0 °C અને 100 °C છે. આ બંને સંદર્ભ બિંદુઓ વચ્ચે ફેરનહીટ માપક્રમ પર 180 અને સેલ્સિયસ માપક્રમ પર 100 સમાન ગાળાઓ છે.



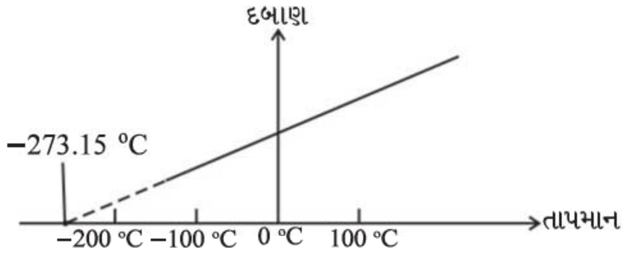
આકૃતિ 11.1 ફેરનહીટ તાપમાન (t_F) વિરુદ્ધ સેલ્સિયસ તાપમાન (t_c)નો આલેખ

બંને માપક્રમ વચ્ચેના રૂપાંતરણ માટેનો સંબંધ ફેરનહીટ તાપમાન (t_F) વિરુદ્ધ સેલ્સિયસ તાપમાન (t_c)નાં આલેખ પરથી મેળવી શકાય છે. જે એક સુરેખ છે (આકૃતિ 11.1). જેનું સમીકરણ નીચે મુજબ છે :

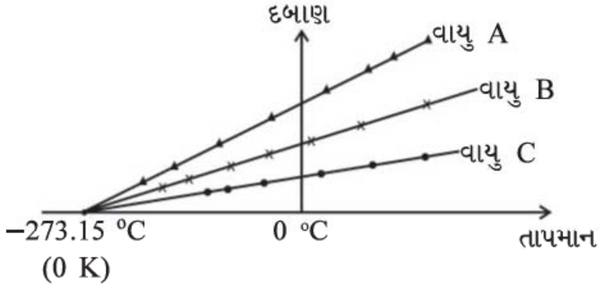
$$\frac{t_F - 32}{180} = \frac{t_c}{100} \qquad (11.1)$$

11.4 આદર્શ વાયુ સમીકરણ અને નિરપેક્ષ તાપમાન (IDEAL-GAS EQUATION AND ABSOLUTE TEMPERATURE)

જુદા જુદા પ્રવાહીના ઉષ્મીય પ્રસરણના ગુણધર્મો જુદા જુદા હોવાને કારણે પ્રવાહી-કાચ થરમૉમીટરો વડે માપેલાં તાપમાનો નિયત બિંદુઓ કરતાં જુદાં હોય છે. પરંતુ કોઈ પણ વાયુનો ઉપયોગ કરીને બનાવેલ વાયુ થરમૉમીટર વડે તાપમાનનાં મૂલ્યો સમાન મળે છે. પ્રયોગો દર્શાવે છે કે ઓછી ઘનતા ધરાવતા બધા જ વાયુઓની પ્રસરણની વર્તણૂક સમાન હોય છે. આપેલ જથ્થા (દળ)ના વાયુની વર્તણૂક દબાણ, કદ અને તાપમાન (P, V અને T) (જ્યાં $T = t + 273.15$, t °Cમાં તાપમાન) જેવા ચલ વડે વર્ણવી શકાય છે. જ્યારે તાપમાન અચળ રાખવામાં આવે ત્યારે આપેલ જથ્થાના વાયુના દબાણ અને કદ વચ્ચેનો સંબંધ PV = અચળ છે. આ સંબંધ બોઇલના નિયમ તરીકે જાણીતો છે. જે અંગ્રેજ રસાયણશાસ્ત્રી રોબર્ટ બોઇલે (1627-1691) શોધ્યો હતો. અચળ દબાણે આપેલ જથ્થાના વાયુના કદ અને તાપમાન વચ્ચેનો સંબંધ V/T = અચળ છે. આ સંબંધ ફ્રેન્ચ વૈજ્ઞાનિક જેક્સ ચાર્લ્સ (1747-1823)નાં નામ પરથી ચાર્લ્સના નિયમ તરીકે જાણીતો છે. પૂરતી ઓછી ઘનતાવાળા વાયુઓ આ નિયમોનું પાલન કરે છે, માટે તેમને એકત્રિત કરીને એક સંયુક્ત સંબંધ વડે દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ **11.2** *ઓછી ઘનતાવાળા વાયુના અચળ કદે દબાણ વિરુદ્ધ તાપમાનનો આલેખ*



આકૃતિ **11.3** *દબાણ વિરુદ્ધ તાપમાનનો આલેખ જેને પાછળ તરફ લંબાવતા તે દર્શાવે છે કે નીચી ઘનતાવાળા વાયુઓ સમાન નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાન દર્શાવે છે.*

એ નોંધો કે આપેલ જથ્થાના વાયુ માટે જો PV = અચળ અને V/T = અચળ હોય તો PV/T એ પણ અચળ થઈ શકે. આ સંબંધ આદર્શવાયુ નિયમ તરીકે જાણીતો છે. જેને વધુ વ્યાપક સ્વરૂપે લખી શકાય છે કે જેથી આપેલ જથ્થાના કોઈ એક વાયુ માટે નહિ પરંતુ કોઈ પણ જથ્થાના કોઈ પણ મંદ (dilute) વાયુને લાગુ પાડી શકાય છે, જેને **આદર્શવાયુ સમીકરણ** કહે છે.

$$\frac{PV}{T} = \mu R$$

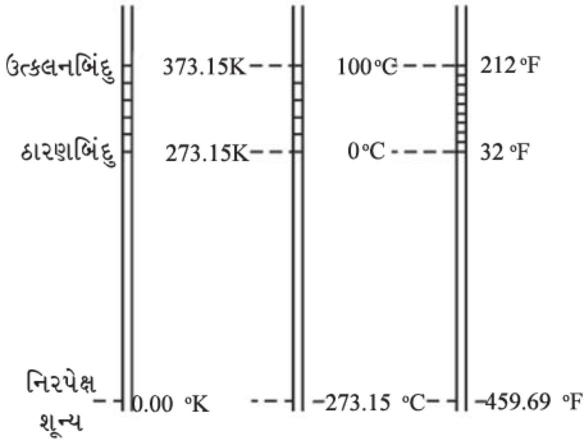
અથવા $PV = \mu RT$ (11.2)

જ્યાં, μ આપેલ વાયુની મોલ સંખ્યા છે અને R ને સાર્વત્રિક વાયુ નિયતાંક કહે છે.

$R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

સમીકરણ (11.2) પરથી આપણે શીખ્યા કે દબાણ અને કદ તાપમાનના સપ્રમાણમાં છે : $PV \propto T$. આ સંબંધ તાપમાનનાં માપન માટે અચળ કદ વાયુ થરમૉમીટરમાં વાયુનો ઉપયોગ કરવાની સ્વીકૃતિ આપે છે. વાયુનું કદ અચળ રાખવામાં આવે ત્યારે $P \propto T$ મળે છે. આ રીતે અચળ કદ વાયુ થર્મોમીટર વડે મપાયેલ તાપમાન દબાણના પદમાં મળે છે. આ કિસ્સામાં દબાણ વિરુદ્ધ તાપમાનનો આલેખ દોરવામાં આવે તો તે આકૃતિ 11.2 મુજબ સુરેખ મળે છે.

જો કે નીચા તાપમાને વાસ્તવિક વાયુ માટે મેળવેલા માપનનાં મૂલ્યો આદર્શવાયુ નિયમની ધારણા મુજબનાં મૂલ્યો કરતાં જુદાં પડે છે. પરંતુ તાપમાનના મોટા વિસ્તાર માટે સંબંધ રેખીય હોય છે તથા એવું જોવા મળે છે કે જો વાયુ વાયુમય અવસ્થામાં જ રહે તો તાપમાનમાં ઘટાડો કરતાં દબાણ શૂન્ય થઈ શકે છે. આકૃતિ 11.3માં દર્શાવ્યા મુજબ સુરેખ આલેખને અક્ષ સુધી લંબાવવામાં આવે તો આદર્શ વાયુ માટે નિરપેક્ષ લઘુતમ તાપમાન મેળવી શકાય છે. આ તાપમાનનું મૂલ્ય –273.15 °C મળે છે અને તે **નિરપેક્ષ શૂન્ય** તરીકે ઓળખાય છે. બ્રિટિશ વૈજ્ઞાનિક લૉર્ડ કેલ્વિને દર્શાવ્યું છે કે, કેલ્વિન તાપમાન માપક્રમ અથવા નિરપેક્ષ તાપમાન માપક્રમનો આધાર નિરપેક્ષ શૂન્ય છે. આ માપક્રમ પર –273.15 °Cને શૂન્યબિંદુ તરીકે લેવામાં આવે છે અર્થાત તે 0 K (આકૃતિ 11.4) છે.



આકૃતિ **11.4** *કેલ્વિન, સેલ્સિયસ અને ફેરનહીટ તાપમાન માપક્રમોની સરખામણી*

તાપમાનના કેલ્વિન અને સેલ્સિયસ માપક્રમના એકમના માપ સમાન છે. તેથી આ માપક્રમો પર તાપમાનનો સંબંધ નીચે મુજબ છે

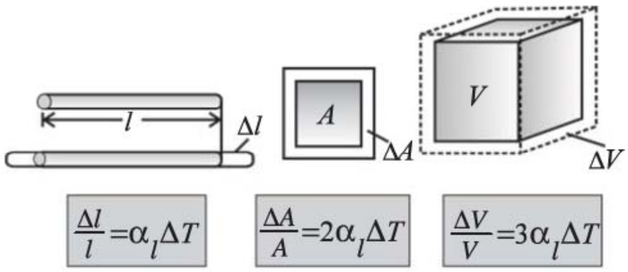
$$T = t_c + 273.15 \quad (11.3)$$

11.5 ઉષ્મીય પ્રસરણ (THERMAL EXPANSION)

તમે ઘણી વખત અવલોકન કર્યું હશે કે ધાતુનાં આંટાવાળાં ઢાંકણાં (lid) વડે સખત રીતે બંધ કરેલી બૉટલને ખોલવા માટે ગરમ પાણીમાં થોડા સમય માટે રાખવામાં આવે છે. આમ, કરવાથી ધાતુના ઢાંકણાનું પ્રસરણ થાય છે અને તેના આંટા સરળતાથી ખોલી શકાય છે. પ્રવાહીના કિસ્સામાં તમે અવલોકન કર્યું હશે કે, જ્યારે થરમૉમીટરને થોડા હૂંફાળા પાણીમાં મૂકવામાં આવે ત્યારે પારો થરમૉમીટરમાં ઉપર ચઢે છે. જો

આપણે થરમૉમીટરને ગરમ પાણીમાંથી બહાર કાઢીએ તો પારાની સપાટી ફરી નીચે ઊતરે છે. આ જ રીતે વાયુના કિસ્સામાં, એક ફુગ્ગાને ઠંડા ઓરડામાં થોડો ફુલાવી તેને ગરમ પાણીમાં મૂકવામાં આવે, તો તે તેના પૂર્ણ પરિમાણ સુધી ફૂલે છે. તેનાથી વિપરીત પૂર્ણ રીતે ફુલાવેલ ફુગ્ગાને ઠંડા પાણીમાં ડુબાડવામાં આવે છે ત્યારે તેની અંદર રહેલી હવાના સંકોચનને કારણે તે સંકોચાવાનું શરૂ કરે છે.

આપણો સામાન્ય અનુભવ એવો રહ્યો છે કે, મોટા ભાગના પદાર્થોને ગરમ કરતાં તે પ્રસરણ પામે છે અને ઠંડા પાડતાં સંકોચાય છે. વસ્તુના તાપમાનમાં થતા ફેરફારને કારણે તેના પરિમાણમાં ફેરફાર થાય છે. વસ્તુના તાપમાનમાં વધારો થતાં તેનાં પરિમાણોમાં વધારો થાય છે. જેને ઉષ્મીય પ્રસરણ કહે છે. લંબાઈમાં થતાં વધારાને **રેખીય પ્રસરણ (linear expansion)** કહે છે. ક્ષેત્રફળમાં થતાં વધારાને **પૃષ્ઠ-પ્રસરણ (area expansion)** કહે છે. કદમાં થતાં વધારાને **કદ-પ્રસરણ (volume expansion)** કહે છે. (આકૃતિ 11.5)



(a) *રેખીય પ્રસરણ* (b) *પૃષ્ઠ-પ્રસરણ* (c) *કદ-પ્રસરણ*

***આકૃતિ* 11.5** *ઉષ્મીય પ્રસરણ*

જો પદાર્થ લાંબા સળિયા સ્વરૂપે હોય અને તેના તાપમાનમાં ΔT જેટલો નાનો ફેરફાર કરવામાં આવે, તો તેની લંબાઈમાં થતો આંશિક ફેરફાર $\Delta l/l$, ΔT ને સપ્રમાણ હોય છે.

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \Delta T \qquad (11.4)$$

અહીં, α_l એ **રેખીય પ્રસરણાંક** (અથવા રેખીય પ્રસરતા) તરીકે ઓળખાય છે, અને તે સળિયાનાં દ્રવ્યનો વિશિષ્ટ ગુણ છે. કોષ્ટક 11.1માં કેટલાક પદાર્થો માટે 0°C થી 100°Cનાં તાપમાનનાં ગાળા માટે રેખીય પ્રસરણાંકનાં વિશિષ્ટ સરેરાશ મૂલ્યો આપેલાં છે. આ કોષ્ટક પરથી કાચ અને તાંબા માટે α_l નાં મૂલ્યોની સરખામણી કરીએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે તાપમાનના સમાન વધારા માટે કાચ કરતાં તાંબું પાંચગણું વધુ પ્રસરણ પામે છે. સામાન્ય રીતે ધાતુઓમાં પ્રસરણ વધુ થાય છે અને તેમના α_lનાં મૂલ્યો પ્રમાણમાં ઊંચાં હોય છે.

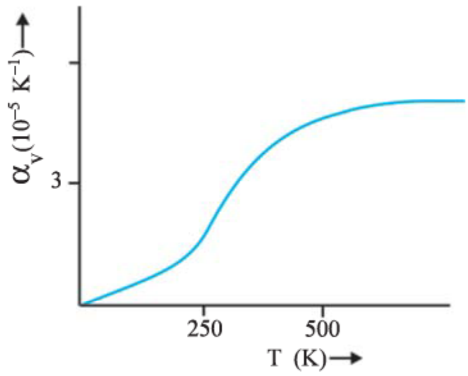
કોષ્ટક 11.1 કેટલાંક દ્રવ્યો માટે રેખીય પ્રસરણાંકનાં મૂલ્યો

દ્રવ્યો	$\alpha_1 (10^{-5}\ K^{-1})$
ઍલ્યુમિનિયમ	2.5
બ્રાસ (પિત્તળ)	1.8
લોખંડ	1.2
તાંબું	1.7
ચાંદી	1.9
સોનુ	1.4
કાચ (પાયરેક્સ)	0.32
સીસું	0.29

આ જ રીતે કોઈ પદાર્થનાં તાપમાનમાં ΔT જેટલો ફેરફાર કરતાં તેનાં કદમાં થતો આંશિક ફેરફાર $\Delta V/V$ લઈએ તો **કદ-પ્રસરણાંક** (અથવા કદ પ્રસરતા) α_v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય :

$$\alpha_v = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)\frac{1}{\Delta T} \qquad (11.5)$$

અહીં, α_v પદાર્થની લાક્ષણિકતા છે પરંતુ ચોક્કસપણે અચળાંક નથી. સામાન્ય રીતે તે તાપમાન પર આધારિત છે (આકૃતિ 11.6). એવું જોવા મળેલ છે કે માત્ર ઊંચા તાપમાને α_v અચળ થઈ જાય છે.



***આકૃતિ* 11.6** *તાપમાન વિધેય તરીકે તાંબાનાં કદ-પ્રસરણાંકનાં મૂલ્યો*

કોષ્ટક 11.2માં 0 °C થી 100 °Cનાં તાપમાનના ગાળા માટે કેટલાંક સામાન્ય દ્રવ્યો માટે કદ-પ્રસરણાંકનાં મૂલ્યો આપેલાં છે. તમે જોઈ શકો છો કે આ પદાર્થો (ઘન કે પ્રવાહી) માટે કદ-પ્રસરણાંકનાં મૂલ્યો વધુ પ્રમાણમાં નાનાં છે. પરંતુ પાયરેક્ષ

કાચ અને ઇન્વાર (આયન-નિકલની ખાસ મિશ્ર ધાતુ) જેવાં દ્રવ્યો માટે α_vનાં મૂલ્યો ચોક્કસપણે નીચાં છે. આ કોષ્ટક પરથી એ પણ જોઈ શકાય છે કે આલ્કોહૉલ (ઇથેનોલ) માટે α_v નું મૂલ્ય પારા કરતાં વધુ છે અને તાપમાનના સમાન વધારા માટે પારા કરતાં પ્રસરણ પણ વધુ પામે છે.

કોષ્ટક 11.2 કેટલાક પદાર્થોનાં કદ-પ્રસરણાંકના મૂલ્યો

દ્રવ્યો	α_v (K^{-1})
ઍલ્યુમિનિયમ	7×10^{-5}
બ્રાસ (પિત્તળ)	6×10^{-5}
લોખંડ	3.55×10^{-5}
પેરાફિન	58.8×10^{-5}
કાચ (સામાન્ય)	2.5×10^{-5}
કાચ (પાયરેક્ષ)	1×10^{-5}
સખત રબર	2.4×10^{-4}
ઇન્વાર	2×10^{-6}
પારો	18.2×10^{-5}
પાણી	20.7×10^{-5}
આલ્કોહૉલ (ઇથેનોલ)	110×10^{-5}

પાણી અનિયમિત વર્તણૂક દર્શાવે છે. તેને 0 °C થી 4 °C સુધી ગરમ કરતાં સંકોચન અનુભવે છે. આપેલ જથ્થાના પાણીનું ઓરડાના તાપમાનેથી ઠારણ કરતાં તેનું તાપમાન 4 °C થાય ત્યાં સુધી કદ ઘટે છે [આકૃતિ [11.7(a)]. 4 °C નીચે તેનું કદ વધે છે અને તેની ઘનતા ઘટે છે [આકૃતિ [11.7(b)].

આનો અર્થ એ થાય કે 4 °C તાપમાને પાણીની ઘનતા મહત્તમ હોય છે. આ ગુણધર્મની એક મહત્ત્વની પ્રાકૃતિક અસર એ છે કે, તળાવ, સરોવર જેવાં જળાશયોની ઉપરની સપાટી પ્રથમ ઠારણ પામે છે. જેવું સરોવર 4 °C સુધી ઠંડું થાય ત્યારે સપાટી નજીકનું પાણી પોતાની ઊર્જા વાતાવરણમાં ગુમાવે છે અને ઘટ્ટ થાય છે અને નીચે જાય છે. તળિયે રહેલું હુંફાળું ઓછું ઘટ્ટ પાણી ઉપર આવે છે. પરંતુ જ્યારે સપાટી પરના પાણીનું તાપમાન એક વખત 4 °C નીચે પહોંચે છે ત્યારે તેની ઘનતા ઘટે છે અને તેથી તે સપાટી પર જ રહે છે અને ત્યાં તે ઠારણ પામી જાય છે. જો પાણીનો આવો ગુણધર્મ ન હોત, તો સરોવર અને તળાવનું પાણી તળિયાથી ઉપર સુધી ઠારણ પામી જાય જેથી મોટા ભાગનાં જળચર પ્રાણીઓ અને વનસ્પતિનાં જીવન નાશ પામી જાત.

સામાન્ય તાપમાને ઘન અને પ્રવાહીઓ કરતાં વાયુઓ વધુ પ્રસરણ અનુભવે છે. પ્રવાહીઓ માટે કદ-પ્રસરણાંક સાપેક્ષ રીતે તાપમાન પર આધારિત નથી, પરંતુ વાયુઓ માટે તે તાપમાન પર આધારિત છે. આદર્શ વાયુ સમીકરણ પરથી અચળ દબાણે આદર્શ વાયુ માટે કદ-પ્રસરણાંક મેળવી શકાય છે.

$$PV = \mu RT$$

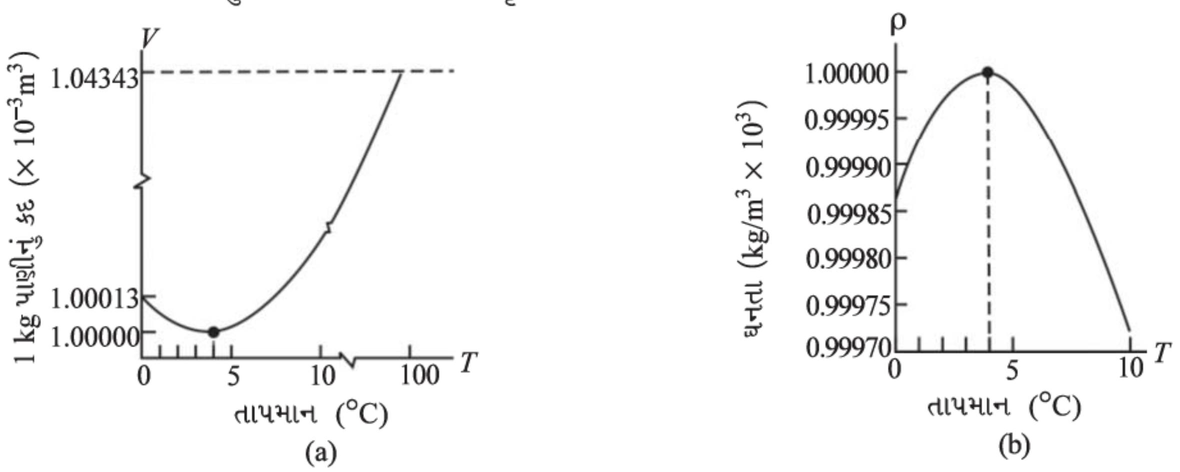
અચળ દબાણે

$$P\Delta V = \mu R \Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

એટલે કે, $\alpha_v = \frac{1}{T}$ આદર્શ વાયુ માટે (11.6)

0 °C તાપમાને $\alpha_v = 3.7 \times 10^{-3}\ K^{-1}$ જે ઘન અને પ્રવાહીઓ કરતાં ઘણો મોટો છે. સમીકરણ (11.6) દર્શાવે છે કે α_v તાપમાન પર આધારિત છે, તે તાપમાનના વધારા સાથે ઘટે છે. ઓરડાનાં તાપમાને વાયુ માટે અચળ



આકૃતિ 11.7 પાણીનું ઉષ્મીય પ્રસરણ

દબાણે α_v લગભગ $3300 \times 10^{-6} K^{-1}$ છે. આ મૂલ્ય વિશિષ્ટ પ્રવાહીઓનાં કદ-પ્રસરણાંક કરતાં ઘણા મોટા ક્રમનું છે.

કદ-પ્રસરણાંક (α_v) અને રેખીય પ્રસરણાંક (α_l) વચ્ચે સરળ સંબંધ છે. ધારો કે l લંબાઈનો એક સમઘન છે. જ્યારે તેનાં તાપમાનમાં ΔT જેટલો વધારો કરવામાં આવે છે ત્યારે તે બધી જ દિશામાં એક સમાન પ્રસરણ પામે છે.

તેથી, $\Delta l = \alpha_l l \Delta T$

માટે $\Delta V = (l + \Delta l)^3 - l^3 \simeq 3l^2 \Delta l$ (11.7)

સમીકરણ 11.7માં આપણે (Δl)ને lની સરખામણીએ નાનો હોવાને કારણે $(\Delta l)^2$ અને $(\Delta l)^3$ને અવગણેલ છે. તેથી,

$$\Delta V = \frac{3V\,\Delta l}{l} = 3V\,\alpha_l\,\Delta T \qquad (11.8)$$

જે પરથી મળે છે કે,

$$\alpha_v = 3\alpha_l \qquad (11.9)$$

એક સળિયાને તેના બંને છેડા દૃઢ આધાર સાથે સજ્જડ જડિત કરીને તેનું ઉષ્મીય પ્રસરણ રોકવામાં આવે તો શું થાય ? સ્પષ્ટ છે કે દૃઢ આધારો વડે સળિયાના છેડા પર લાગુ પડતાં બાહ્ય બળોને કારણે તેમાં દાબીય વિકૃતિ ઉત્પન્ન થશે. જેને અનુરૂપ સળિયામાં ઉદ્ભવતાં પ્રતિબળને **તાપીય પ્રતિબળ (thermal stress)** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે સ્ટીલના એક પાટાની લંબાઈ 5 m અને તેના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 40 cm^2 છે અને તાપમાનમાં 10 °C જેટલો વધારો કરી તેનું તાપીય પ્રસરણ રોકવામાં આવે છે. સ્ટીલનો રેખીય પ્રસરણાંક $\alpha_{l\,(\text{સ્ટીલ})} = 1.2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$ છે. તેથી દાબીય વિકૃતિ $\frac{\Delta l}{l} = \alpha_{l\,(\text{સ્ટીલ})}\,\Delta T = 1.2 \times 10^{-5} \times 10 = 1.2 \times 10^{-4}$ થાય.

સ્ટીલ માટે યંગ મૉડ્યુલસ $Y_{(\text{સ્ટીલ})} = 2 \times 10^{11} N\ m^{-2}$

તેથી ઉદ્ભવતું તાપીય પ્રતિબળ $\frac{\Delta F}{A} = Y_{(\text{સ્ટીલ})}\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4 \times 10^7\ N\ m^{-2}$.

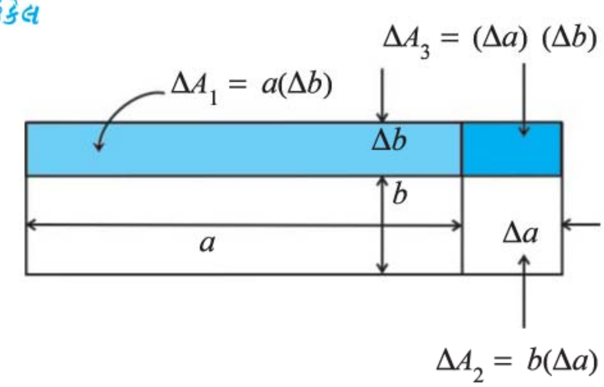
જેને અનુરૂપ બાહ્ય બળ

$$\Delta F = AY_{\text{સ્ટીલ}}\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4 \times 10^7 \times 40 \times 10^{-4} \simeq 10^5\ N.$$

જો સ્ટીલના આવા બે પાટાના બાહ્ય છેડાને જડિત કરેલા હોય અને તેમનાં અંદર તરફના બે છેડા જોડેલા હોય, તો આટલા મૂલ્યનું બળ પાટાને સરળતાથી વાળી દેશે.

▶ **ઉદાહરણ 11.1** દર્શાવો કે ઘન પદાર્થની લંબચોરસ તક્તી માટે પૃષ્ઠ-પ્રસરણાંક $(\Delta A/A)/\Delta T$ તેના રેખીય પ્રસરણાંક α_l કરતાં બમણો હોય છે.

ઉકેલ



આકૃતિ 11.8

ધારો કે ઘન દ્રવ્યની એક લંબચોરસ તક્તીની લંબાઈ a અને પહોળાઈ b છે (આકૃતિ 11.8). જ્યારે તેનાં તાપમાનમાં ΔT જેટલો વધારો કરવામાં આવે છે ત્યારે a માં થતો વધારો $\Delta a = \alpha_l\, a\, \Delta T$ અને bમાં થતો વધારો $\Delta b = \alpha_l\, b\, \Delta T$. આકૃતિ 11.8 પરથી, ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$$
$$\Delta A = a\,\Delta b + b\,\Delta a + (\Delta a)(\Delta b)$$
$$= a\,\alpha_l b\,\Delta T + b\,\alpha_l a\,\Delta T + (\alpha_l)^2\, ab\,(\Delta T)^2$$
$$= \alpha_l\, ab\,\Delta T\,(2 + \alpha_l\,\Delta T)$$
$$= \alpha_l\, A\,\Delta T\,(2 + \alpha_l\,\Delta T)$$

જોકે $\alpha_l \simeq 10^{-5}\ K^{-1}$. કોષ્ટક 11.1 પરથી 2ની સરખામણીમાં આપેલ તાપમાનનાં ગાળા માટે $\alpha_l \Delta T$નું ગુણનફળ નાનું હોવાથી તેને અવગણી શકાય છે. તેથી,

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)\frac{1}{\Delta T} \simeq 2\alpha_l$$ ◀

▶ **ઉદાહરણ 11.2** એક લુહાર બળદગાડાનાં લાકડાનાં પૈડાની ધાર પર લોખંડની રિંગ જડે છે. 27 °C તાપમાને પૈડાની ધાર અને રિંગનાં વ્યાસ અનુક્રમે 5.243 m અને 5.231 m છે, તો રિંગને પૈડાની ધાર પર જડવા માટે કેટલા તાપમાન સુધી ગરમ કરવી જોઈએ ? જ્યાં, ($\alpha_l = 1.20 \times 10^{-5}\ K^{-1}$)

ઉકેલ આપેલ $T_1 = 27$ °C

$L_{T1} = 5.231$ m

$L_{T2} = 5.243$ m

તેથી,

$$L_{T2} = L_{T1}\,[1 + \alpha_l\,(T_2 - T_1)]$$

$$5.243\ m = 5.231\ m\,[1 + 1.20 \times 10^{-5} K^{-1}\,(T_2 - 27\ °C)]$$

$$\therefore\ T_2 = 218\ °C$$ ◀

11.6 વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (SPECIFIC HEAT CAPACITY)

એક પાત્રમાં પાણી લઈ તેને બર્નર પર મૂકી ગરમ કરો. તમે જોશો કે, પાણીના પરપોટા ઉપર આવવાનું શરુ કરશે. જેમ તાપમાન વધે તેમ પાણીના કણોની ગતિ વધે છે અને પાણી ઉકળવા લાગે ત્યાં સુધી તેની ગતિ પ્રક્ષુબ્ધ બની જાય છે. પદાર્થનાં તાપમાનમાં વધારો કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માનો જથ્થો કયાં પરિબળો પર આધારિત છે ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવા માટે, પ્રથમ તબક્કામાં આપેલ જથ્થાનાં પાણીનું તાપમાન 20 °C જેટલું વધારવા માટે ગરમ કરો અને આ માટે લાગતો સમય નોંધો. ફરીથી સમાન જથ્થાના પાણીને તે જ ઉષ્માપ્રાપ્તિ સ્થાન વડે તેનાં તાપમાનમાં 40 °C જેટલો વધારો કરો. આ માટે લાગતો સમય સ્ટૉપવૉચની મદદથી નોંધો. તમે જોઈ શકશો કે, આ વખતે લગભગ બમણો સમય લાગે છે. એટલે કે, સમાન જથ્થાનાં પાણીના તાપમાનમાં બમણો વધારો કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માનો જથ્થો બમણો હોય છે.

બીજા તબક્કામાં તમે બમણાં જથ્થાનું પાણી લઈ તે જ ઉષ્માપ્રાપ્તિ સ્થાનની ગોઠવણી દ્વારા તેનાં તાપમાનમાં 20 °Cનો વધારો કરો. તમે જોઈ શકશો કે આ માટે લાગતો સમય પ્રથમ તબક્કામાં લાગતાં સમય કરતાં બમણો હશે.

ત્રીજા તબક્કામાં, પાણીને બદલે તેટલા જ જથ્થામાં કોઈ તેલ (સરસવ તેલ)ને ગરમ કરી તેનું તાપમાન 20 °C વધારો. આ માટે લાગતો સમય તે જ સ્ટૉપવૉચ વડે નોંધો. તમે જોઈ શકશો કે આ માટે લાગતો સમય ઓછો હોય છે. એટલે કે, અહીં જરૂરી ઉષ્માનો જથ્થો, સમાન જથ્થાનાં પાણીનાં તાપમાનમાં સમાન વધારો કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થા કરતાં ઓછો છે.

ઉપરનાં અવલોકનો દર્શાવે છે કે આપેલા પદાર્થને ગરમ કરવા માટે જરૂરી ઉષ્માનો જથ્થો, પદાર્થના દળ m, તાપમાનનો ફેરફાર ΔT અને પદાર્થની જાત પર આધારિત છે. જ્યારે આપેલ ઉષ્માનો જથ્થો પદાર્થ વડે શોષાય અથવા ઉત્સર્જાય ત્યારે તેના તાપમાનમાં ફેરફાર થાય છે. આ લાક્ષણિકતા પદાર્થની **ઉષ્માધારિતા (heat capacity)** નામની રાશિ વડે ઓળખાય છે. આપણે ઉષ્માધારિતા Sને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ :

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.10)$$

જ્યાં, ΔQ પદાર્થનાં તાપમાનમાં T થી $T + \Delta T$ જેટલો ફેરફાર કરવામાં આપેલ ઉષ્માનો જથ્થો છે.

તમે અવલોકન કર્યું હશે કે, જુદા જુદા પદાર્થના સમાન જથ્થાને સમાન જથ્થાની ઉષ્મા આપતાં તેમનાં પરિણામી તાપમાનમાં થતો ફેરફાર સમાન હોતો નથી. તેનો નિષ્કર્ષ એવો નીકળે કે એકમ દળ ધરાવતાં દરેક પદાર્થનાં તાપમાનમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવા માટે શોષાતી કે ઉત્સર્જાતી ઉષ્માના જથ્થાનું મૂલ્ય અનન્ય (નિશ્ચિત) હોય છે. ઉષ્માના આ જથ્થાને તે પદાર્થની **વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (Specific heat capacity)** કહે છે.

જો m દળ ધરાવતાં પદાર્થનાં તાપમાનમાં ΔT જેટલો ફેરફાર કરવા માટે શોષાતી કે ઉત્સર્જન પામતી ઉષ્માનો જથ્થો ΔQ હોય, તો તે પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા નીચે મુજબ આપી શકાય :

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.11)$$

વિશિષ્ટિ ઉષ્માધારિતા દ્રવ્યનો એક એવો ગુણધર્મ છે કે, જ્યારે તેના દ્વારા આપેલ જથ્થાની ઉષ્માનું શોષણ (અથવા ઉત્સર્જન) થાય ત્યારે (સ્વરૂપ બદલાતું ન હોય તો) તેના તાપમાનમાં થતો ફેરફાર નક્કી કરે છે. એકમ દળના પદાર્થનાં તાપમાનમાં એક એકમનો ફેરફાર કરવા માટે શોષાતી કે ઉત્સર્જન પામતી ઉષ્માના જથ્થા વડે તેને વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. તે પદાર્થની જાત અને તેના તાપમાન પર આધાર રાખે છે. વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનો SI એકમ J kg^{-1} K^{-1} છે.

જો પદાર્થના જથ્થાનો ઉલ્લેખ દળ m, kg ને બદલે મોલ μનાં પદમાં દર્શાવવામાં આવે, તો આપણે પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા પ્રતિમોલ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ :

$$C = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.12)$$

જ્યાં, Cને પદાર્થની **મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (Molar specific heat capacity)** કહે છે. Sની માફક જ C પદાર્થની જાત અને તાપમાન પર આધાર રાખે છે. મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનો SI એકમ J mol^{-1} K^{-1} છે. જોકે વાયુઓ માટે વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાના સંબંધમાં Cને વ્યાખ્યાયિત કરવા કેટલીક વધારાની શરતો જરૂરી હોય છે. આ કિસ્સામાં દબાણ અથવા કદ અચળ રાખીને ઉષ્માનો વિનિમય કરી શકાય છે. જો ઉષ્માના વિનિમય દરમિયાન વાયુનું દબાણ અચળ રાખવામાં આવે તો તેને આપેલા **અચળ દબાણે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા** કહે છે. જેને C_p વડે દર્શાવાય છે. બીજી રીતે ઉષ્માના વિનિમય દરમિયાન વાયુનું કદ અચળ રાખવામાં આવે તો તેને આપેલા **અચળ કદે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા** કહે છે. જેને C_v વડે દર્શાવાય છે. વિગતવાર માહિતી માટે પ્રકરણ 12 જુઓ. વાતાવરણનાં દબાણે અને સામાન્ય તાપમાને કેટલાક પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાની સૂચિ કોષ્ટક 11.3માં દર્શાવેલ છે. જ્યારે કોષ્ટક 11.4માં કેટલાક વાયુઓ માટે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાની સૂચિ આપેલ છે.

કોષ્ટક 11.3 પરથી તમે જોઈ શકો છો કે અન્ય પદાર્થોની સરખામણીમાં પાણી માટે વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનું મૂલ્ય મહત્તમ છે. આ કારણસર, ઑટોમોબાઇલમાં રેડિયેટરમાં શીતક તરીકે

કોષ્ટક 11.3 વાતાવરણના દબાણે અને ઓરડાના તાપમાને કેટલાક પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા

પદાર્થો	વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)	પદાર્થો	વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)
ઍલ્યુમિનિયમ	900.0	બરફ	2060
કાર્બન	506.5	કાચ	840
તાંબું	386.4	લોખંડ	450
સીસું	127.7	કેરોસીન	2118
ચાંદી	236.1	ખાદ્યતેલ	1965
ટંગસ્ટન	134.4	પારો	140
પાણી	4186.0		

અને ગરમ પાણીની બૅગમાં તાપક તરીકે પાણીનો ઉપયોગ થાય છે. પોતાની ઊંચી વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાને કારણે ઉનાળામાં જમીન કરતાં પાણી ખૂબ જ ધીમી ગતિથી ગરમ થાય છે. જેને કારણે જ સમુદ્ર પરથી આવતા પવનો શીતળ હોય છે. હવે તમે કહી શકો છો કે, શા માટે રણ વિસ્તારમાં દિવસ દરમિયાન જમીન ઝડપથી ગરમ અને રાત્રે ઝડપથી ઠંડી પડે છે.

કોષ્ટક 11.4 કેટલાક વાયુઓ માટે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા

વાયુ	C_p ($J\ mol^{-1}\ K^{-1}$)	C_v ($J\ mol^{-1}\ K^{-1}$)
He	20.8	12.5
H_2	28.8	20.4
N_2	29.1	20.8
O_2	29.4	21.1
CO_2	37.0	28.5

11.7 કૅલોરિમેટ્રી (CALORIMETRY)

તંત્ર અને તેના પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનું આદાન-પ્રદાન અથવા વિનિમય થતો ન હોય તો તેવા તંત્રને અલગ કરેલું તંત્ર કહે છે. જ્યારે અલગ કરેલા તંત્રના જુદા જુદા ભાગો જુદાં જુદાં તાપમાને હોય ત્યારે ઊંચા તાપમાનવાળા ભાગમાંથી ઉષ્માના જથ્થાનું નીચા તાપમાનવાળા ભાગમાં વહન થાય છે. ઊંચા તાપમાને રહેલ ભાગે ગુમાવેલ ઉષ્મા, નીચા તાપમાને રહેલા ભાગે મેળવેલ ઉષ્મા બરાબર હોય છે.

કૅલોરિમેટ્રી એટલે ઉષ્માનું માપન. જો પરિસર વડે ઉષ્મા ગુમાવાતી ન હોય, તો ઊંચા તાપમાને રહેલી વસ્તુને બીજી નીચા તાપમાને રહેલી વસ્તુના સંપર્કમાં લાવવામાં આવે ત્યારે ગરમ વસ્તુએ ગુમાવેલ ઉષ્મા ઠંડી વસ્તુએ મેળવેલ ઉષ્મા બરાબર થાય છે. ઉષ્માનું માપન કરી શકાય એવી રચનાને **કૅલોરિમીટર** કહે છે. તે એક જ ધાતુ જેવી કે, તાંબું અથવા ઍલ્યુમિનિયમમાંથી બનાવેલ ધાતુપાત્ર અને તે જ ધાતુનું ભેળક ધરાવે છે. આ પાત્રને ગ્લાસવુલ જેવાં ઉષ્મારોધક દ્રવ્યો ધરાવતા લાકડાના આવરણમાં મૂકવામાં આવે છે. બહારનું આવરણ ઉષ્મા કવચ તરીકે વર્તે છે અને અંદરના પાત્રમાંથી થતો ઉષ્માવ્યય ઘટાડે છે. બાહ્ય આવરણમાં એક છિદ્ર (કાણું) હોય છે, જેનાં દ્વારા કૅલોરીમીટરમાં પારાવાળું થરમૉમીટર દાખલ કરવામાં આવે છે(આકૃતિ 11.20). 'મેળવેલ ઉષ્મા અને ગુમાવેલ ઉષ્મા સમાન હોય છે.' આ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને આપેલ ઘન પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા નક્કી કરવાની રીત નીચે આપેલ ઉદાહરણ પુરું પાડે છે :

▶ *ઉદાહરણ 11.3* 0.047 kg દળ ધરાવતાં ઍલ્યુમિનિયમના એક ગોળાને પૂરતા સમય માટે ઊકળતું પાણી ધરાવતા પાત્રમાં મુકેલ છે. પરિણામે આ ગોળાનું તાપમાન 100 °C થાય છે. હવે આ ગોળાને તરત જ 20 °C તાપમાન ધરાવતા 0.25 kg પાણીભરેલા, 0.14 kg દળવાળા તાંબાના કૅલોરીમીટરમાં સ્થાનાંતરીત કરવામાં આવે છે. પાણીનું તાપમાન વધીને 23 °C સ્થિર તાપમાન થાય છે, તો ઍલ્યુમિનિયમની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ આ ઉદાહરણના ઉકેલ માટે આપણે એ હકીકતનો ઉપયોગ કરીશું કે સ્થાયી અવસ્થામાં ઍલ્યુમિનિયમના ગોળાએ આપેલ ઉષ્મા, પાણી અને કૅલોરીમીટર વડે શોષાતી ઉષ્મા જેટલી હોય છે.

ઍલ્યુમિનિયમના ગોળાનું દળ (m_1) = 0.047 kg

ઍલ્યુમિનિયમના ગોળાનું પ્રારંભિક તાપમાન = 100 °C

અંતિમ તાપમાન = 23 °C

તાપમાનમાં થતો ફેરફાર (ΔT) = (100 °C − 23 °C) = 77 °C

ધારો કે ઍલ્યુમિનિયમના ગોળાની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા s_{Al} છે.

ઍલ્યુમિનિયમના ગોળાએ ગુમાવેલ ઉષ્માનો જથ્થો

$= m_1 s_{Al}\ \Delta T = 0.047\ kg \times s_{Al} \times 77\ °C$

પાણીનું દળ $(m_2) = 0.25\ kg$

કૅલોરીમીટરનું દળ $(m_3) = 0.14\ kg$

પાણી અને કૅલોરીમીટરનું પ્રારંભિક તાપમાન $= 20\ °C$

મિશ્રણનું અંતિમ તાપમાન $= 23\ °C$

તાપમાનમાં થતો ફેરફાર $(\Delta T_2) = 23\ °C - 20\ °C = 3\ °C$

પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા $(s_w) = 4.18 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$

તાંબાના કૅલોરીમીટરની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા

$= s_{cu} = 0.386 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$

પાણી અને કૅલોરીમીટરે મેળવેલ ઉષ્માનો જથ્થો

$= m_2\ s_w\ \Delta T_2 + m_3\ s_{cu}\ \Delta T_2$

$= [m_2\ s_w + m_3\ s_{cu}]\ (\Delta T_2)$

$= [0.25\ kg \times 4.18 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1} + 0.14\ kg \times 0.386 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}]\ (23\ °C - 20\ °C)$

સ્થાયી અવસ્થા માટે ઍલ્યુમિનિયમનાં ગોળાએ ગુમાવેલ ઉષ્મા = પાણીએ મેળવેલી ઉષ્મા + કૅલોરીમીટર દ્વારા મેળવેલી ઉષ્મા

માટે, $0.047\ kg \times s_{Al} \times 77\ °C$.

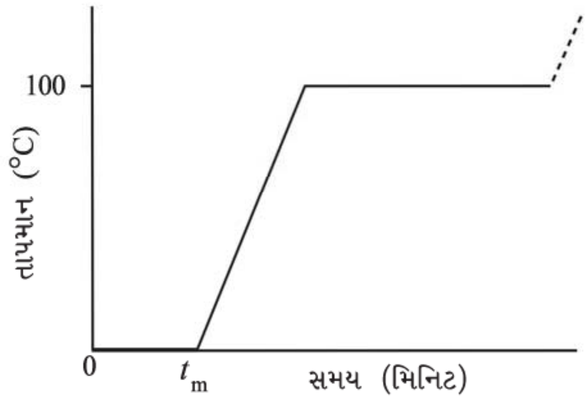
$= (0.25\ kg \times 4.18 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1} + 0.14\ kg \times 0.386 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1})(3\ °C)$

$s_{Al} = 0.911\ kJ\ Kg^{-1}\ K^{-1}$ ◀

11.8 અવસ્થાનો ફેરફાર (CHANGE OF STATE)

સામાન્ય રીતે દ્રવ્ય ત્રણ અવસ્થાઓ ધરાવે છે : ઘન, પ્રવાહી અને વાયુ. આ અવસ્થાઓ પૈકીની એક અવસ્થામાંથી બીજી અવસ્થામાં રૂપાંતર થાય તેને અવસ્થા-ફેરફાર કહે છે. બે સામાન્ય અવસ્થા-ફેરફાર ઘનમાંથી પ્રવાહી અને પ્રવાહીમાંથી વાયુ (તેનાથી ઊલટું પણ) છે. જ્યારે પદાર્થ અને તેના પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનો વિનિમય થાય ત્યારે આ ફેરફાર થાય છે. ગરમ કરવાથી કે ઠારણથી થતી અવસ્થા-ફેરફારના અભ્યાસ માટે નીચે આપેલી પ્રવૃત્તિ કરીએ :

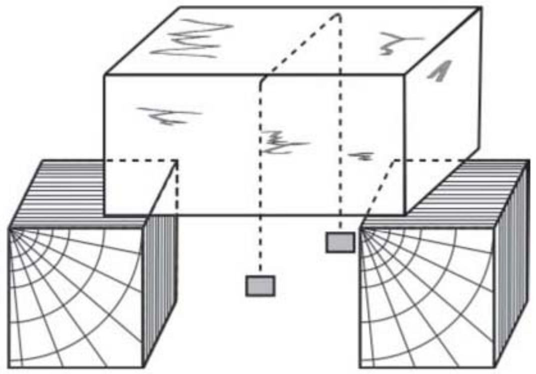
બરફના કેટલાક ટુકડા બીકરમાં લો. બરફનું તાપમાન (0 °C) નોંધો. અચળ ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન વડે તેને ધીમે ધીમે ગરમ કરો. દરેક મિનિટે તાપમાન નોંધો. પાણી તથા બરફનાં મિશ્રણને સતત હલાવતાં રહો. તાપમાન અને સમય વચ્ચેનો આલેખ દોરો (આકૃતિ 11.9) મુજબ. તમે જોઈ શકો છો કે જ્યાં સુધી બીકરમાં બરફ હોય ત્યાં સુધી તાપમાનમાં ફેરફાર થશે નહિ. આ પ્રક્રિયામાં, તંત્રને સતત ઉષ્મા આપવા છતાં તેનાં તાપમાનમાં કોઈ જ ફેરફાર થતો નથી. અહીં, આપેલ ઉષ્મા ઘન (બરફ) અવસ્થામાંથી પ્રવાહી (પાણી) અવસ્થાનાં રૂપાંતરણમાં વપરાય છે.



આકૃતિ 11.9 બરફને ગરમ કરતાં તેની સ્થિતિમાં થતાં ફેરફાર દર્શાવતો તાપમાન વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ (સ્કેલમાપ વગર)

ઘન અવસ્થામાંથી પ્રવાહી અવસ્થામાં થતાં રૂપાંતરને **ગલન (melting)** અને પ્રવાહી અવસ્થામાંથી ઘન અવસ્થામાં થતાં રૂપાંતરને **ઠારણ (fusion)** કહે છે. એવું અવલોકિત થયેલ છે કે સમગ્ર ઘન પદાર્થનો જથ્થો પીગળી ન જાય ત્યાં સુધી તાપમાન અચળ રહે છે. પદાર્થની **ઘનમાંથી પ્રવાહી અવસ્થાનાં રૂપાંતર દરમિયાન ઘન અને પ્રવાહી બંને અવસ્થાઓ ઉષ્મીય સંતુલનમાં સહઅસ્તિત્વ ધરાવે છે.** જે તાપમાને પદાર્થની ઘન અને પ્રવાહી અવસ્થાઓ એકબીજા સાથે **ઉષ્મીય સંતુલનમાં** હોય છે તે તાપમાનને પદાર્થનું **ગલનબિંદુ (melting point)** કહે છે. તે પદાર્થની એક લાક્ષણિકતા છે. તે દબાણ ઉપર પણ આધારિત છે. સામાન્ય વાતાવરણનાં દબાણે પદાર્થનાં ગલનબિંદુને **પ્રસામાન્ય ગલનબિંદુ (normal melting point)** કહે છે. હવે આપણે બરફના ગલનની પ્રક્રિયા સમજવા નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

બરફનું એક ચોસલું લો. ધાતુનો એક તાર લો અને 5 kg દળના બે બ્લૉક તારના છેડાઓ પર બાંધો. આકૃતિ 11.10માં દર્શાવ્યા મુજબ ચોસલા પર તાર મૂકો. તમે જોઈ શકશો કે તાર બરફના ચોસલામાંથી પસાર થાય છે. વાસ્તવિકતા છે કે તારની નીચે રહેલા બરફમાં નીચા તાપમાને દબાણમાં વધારો થતાં બરફ પીગળે છે. જ્યારે તાર પસાર થઈ જાય છે ત્યારે તારની ઉપરનું પાણી પુનઃઠારણ પામે છે. આમ, તાર પસાર થવાથી બરફનું ચોસલું વિભાજિત થતું નથી. ઠારણની આ ઘટનાને **પુનઃઠારણ (regelation)** કહે છે. બરફ (snow) પર સ્કેટની નીચે પાણી બનવાથી જ સ્કેટિંગ શક્ય બને છે. દબાણના વધવાને કારણે પાણી બને છે અને આ પાણી લુબ્રિકેટ (ઊંજણ) તરીકે વર્તે છે.



આકૃતિ 11.10

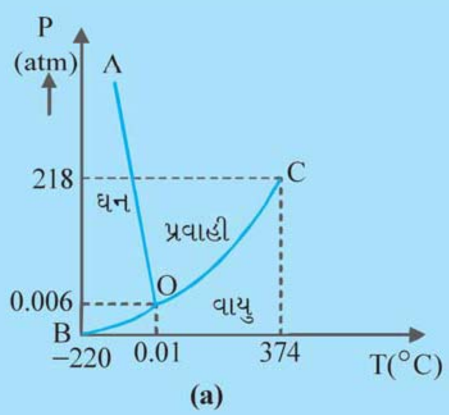
બધો જ બરફ પાણીમાં રૂપાંતર પામે ત્યાર બાદ જો તેને ગરમ કરવાનું આગળ ચાલુ રાખીએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, તાપમાન વધવાનું શરૂ થાય છે(આકૃતિ 11.9). તાપમાન 100 °C ની નજીક પહોંચે ત્યાં સુધી તેમાં વધારો થતો રહે છે અને તે સ્થિર બની જાય છે. આપેલી ઉષ્માનો જથ્થો, પ્રવાહી અવસ્થાને વરાળ અથવા વાયુ-અવસ્થામાં રૂપાંતર કરવામાં વપરાય છે.

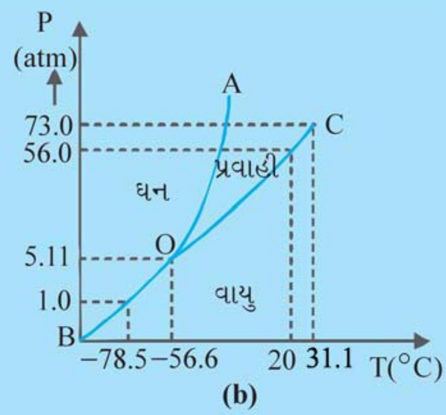
પ્રવાહી-અવસ્થામાંથી વરાળ (અથવા વાયુ)માં થતા રૂપાંતરને **બાષ્પીકરણ (vaporisation)** કહે છે. જોઈ શકાયું છે કે પ્રવાહીનો સમગ્ર જથ્થો વરાળમાં રૂપાંતરિત થાય ત્યાં સુધી તાપમાન અચળ રહે છે. પ્રવાહીમાંથી વાયુ-અવસ્થાની રૂપાંતરણ પ્રક્રિયા દરમિયાન બંને અવસ્થાઓ ઉષ્મીય સંતુલનમાં સહઅસ્તિત્વ ધરાવે છે. જે તાપમાને પ્રવાહી અને વાયુ ઉષ્મીય સંતુલનમાં સહઅસ્તિત્વ ધરાવે છે. તેને પદાર્થનું **ઉત્કલનબિંદુ (boiling point)** કહે છે. પાણીની ઉકળવાની પ્રક્રિયા સમજાવા માટે હવે નીચે મુજબની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

અડધાથી વધુ પાણી ભરેલો એક ગોળ તળિયાવાળો (રાઉન્ડ બૉટમ) ફ્લાસ્ક લો. તેને બર્નર પર મૂકો અને ફ્લાસ્કનાં બૂચમાં

ત્રિબિંદુ (Triple Point)

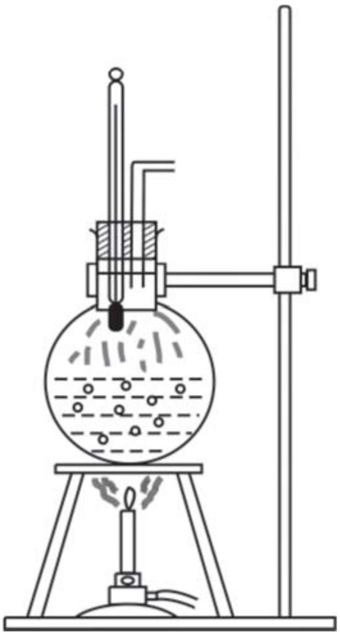
પદાર્થ તેની અવસ્થામાં ફેરફાર અનુભવે તે દરમિયાન તેનું તાપમાન અચળ રહે છે. (અવસ્થા-ફેરફાર). પદાર્થ માટે તાપમાન T અને દબાણ P વચ્ચેના આલેખને તેનો ફેઝ ડાયગ્રામ અથવા $P - T$ ડાયગ્રામ કહે છે. નીચે આકૃતિમાં પાણી અને CO_2 માટેનો ફેઝ ડાયગ્રામ દર્શાવેલ છે. આ ફેઝ ડાયગ્રામ $P - T$ સમતલને ઘન વિસ્તાર, વાયુ વિસ્તાર અને પ્રવાહી વિસ્તાર એમ ત્રણ વિસ્તારોમાં વિભાગે છે. આ ક્ષેત્રો **ઊર્ધ્વીકરણ (સબ્લિમેશન) વક્ર** (BO), **ઠારણ (ફ્યુઝન) વક્ર (AO)** અને **બાષ્પાયન (વેપરાઈઝેશન) વક્ર (CO)** જેવા વક્રો વડે જુદા પડે છે. સબ્લિમેશન વક્ર (BO) પરનાં બિંદુઓ ઘન અને વાયુ સ્વરૂપો સહઅસ્તિત્વમાં ધરાવતાં હોય તેવી અવસ્થાઓ દર્શાવે છે. ફ્યુઝન વક્ર OA પરનાં બિંદુઓએ ઘન અને પ્રવાહી સ્વરૂપો સહઅસ્તિત્વમાં હોય તેવી અવસ્થાઓ દર્શાવે છે. વેપરાઇઝેશન વક્ર (CO) પરનાં બિંદુઓએ પ્રવાહી અને વાયુ-સ્વરૂપો સહ અસ્તિત્વમાં હોય તેવી અવસ્થાઓ દર્શાવે છે. દબાણ અને તાપમાનનાં જે મૂલ્યો માટે ફ્યુઝન વક્ર, વેપરાઇઝેશન વક્ર અને સબ્લિમેશન વક્ર મળે છે અને પદાર્થનાં ત્રણેય સ્વરૂપો સહઅસ્તિત્વમાં હોય તે બિંદુને તે પદાર્થનું **ત્રિબિંદુ** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, પાણીના ત્રિબિંદુને તાપમાન 273.16 K અને દબાણ 6.11×10^{-3} Pa વડે દર્શાવાય છે.





દબાણ-તાપમાન ફેઝ ડાયગ્રામ (a) પાણી માટે અને (b) CO_2 માટે (સ્કેલમાપ વગર)

થરમૉમીટર તથા વરાળ નિષ્કાસ નળી પસાર કરીને તે બૂચને ફીટ કરો (આકૃતિ 11.11). ફ્લાસ્કમાં રહેલું પાણી ગરમ કરતાં સૌપ્રથમ પાણીમાં ઓગળેલ હવા, નાના પરપોટા સ્વરૂપે બહાર આવે છે. પછી તળિયે વરાળના પરપોટા રચાય છે. જે ઠંડા પાણીમાં ઊર્ધ્વગમન પામી ટોચ પર ઠારણ પામે છે અને અદૃશ્ય થઈ જાય છે. અંતે સમગ્ર પાણીના જથ્થાનું તાપમાન 100 °C પર પહોંચે ત્યારે વરાળના પરપોટા સપાટી પર પહોંચે છે. જેને પાણી ઊકળવા લાગ્યું તેમ કહેવાય છે. ફ્લાસ્કમાં રહેલી વરાળ જોઈ શકાતી નથી પરંતુ તે જેવી ફ્લાસ્કની બહાર નીકળે છે ત્યારે સૂક્ષ્મ પાણીનાં બુંદો રૂપે ઠારણ પામી ધૂંધ (foggy) સ્વરૂપે દેખાય છે.



આકૃતિ **11.11** *ઉત્કલન પ્રક્રિયા*

જો હવે વરાળ નિષ્કાસ નળીને થોડી સેકન્ડ માટે બંધ કરીને ફ્લાસ્કમાં દબાણ વધારવામાં આવે, તો તમે જોઈ શકશો કે પાણીનું ઉકળવાનું બંધ થાય છે. પાણીની ઉકળવાની પ્રક્રિયા ફરી શરૂ થાય તે પહેલાં તાપમાનમાં વધારો કરવા માટે વધુ ઉષ્માની જરૂર પડે છે. (જે દબાણના વધારા પર આધારિત છે.) આમ દબાણના વધારા સાથે ઉત્કલનબિંદુમાં વધારો થાય છે.

હવે આપણે બર્નરને દૂર કરીને પાણીને 80 °C સુધી ઠંડું થવા દો. થરમૉમીટર અને વરાળ નિષ્કાસ નળી દૂર કરો. ફ્લાસ્કને હવાચુસ્ત બૂચ વડે બંધ કરો. સ્ટૅન્ડ પર ફ્લાસ્કને ઊંધો મૂકો અને તેના પર બરફનું ઠંડું પાણી રેડો. આમ કરતાં ફ્લાસ્કની અંદર રહેલી પાણીની વરાળ ઠારણ પામે છે અને ફ્લાસ્કમાં રહેલા પાણીની સપાટી પરનું દબાણ ઘટે અને નીચા તાપમાને પાણી ફરીથી ઊકળે છે. આમ, દબાણમાં ઘટાડો થતાં તેના ઉત્કલનબિંદુમાં પણ ઘટાડો થાય છે.

આ પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, શા માટે પહાડીક્ષેત્રોમાં રસોઈ કઠિન છે. વધુ ઊંચાઈએ વાતાવરણનું દબાણ નીચું હોવાને કારણે દરિયાની સપાટીની સરખામણીએ પાણીનું ઉત્કલનબિંદુ નીચું હોય છે. તેનાથી વિપરીત, પ્રેશરકુકરમાં દબાણમાં વધારો કરીને ઉત્કલનબિંદુમાં વધારો કરવામાં આવે છે. જેથી રસોઈ ઝડપી થાય છે. પ્રમાણભૂત વાતાવરણ દબાણે પદાર્થનાં ઉત્કલનબિંદુને **પ્રસામાન્ય ઉત્કલનબિંદુ (normal boiling point)** કહે છે.

જોકે, બધાં જ પદાર્થો ઘન, પ્રવાહી અને વાયુ એમ ત્રણેય અવસ્થાઓમાંથી પસાર થતાં નથી. કેટલાક એવા પદાર્થો છે જે સામાન્ય રીતે ઘન-અવસ્થામાંથી સીધા જ વાયુ અવસ્થામાં (તેનાથી વિપરીત પણ) રૂપાંતર થઈ જાય છે. પ્રવાહી અવસ્થામાં રૂપાંતર થયા વગર ઘન અવસ્થામાંથી વાયુ-અવસ્થામાં થતાં રૂપાંતરણને **ઊર્ધ્વપાતન (sublimation)** કહે છે અને આવા પદાર્થને ઊર્ધ્વપાતી પદાર્થ કહે છે. સૂકો બરફ (ઘન CO_2) ઊર્ધ્વપાતન પામે છે. આયોડિન પણ આવો જ પદાર્થ છે. ઊર્ધ્વપાતનની પ્રક્રિયા દરમિયાન પદાર્થની બંને ઘન અવસ્થા અને વાયુ અવસ્થા ઉષ્મીય સંતુલનમાં હોય છે.

11.8.1 ગુપ્ત ઉષ્મા (Latent Heat)

પરિચ્છેદ 11.8માં આપણે શીખ્યાં કે જ્યારે પદાર્થની અવસ્થામાં ફેરફાર થાય ત્યારે પદાર્થ અને તેના પરિસર વચ્ચે ચોક્કસ ઉષ્માનો જથ્થો વિનિમય પામે છે. પદાર્થની અવસ્થા-ફેરફાર દરમિયાન પદાર્થના એકમ દળ દીઠ વિનિમય પામતી ઉષ્માનાં જથ્થાને તે પ્રક્રિયા માટેની પદાર્થની ગુપ્ત ઉષ્મા કહે છે ઉદાહણ તરીકે, −10 °C તાપમાન ધરાવતા આપેલ જથ્થાનાં બરફને ઉષ્મા આપવામાં આવે તો બરફનું તાપમાન તેના ગલનબિંદુ (0 °C) સુધી પહોંચે ત્યાં સુધી વધે છે. આ તાપમાને વધુ ઉષ્મા આપતાં તાપમાનમાં વધારો થતો નથી પરંતુ બરફ પીગળવા લાગે છે અથવા પ્રવાહી અવસ્થામાં રૂપાંતર થાય છે. બધો જ બરફ પીગળી જાય પછી વધુ ઉષ્મા આપવામાં આવે, તો પાણીનાં તાપમાનમાં વધારો થાય છે. ઉત્કલનબિંદુએ પ્રવાહી વાયુ અવસ્થામાં રૂપાંતર દરમિયાન આવી જ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ થાય છે. ઉકળતા પાણીને વધુ ઉષ્મા આપતા તાપમાનમાં વધારો થયા વગર વરાળમાં રૂપાંતરિત થાય છે.

કોષ્ટક 11.5 1 વાતાવરણ દબાણે કેટલાક પદાર્થોનાં અવસ્થા રૂપાંતરના તાપમાન અને ગુપ્તઉષ્માઓ

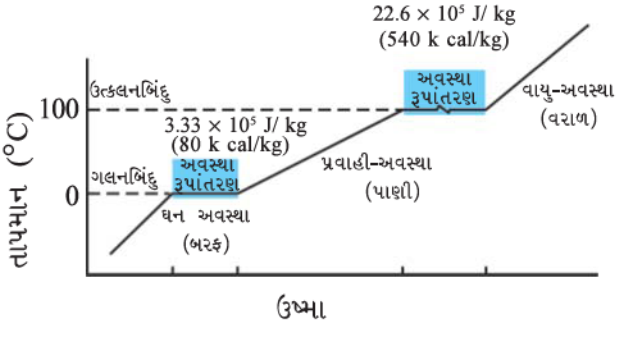
પદાર્થ	ગલનબિંદુ (°C)	L_f (10^5 J kg^{-1})	ઉત્કલનબિંદુ (°C)	L_v (10^5 J kg^{-1})
ઇથેનોલ	–114	1.0	78	8.5
સોનુ	1063	0.645	2660	15.8
સીસું	328	0.25	1744	8.67
પારો	–39	0.12	357	2.7
નાઇટ્રોજન	–210	0.26	–196	2.0
ઑક્સિજન	–219	0.14	–183	2.1
પાણી	0	3.33	100	22.6

અવસ્થા-ફેરફાર દરમિયાન જરૂરી ઉષ્માનો આધાર રૂપાંતરણ ઉષ્મા અને અવસ્થા ફેરફાર પામતાં પદાર્થના દળ ઉપર રહેલો છે. આમ, એક અવસ્થામાંથી બીજી અવસ્થામાં રૂપાંતર પામતાં પદાર્થનું દળ m અને તે માટે જરૂરી ઉષ્માનો જથ્થો Q હોય તો,

$$Q = m\,L$$

અથવા $L = Q/m$ (11.13)

જ્યાં, Lને ગુપ્ત ઉષ્મા કહે છે અને તે પદાર્થની લાક્ષણિકતા છે. તેનો SI એકમ J kg^{-1} છે. Lનું મૂલ્ય દબાણ પર પણ આધારિત છે. સામાન્ય રીતે તેનું મૂલ્ય પ્રમાણભૂત વાતાવરણ દબાણે લેવામાં આવે છે. ઘન-પ્રવાહી અવસ્થા ફેરફાર માટેની ગુપ્તઉષ્માને **ગલન ગુપ્તઉષ્મા (L_f) (Latent heat of fusion)** કહે છે અને પ્રવાહી-વાયુ ફેરફાર માટે તેને **ઉત્કલન ગુપ્તઉષ્મા (L_v)(Latent heat of vaporisation)** કહે છે. ઘણી વાર તેને ગલનઉષ્મા અને બાષ્પાયન ઉષ્મા તરીકે ઉલ્લેખ કરવામાં આવે છે. આકૃતિ 11.12માં, પાણીના જથ્થા માટે તાપમાન વિરુદ્ધ ઉષ્માઊર્જાનો આલેખ દર્શાવેલ છે. કોષ્ટક 11.5માં કેટલાક પદાર્થોની ગુપ્તઉષ્મા તેમનાં ઠારણબિંદુઓ અને ઉત્કલનબિંદુઓ માટે આપેલ છે.



આકૃતિ 11.12 *1 વાતાવરણ દબાણે પાણી માટે તાપમાન વિરુદ્ધ ઉષ્માનો આલેખ (સ્કેલમાપ વગર)*

અહીં નોંધો કે જ્યારે અવસ્થા-ફેરફાર દરમિયાન ઉષ્મા ઉમેરવામાં (કે દૂર કરવામાં) આવે ત્યારે તાપમાન અચળ રહે છે. આકૃતિ 11.12 દર્શાવે છે કે, બધી જ અવસ્થા રેખાઓના ઢાળ સમાન નથી. જે સૂચવે છે કે જુદી જુદી અવસ્થા માટે વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનાં મૂલ્યો સમાન નથી. પાણીમાં ગલનગુપ્ત ઉષ્મા અને બાષ્પાયન ગુપ્તઉષ્મા અનુક્રમે $L_f = 3.33 \times 10^5$ J kg^{-1} અને $L_v = 22.6 \times 10^5$ J kg^{-1} છે એટલે કે 1 kg બરફને 0 °C તાપમાને પિગાળવા માટે 3.33×10^5 J ઉષ્મા અને 1 kg પાણીને 100 °C તાપમાને વરાળમાં ફેરવવા માટે 22.6×10^5 J ઉષ્માની જરૂર પડે છે. આથી 100 °C તાપમાને રહેલી વરાળ 100 °C તાપમાને રહેલા પાણી કરતાં 22.6×10^5 J kg^{-1} ઉષ્મા વધુ ધરાવે છે. આથી, ઉકળતા પાણી કરતાં સામાન્ય રીતે વરાળ વધુ ગંભીર રીતે દઝાડે છે.

ઉદાહરણ 11.4 જ્યારે એક પાત્રમાં 0 °C તાપમાને રહેલા 0.15 kg બરફને 50 °C તાપમાને રહેલા 0.30 kg પાણીમાં ભેળવવામાં આવે ત્યારે પરિણામી તાપમાન 6.7 °C થાય છે. બરફને ઓગાળવા માટે જરૂરી ઉષ્મા ગણો. (s_{water} = 4186 J kg^{-1} K^{-1})

ઉકેલ

પાણી વડે ગુમાવાતી ઉષ્મા = $ms_w\,(\theta_f - \theta_i)_w$

= (0.30 kg) (4186 J kg^{-1} K^{-1}) (50.0 °C – 6.7 °C)

= 54376.14 J

બરફ પીગળવા માટે જરૂરી ઉષ્મા = $m_1 L_f$ = (0.15 kg) L_f

બરફના પાણીના તાપમાનને અંતિમ તાપમાન સુધી લઈ જવા માટે જરૂરી ઉષ્મા = $m_1 s_w\,(\theta_f - \theta_i)_I$

= (0.15 kg) (4186 J kg^{-1} K^{-1}) (6.7 °C – 0 °C)

= 4206.93 J

ગુમાવાતી ઉષ્મા = મેળવાતી ઉષ્મા

54376.14 J = (0.15 kg) L_f + 4206.93 J

$L_f = 3.34 \times 10^5$ J kg^{-1}

▶ *ઉદાહરણ 11.5* એક કેલોરીમીટરમાં −12 °C તાપમાને રહેલા 3 kg બરફને વાતાવરણના દબાણે 100 °C તાપમાનવાળી વરાળમાં રૂપાંતરિત કરવા માટેની જરૂરી ઉષ્માની ગણતરી કરો. જયાં, બરફની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા = 2100 J kg^{-1} K^{-1}, પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા = 4186 J kg^{-1} K^{-1}, બરફની ગલનગુપ્ત ઉષ્મા = 3.35×10^5 J kg^{-1} અને વરાળની બાષ્પાયન ગુપ્તઉષ્મા = 2.256×10^6 J kg^{-1} આપેલ છે.

ઉકેલ આપણી પાસે,

બરફનું દળ $m = 3$ kg

બરફની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા s_{ice} = 2100 J kg^{-1} K^{-1}

પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા s_{water} = 4186 J kg^{-1} K^{-1}

બરફની ગલનગુપ્ત ઉષ્મા $L_{f\ ice}$ = 3.35×10^5 J kg^{-1}

વરાળની બાષ્પાયન ગુપ્તઉષ્મા L_{steam} = 2.256×10^6 J kg^{-1}

હવે, Q = −12 °C તાપમાને રહેલા 3 kg બરફને 100° C વરાળમાં રૂપાંતર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા

Q_1 = −12 °C એ રહેલા 3 kg બરફનું તાપમાન 0 °Cમાં રૂપાંતર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા

= $m\, s_{ice}\, \Delta T_1$ = (3 kg) (2100 J kg^{-1} K^{-1}) [0 − (−12)] °C = 75600 J

Q_2 = 0° C તાપમાને રહેલા 3 kg બરફને 0 °C તાપમાનવાળા પાણીમાં રૂપાંતરિત કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા

= $m\, L_{f\ ice}$ = (3 kg) (3.35×10^5 J kg^{-1})

= 1005000 J

Q_3 = 0 °C એ રહેલા 3 kg પાણીને 100 °C વાળા પાણીમાં રૂપાંતરિત કરવા માટેની જરૂરી ઉષ્મા

= $m s_w\, \Delta T_2$ = (3 kg) (4186 J kg^{-1} K^{-1}) (100 °C)

= 1255800 J

Q_4 = 100 °C વાળા 3 kg પાણીને 100 °C વાળી વરાળમાં રૂપાંતર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા

= $m\, L_{steam}$ = (3 kg) (2.256×10^6 J kg^{-1})

= 6768000 J

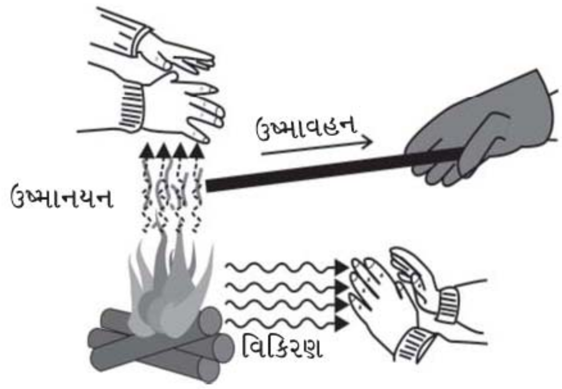
માટે, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

= 75600J + 1005000 J + 1255800J + 6768000 J

= 9.1×10^6 J ◀

11.9 ઉષ્માનું પ્રસરણ (HEAT TRANSFER)

આપણે જાણીએ છીએ કે ઉષ્મા એ ઊર્જા છે અને તાપમાનમાં તફાવતને કારણે ઊર્જાનું એક તંત્રમાંથી બીજા તંત્રમાં અથવા તંત્રનાં એક ભાગમાંથી બીજા ભાગમાં પ્રસરણ થાય છે. જુદા જુદા કયા પ્રકારો દ્વારા આ ઊર્જાનું પ્રસરણ થઈ શકે ? ઉષ્મા સ્થાનાંતરની ત્રણ જુદી જુદી રીતો છે : ઉષ્માવહન, ઉષ્માનયન અને ઉષ્માવિકિરણ (આકૃતિ 11.13).



આકૃતિ 11.13 ઉષ્માવહન, ઉષ્માનયન તથા ઉષ્માવિકિરણ દ્વારા તાપન

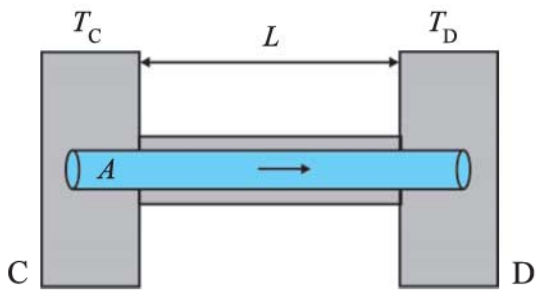
11.9.1 ઉષ્માવહન (Conduction)

પદાર્થના પાસપાસેના બે વિભાગો વચ્ચે તાપમાનના તફાવતને કારણે ઉષ્માના પ્રસરણ થવાની યાંત્રિક પ્રક્રિયાને ઉષ્માવહન કહે છે. ધારો કે ધાતુના સળિયાના એક છેડાને જ્યોતમાં મૂકીએ તો થોડી વારમાં જ સળિયાનો બીજો છેડો એટલો ગરમ થશે કે તમે ખુલ્લા હાથે તેને પકડી શકશો નહિ. અહીં, સળિયામાં ઉષ્માનું પ્રસરણ, ઉષ્માવહન દ્વારા સળિયાના ગરમ છેડેથી તેના જુદા જુદા ભાગોમાંથી પસાર થઈને બીજા છેડા સુધી થાય છે. વાયુઓની ઉષ્માવાહકતા ઓછી હોય છે. જ્યારે પ્રવાહીઓની ઉષ્માવાહકતા ઘન અને વાયુઓની વચ્ચે હોય છે.

માત્રાત્મક રીતે ઉષ્માવહન, 'કોઈ દ્રવ્યમાં આપેલ તાપમાનના તફાવત માટે ઉષ્માવહનના સમય-દર' વડે વર્ણવવામાં આવે છે. ધારો કે, લંબાઈ L અને નિશ્ચિત આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A ધરાવતા એક ધાતુના સળિયાના બે છેડાઓ જુદાં જુદાં તાપમાને રાખેલા છે. ઉદાહરણ તરીકે સળિયાના છેડાઓને અનુક્રમે T_C અને T_D તાપમાન ધરાવતાં મોટા ઉષ્મા સંગ્રાહક સાથે ઉષ્મીય સંપર્કમાં રાખેલા (આકૃતિ 11.14) છે.

આદર્શ સ્થિતિ માટે સળિયાની બાજુઓ સંપૂર્ણપણે ઉષ્મીય અવાહક કરતાં સળિયાની બાજુઓ અને પરિસર વચ્ચે ઉષ્માવિનિમય થતો નથી.

થોડા સમય બાદ, સ્થાયી અવસ્થા મળશે. સળિયાનું તાપમાન T_C થી T_D સુધી ($T_C > T_D$) અંતર સાથે સમાન રીતે ઘટે છે. C પાસેનું ઉષ્માસંગ્રાહક અચળ દરે ઉષ્મા આપે છે. જે સળિયા દ્વારા પ્રસરણ પામી તે જ અચળ દરે D પાસે રહેલા સંગ્રાહકને આપે છે.



આકૃતિ 11.14 *બે છેડે T_C અને T_D ($T_C > T_D$) જેટલું તાપમાન જળવાઈ રહેતું હોય તેવા સળિયામાં ઉષ્માવહન દ્વારા સ્થાયી સ્થિતિમાં ઉષ્માનું વહન*

પ્રાયોગિક રીતે જોવા મળે છે કે, સ્થાયી અવસ્થામાં ઉષ્માવહનનો દર (અથવા ઉષ્માપ્રવાહ) H, તાપમાનના તફાવત ($T_C - T_D$) અને આડછેદનાં ક્ષેત્રફળ Aના સપ્રમાણમાં તથા સળિયાની લંબાઈ Lના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

$$H = KA\frac{T_C - T_D}{L} \tag{11.14}$$

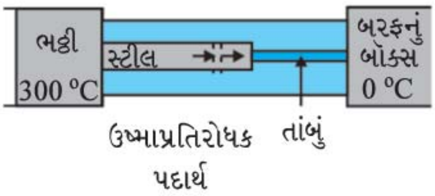
સપ્રમાણતા અચળાંક Kને દ્રવ્યની **ઉષ્માવાહકતા (Thermal Conductivity)** કહે છે. કોઈ દ્રવ્ય માટે Kનું મૂલ્ય જેટલું વધારે તેટલું વધારે ઝડપી ઉષ્માનું વહન. Kનો SI એકમ J s^{-1} m^{-1} K^{-1} અથવા W m^{-1} K^{-1} છે. કોષ્ટક 11.6માં જુદા જુદા પદાર્થોની ઉષ્માવાહકતાની યાદી આપેલ છે. આ મૂલ્યો તાપમાન સાથે બહુ ધીમે બદલાય છે. તેથી તાપમાનના સામાન્ય વિસ્તાર માટે તેને અચળ ગણી શકાય.

ધાતુઓ જેવા સારા ઉષ્માવાહકોની ઉષ્માવાહકતાની સરખામણી પ્રમાણમાં સારા ઉષ્મા અવાહકો જેવાં કે લાકડું, ગ્લાસવુલ વગેરેની ઉષ્માવાહકતા સાથે કરો. તમે નોંધ્યું હશે કે કેટલાંક રસોઈનાં વાસણોને તળિયે તાંબાનું આવરણ ચઢાવેલું હોય છે. તાંબું ઉષ્મા સુવાહક હોવાને કારણે તે વાસણના સમગ્ર તળિયામાં ઉષ્માનું વિતરણ સારી રીતે થાય છે અને ખોરાક એકસરખો રાંધી શકાય. તેનાથી વિપરીત પ્લાસ્ટિક ફોમ કે જે મોટે ભાગે હવાના કોટરો (Air Pockets - હવા-સંચયિકા) ધરાવતા હોવાથી વધુ સારા ઉષ્મા અવાહક હોય છે. યાદ કરો કે વાયુઓ મંદ ઉષ્માવાહક છે અને કોષ્ટક 11.6માં હવાની ઓછી ઉષ્માવાહકતા નોંધો. બીજા ઘણા કિસ્સાઓમાં ઉષ્મા સંગ્રહ અને પ્રસરણ મહત્ત્વનાં હોય છે. ઉનાળાના દિવસોમાં કૉંક્રીટથી બનેલ મકાનોની છત બહુ ઝડપથી ગરમ થઈ જાય છે, કારણ કે કૉંક્રિટની ઉષ્માવાહકતા ઘણી ઓછી હોતી નથી. (જોકે ધાતુઓની સરખામણીએ પૂરતી ઓછી છે.) માટે લોકો મોટે ભાગે મકાનની છત પર માટી અથવા ઉષ્મા પ્રતિરોધક ફોમનું આવરણ કરવાનું પસંદ કરે છે. જેથી ઉષ્માનું પ્રસરણ અટકે છે અને રૂમને ઠંડો રાખે છે. ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં ઉષ્માનું પ્રસરણ અનિવાર્ય (ક્રાંતિક) (Critical) હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ન્યુક્લિયર રીએક્ટરમાં જટિલ ઉષ્મા પ્રસરણ તંત્ર પ્રસ્થાપિત કરવું જરૂરી છે. જેથી રીએક્ટરના કોર વિભાગમાં ન્યુક્લિયર સંલયન (ફીશન) દ્વારા ઉદ્ભવતી પ્રચંડ ઊર્જાને પૂરતી ઝડપે બહાર તરફ સંક્રમણ કરાવી શકાય અને કોર (મધ્યભાગ)ને વધુ પડતી ગરમ થતી અટકાવી શકાય.

કોષ્ટક 11.6 **કેટલાંક દ્રવ્યોની ઉષ્માવાહકતાઓ**

દ્રવ્યો	ઉષ્મા વાહકતા (J s^{-1} m^{-1} K^{-1})
ધાતુઓ	
ચાંદી	406
તાંબું	385
ઍલ્યુમિનિયમ	205
બ્રાસ (પિત્તળ)	109
સ્ટીલ	50.2
સીસું	34.7
પારો	8.3
અધાતુઓ	
અવાહક ઈંટ	0.15
કૉંક્રિટ	0.8
શરીરની ચરબી	0.20
ફેલ્ટ (ઉનનું કાપડ)	0.04
કાચ	0.8
બરફ	1.6
ગ્લાસવુલ	0.04
લાકડું	0.12
પાણી	0.8
વાયુઓ	
હવા	0.024
આર્ગોન	0.016
હાઇડ્રોજન	0.14

ઉદાહરણ 11.6 આકૃતિ 11.15માં દર્શાવ્યા મુજબનું તંત્ર સ્થાયી અવસ્થામાં છે. તો સ્ટીલ તાંબાના જંક્શનનું તાપમાન કેટલું હશે ? સ્ટીલના સળિયાની લંબાઈ = 15.0 cm. તાંબાના સળિયાની લંબાઈ = 10.0 cm. ભઠ્ઠીનું તાપમાન = 300 °C. બીજા છેડાનું તાપમાન 0 °C. સ્ટીલનાં સળિયાનાં આડછેદનું ક્ષેત્રફળ તાંબાના સળિયાના આડછેદનાં ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું છે. (સ્ટીલની ઉષ્માવાહકતા = 50.2 J s^{-1} m^{-1} K^{-1} અને તાંબાની ઉષ્માવાહકતા = 385 J s^{-1} m^{-1} K^{-1})



આકૃતિ 11.15

ઉકેલ સળિયાઓની ફરતે રહેલું ઉષ્માપ્રતિરોધક આવરણ સળિયાની બાજુ પરથી થતો ઉષ્માનો વ્યય ઘટાડે છે. તેથી ઉષ્માનું વહન માત્ર સળિયાની લંબાઈની દિશામાં થાય છે. સળિયાના કોઈ પણ આડછેદનો વિચાર કરો. સ્થાયી અવસ્થામાં કોઈ એક ભાગમાં દાખલ થતી ઉષ્મા તેમાંથી બહાર નીકળતી ઉષ્મા જેટલી જ હોય. નહિતર તે ભાગ ચોખ્ખી ઊર્જા મેળવે અથવા ગુમાવે અને તેનું તાપમાન સ્થાયી રહેશે નહિ. આમ, સ્થાયી અવસ્થામાં સ્ટીલ-તાંબાના સંયુક્ત સળિયાની લંબાઈ પરનાં દરેક બિંદુઓએ આડછેદમાંથી વહન પામતી ઉષ્માનો દર સળિયાના આડછેદમાંથી પસાર થતા ઉષ્માના દર જેટલો હોય છે. ધારો કે સ્થાયી સ્થિતિમાં સ્ટીલ-તાંબાના જંક્શનનું તાપમાન T છે તો,

$$\frac{K_1A_1(300-T)}{L_1} = \frac{K_2A_2(T-0)}{L_2}$$

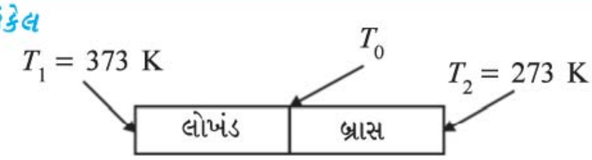
જ્યાં (1) અને (2) અનુક્રમે સ્ટીલ અને તાંબાના સળિયાનું સૂચન કરે છે. $A_1 = 2A_2$, $L_1 = 15.0$ cm, $L_2 = 10.0$ cm, $K_1 = 50.2$ J s^{-1} m^{-1} K^{-1}, $K_2 = 385$ J s^{-1} m^{-1} K^{-1} માટે,

$$\frac{50.2\times2(300-T)}{15} = \frac{385\,T}{10}$$

જે પરથી, $T = 44.4$ °C

ઉદાહરણ 11.7 આકૃતિ 11.16માં દર્શાવ્યા મુજબ એક લોખંડના સળિયા ($L_1 = 0.1$ m, $A_1 = 0.02$ m^2, $K_1 = 79$ W m^{-1} K^{-1}) અને એક બ્રાસના સળિયા ($L_2 = 0.1$ m, $A_2 = 0.02$ m^2, $K_2 = 109$ W m^{-1} K^{-1})ના છેડાઓને એકબીજા સાથે જોડેલ છે. લોખંડ અને બ્રાસના મુક્ત છેડાઓનું તાપમાન અનુક્રમે 373 K અને 273 K જેટલું જાળવી રાખવામાં આવે છે. (i) બંને સળિયાના જંક્શનનું તાપમાન (ii) સંયુક્ત સળિયાની સમતુલ્ય ઉષ્માવાહકતા અને (iii) સંયુક્ત સળિયામાંથી પસાર થતાં ઉષ્માપ્રવાહ માટેનાં સૂત્રો મેળવો અને તેની ગણતરી પણ કરો.

ઉકેલ



આકૃતિ 11.16

$L_1 = L_2 = L = 0.1$ m, $A_1 = A_2 = A = 0.02$ m^2, $K_1 = 79$ W m^{-1} K^{-1}, $K_2 = 109$ W m^{-1} K^{-1}, $T_1 = 373$ K અને $T_2 = 273$ K આપેલ છે.

સ્થાયી અવસ્થા અંતર્ગત, લોખંડના સળિયામાં ઉષ્માપ્રવાહ (H_1) અને બ્રાસના સળિયામાં ઉષ્માપ્રવાહ (H_2) સમાન હોય છે.

માટે, $H = H_1 = H_2$

$$\therefore \frac{K_1A_1(T_1-T_0)}{L_1} = \frac{K_2A_2(T_0-T_2)}{L_2}$$

$A_1 = A_2 = A$ અને $L_1 = L_2 = L$ હોવાથી આ સમીકરણ નીચે મુજબ હશે :

$$K_1(T_1 - T_0) = K_2(T_0 - T_2)$$

આમ, બે સળિયાના જંક્શનનું તાપમાન

$$T_0 = \frac{(K_1T_1 + K_2T_2)}{(K_1 + K_2)}$$

આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં કોઈ પણ સળિયામાં ઉષ્માપ્રવાહ,

$$H = \frac{K_1A(T_1-T_0)}{L} = \frac{K_2A(T_0-T_2)}{L}$$

$$= \left(\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\right)\frac{A(T_1-T_2)}{L} = \frac{A(T_1-T_2)}{L\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)}$$

આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરતાં $L_1 + L_2 = 2L$ લંબાઈના સંયુક્ત સળિયા માટે ઉષ્માપ્રવાહ અને સંયુક્ત સળિયાની સમતુલ્ય ઉષ્માવાહકતા K' નીચે મુજબ મળે :

$$H' = \frac{K'A(T_1-T_2)}{2L} = H$$

$$K' = \frac{2K_1K_2}{K_1+K_2}$$

(i) $$T_0 = \frac{(K_1T_1 + K_2T_2)}{(K_1 + K_2)}$$

$$= \frac{(79\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1})(373\text{ K}) + (109\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1})(273\text{ K})}{79\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1} + 109\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}}$$

$= 315$ K

(ii) $$K' = \frac{2K_1K_2}{K_1+K_2}$$

$$= \frac{2\times(79\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1})\times(109\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1})}{79\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1} + 109\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}}$$

$= 91.6$ W m^{-1} K^{-1}

(iii) $H' = H = \dfrac{K' A (T_1 - T_2)}{2L}$

$= \dfrac{(91.6\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}) \times (0.02\,\mathrm{m^2}) \times (373\ \mathrm{K} - 273\,\mathrm{K})}{2 \times (0.1\ \mathrm{m})}$

$= 916\ \mathrm{W}$ ◀

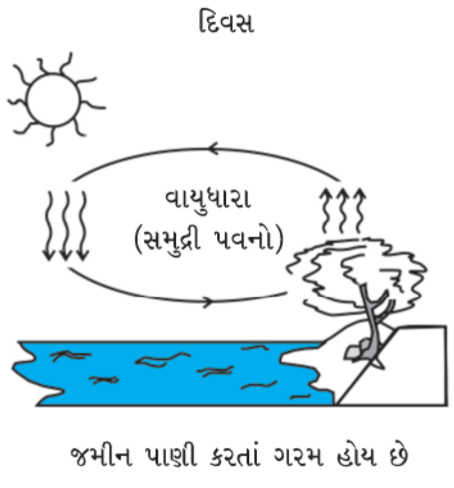
11.9.2 ઉષ્માનયન (Convection)

દ્રવ્યની વાસ્તવિક ગતિ દ્વારા થતા ઉષ્મા સ્થાનાંતરના પ્રચલિત પ્રકારને ઉષ્માનયન કહે છે. તે માત્ર તરલ પદાર્થોમાં શક્ય છે. ઉષ્માનયન પ્રાકૃતિક કે પ્રેરિત હોઈ શકે. પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયનમાં ગુરુત્વાકર્ષણ મહત્ત્વનો ભાગ ભજવે છે. તરલને તેના તળિયેથી ગરમ કરતાં ગરમ ભાગ વિસ્તરે છે અને તેથી તેની ઘનતા ઘટે છે. ઉત્પ્લાવક બળને કારણે તે ઉપર તરફ જાય છે અને ઉપરના ઠંડા ભાગને વિસ્થાપિત કરે છે. જે ફરી ગરમ થઈને ઉપર જાય છે અને તરલના ઠંડા ભાગને વિસ્થાપિત કરે છે. આ પ્રક્રિયા સતત ચાલ્યા કરે છે. ઉષ્મા સ્થાનાંતરનો આ પ્રકાર સ્પષ્ટ રીતે ઉષ્માવહન કરતાં જુદો છે. ઉષ્માનયનમાં તરલના જુદા જુદા ભાગોનું વહન જથ્થામાં થાય છે.

પ્રેરિત ઉષ્માનયનમાં દ્રવ્યને પંપ અથવા અન્ય ભૌતિક સાધનો દ્વારા ગતિ કરાવવામાં આવે છે. ઘર વપરાશમાં પ્રણોદીત-વાયુ તાપન તંત્ર, માનવ રુધિરાભિસરણ તંત્ર અને વાહનોનાં ઍન્જિનમાં શીતક તંત્ર વગેરે પ્રેરિત ઉષ્માનયનનાં સામાન્ય ઉદાહરણો છે. માનવ શરીરમાં હૃદય એક પંપ તરીકે કાર્ય કરે છે. જે રુધિરને શરીરના જુદા જુદા ભાગોમાં ભ્રમણ કરાવે છે. આ રીતે પ્રેરિત ઉષ્માનયન વડે ઉષ્માનું સ્થાનાંતર કરીને શરીરનું તાપમાન એકસરખું જાળવી રાખે છે.

પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયન ઘણી પ્રચલિત ઘટનાઓ માટે જવાબદાર છે. દિવસ દરમિયાન જળાશયોનાં પાણી કરતાં જમીન ઝડપથી ગરમ થાય છે. કારણ કે પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા ઊંચી છે અને તેથી શોષાયેલી ઉષ્મા મિશ્રિતધારાઓ દ્વારા પાણીના વિશાળ જથ્થામાં વિખેરાઈ જાય છે. ગરમ જમીનના સંપર્કમાં આવતી હવા ઉષ્માવહન વડે ગરમ થાય છે અને પ્રસરણ પામે છે. પરિણામે તેની આસપાસની ઠંડી હવા કરતાં તેની ઘનતા ઘટે છે. જેના પરિણામે ગરમ હવા (વાયુ ધારાઓ) ઉપર ચઢે છે અને ઠંડી હવા ગતિ કરીને (પવન) ખાલી પડેલી જગ્યા ભરી દે છે. આમ, મોટાં જળાશયોની નજીક સમુદ્રીય પવનલહેરો ઉદ્‌ભવે છે. ઠંડી હવા નીચે આવે છે અને એક તાપીય ઉષ્માનયન ચક્ર સ્થપાય છે. જે ઉષ્માને જમીનથી દૂર તરફ સ્થાનાંતરિત કરે છે. રાત્રિના સમયે જમીન ઉષ્મા ઝડપથી ગુમાવે છે અને પાણીની સપાટી જમીન કરતાં વધુ ગરમ હોય છે. જેને પરિણામે ચક્ર ઊલટાઈ જાય છે (આકૃતિ 11.17).

પ્રાકૃતિક ઉષ્માનયનનું એક બીજું ઉદાહરણ ઉત્તર પૂર્વથી વિષુવવૃત્ત તરફ વહેતા પૃથ્વી પરના સ્થાયી પૃષ્ઠીય પવનો જેને પારંપરિક પવન (Trade wind) કહે છે. જેની વ્યવહારિક સ્પષ્ટતા આ મુજબ છે. પૃથ્વીનાં વિષુવવૃત્તીય અને ધ્રુવીય ક્ષેત્રો અસમાન સૂર્યઉષ્મા મેળવે છે. વિષુવવૃત્ત પાસે પૃથ્વીની સપાટી નજીક રહેલી હવા ગરમ હોય છે. જ્યારે ધ્રુવો પાસે ઉપરના વાતાવરણમાં હવા ઠંડી હોય છે. અન્ય પરિબળો (factor)ની ગેરહાજરીમાં, ઉષ્માનયનના પ્રવાહો રચાય છે. હવા વિષુવવૃત્તીય પૃષ્ઠથી ઉપર જઈને ધ્રુવો તરફ ગતિ કરે છે. ત્યાંથી ધારાઓ નીચે તરફ આવી પુનઃ વિષુવવૃત્ત તરફ વહન કરે છે. જોકે પૃથ્વીના પરિભ્રમણને કારણે આ ઉષ્માનયન પ્રવાહોમાં ફેરફાર થાય છે. આના કારણે વિષુવવૃત્તની નજીક પૂર્વ તરફ ગતિ કરતી હવાની ઝડપ 1600 km/h જ્યારે ધ્રુવો પાસે તેની ઝડપ શૂન્ય હોય છે. જેનાં પરિણામે હવા ધ્રુવો પાસે નહિ, પરંતુ 30° N (ઉત્તર) અક્ષાંશ પાસે નીચે ઉતરે છે અને વિષુવવૃત્ત તરફ પાછી ફરે છે. જેને **પારંપરિક પવન (trade wind)** કહે છે.



આકૃતિ 11.17 ઉષ્માનયન-ચક્ર

11.9.3 ઉષ્માવિકિરણ (Radiation)

ઉષ્માવહન અને ઉષ્માનયનમાં વહન માધ્યમ તરીકે કેટલાંક દ્રવ્યોની જરૂર પડે છે. શૂન્યાવકાશમાં એકબીજાથી દૂર અલગ રહેલા પદાર્થો વચ્ચે ઉષ્માનું વહન આ પદ્ધતિઓ વડે થઈ શકતું નથી. પરંતુ ખૂબ જ દૂરના અંતરે રહેલા સૂર્યમાંથી પૃથ્વી ઉષ્મા મેળવે છે અને હવા ઉષ્માની અલ્પવાહક હોવા છતાં તેમાં ઉષ્માનયન રચાય તે પહેલાં આપણને હૂંફનો અનુભવ ઝડપથી થાય છે. ઉષ્મા પ્રસરણની ત્રીજી પદ્ધતિમાં માધ્યમની આવશ્યકતા હોતી નથી. તેને **વિકિરણ (radiation)** કહે છે તથા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો દ્વારા ઉત્સર્જિત ઊર્જાને **વિકિરણઊર્જા (radiant energy)** કહે છે. વિદ્યુત ચુંબકીય તરંગોમાં વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રનાં દોલનો અવકાશમાં સમય સાથે થતાં હોય છે. કોઈ પણ તરંગોની માફક વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો જુદી જુદી તરંગલંબાઈ ધરાવે છે અને શૂન્યાવકાશમાં એક સમાન ઝડપથી ગતિ કરે છે, જેને પ્રકાશની ઝડપ કહે છે, જે $3 \times 10^8\ m\ s^{-1}$ છે. આ બાબતનો વિગતવાર વધુ અભ્યાસ હવે પછી કરશો. પરંતુ હવે તમે જાણો છો કે શા માટે વિકિરણ દ્વારા ઉષ્માનાં પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર નથી અને તે શા માટે ઝડપી છે. આ રીતે ઉષ્મા શૂન્યાવકાશમાં સૂર્યથી પૃથ્વી સુધી સ્થાનાંતર કરે છે. બધા જ પદાર્થો વિકિરણ ઊર્જાનું ઉત્સર્જન કરે છે પછી ભલે ને તે ઘન, પ્રવાહી અથવા વાયુ હોય. કોઈ પણ પદાર્થ તેનાં તાપમાનને કારણે જે વિદ્યુત ચુંબકીય તરંગોનું ઉત્સર્જન કરે છે - ગરમ લાલચોળ લોખંડના સળિયામાંથી અથવા વિદ્યુત ગોળાનાં ફિલામેન્ટમાંથી નીકળતાં વિકિરણોની જેમ - તેને ઉષ્મીય વિકિરણ કહે છે.

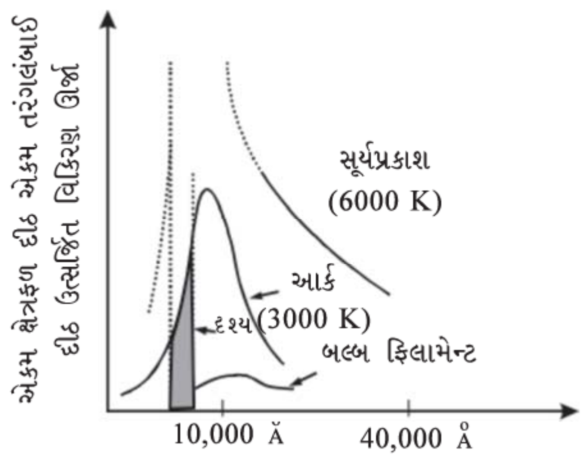
જ્યારે ઉષ્મીય વિકિરણો અન્ય પદાર્થ પર પડે છે ત્યારે તેનું આંશિક પરાવર્તન અને આંશિક શોષણ થાય છે વિકિરણ દ્વારા પદાર્થ ઉષ્માના જે જથ્થાનું શોષણ કરી શકે છે, તે પદાર્થના રંગ પર આધાર રાખે છે.

આપણે તે જોયું છે કે આછા હલકા રંગના પદાર્થ કરતાં કાળા રંગના પદાર્થો વિકિરણ ઊર્જાનું શોષણ અને ઉત્સર્જન વધુ સારી રીતે કરે છે. આ વાસ્તવિકતા આપણા દૈનિક જીવનમાં ઘણા બધા ઉપયોજનમાં જોઈ શકાય છે. આપણે ઉનાળામાં સફેદ અથવા આછા હલકા રંગનાં કપડાં પહેરીએ છીએ કે જેથી તે સૂર્યમાંથી ઓછી ઉષ્માનું શોષણ કરે. પરંતુ શિયાળા દરમિયાન આપણે ઘેરા રંગનાં કપડાં પહેરીએ છીએ કે જે સૂર્યમાંથી વધુ ઉષ્માનું શોષણ કરી આપણા શરીરને હુંફાળું રાખે. ખોરાક રાંધવાનાં વાસણોનાં તળિયા કાળા રંગનાં રાખવામાં આવે છે. જેથી તે ગૅસ સ્ટવના અગ્નિમાંથી મહત્તમ ઉષ્માનું શોષણ કરીને તેને રાંધવા માટેના શાકભાજીને આપે.

આ જ રીતે બે દીવાલવાળો ફ્લાસ્ક અથવા થર્મોસ બૉટલ એક એવી રચના છે કે જે બૉટલમાં ભરેલ વસ્તુ અને બહારના પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનો વિનિમય લઘુતમ કરતી કાચની બે દીવાલોવાળું પાત્ર છે. જેની અંદર અને બહારની દીવાલો પર ચાંદીનો ઢોળ ચઢાવેલ હોય છે. અંદરની દીવાલ વડે વિકિરણ પરાવર્તન પામી બૉટલમાં રહેલ વસ્તુમાં પાછું ફરે છે. આ જ રીતે બહારની દીવાલ બહારથી આવતા કોઈ પણ વિકિરણોને પરાવર્તિત કરે છે. બે દીવાલોની વચ્ચેની જગ્યાને શૂન્યાવકાશિત કરી વહન અને નયન દ્વારા થતાં ઉષ્માનો વ્યય ઘટાડવામાં આવે છે અને ફ્લાસ્કને બુચ (cork) જેવા ઉષ્મા પ્રતિરોધક પર મૂકવામાં આવે છે. માટે જ આ સાધન ગરમ વસ્તુ (જેમકે, દૂધ)ને ઠંડી થતી રોકે છે તેમજ વૈકલ્પિક રીતે ઠંડી વસ્તુ (જેમકે, બરફ) સંગ્રહીત કરવા માટે ઉપયોગી છે.

11.9.4 કાળા પદાર્થનું વિકિરણ (Black body Radiation)

હજુ સુધી આપણે ઉષ્મીય વિકિરણમાં તરંગલંબાઈની વિગતો દર્શાવેલ નથી. કોઈ પણ તાપમાને થતા ઉષ્મીય વિકિરણ માટે અગત્યની બાબત તે છે કે, તે કોઈ એક (અથવા થોડી ઘણી) તરંગલંબાઈઓ નહિ પણ નાનીથી મોટી તરંગલંબાઈ ધરાવતો સળંગ વર્ણપટ ધરાવે છે. જોકે, વિકિરણ ઊર્જા જુદી જુદી તરંગલંબાઈઓ માટે બદલાય છે. આકૃતિ 11.18માં કાળા પદાર્થ દ્વારા એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ એકમ તરંગલંબાઈ દીઠ ઉત્સર્જિત વિકિરણ ઊર્જા વિરુદ્ધ જુદાં જુદાં તાપમાને તરંગલંબાઈના પ્રાયોગિક વક્રો દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 11.18 : કાળા પદાર્થ માટે જુદાં જુદાં તાપમાને ઉત્સર્જિત ઊર્જા વિરુદ્ધ તરંગલંબાઈ

નોંધો કે મહત્તમ ઊર્જા માટે તરંગલંબાઈ λ_m તાપમાન વધે તેમ ઘટે છે. λ_m અને T વચ્ચેનો સંબંધ **વીનનો સ્થાનાંતર નિયમ** તરીકે જાણીતો છે તે નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

$$\lambda_m T = \text{અચળ} \qquad (11.15)$$

અચળાંકનું મૂલ્ય (વીન અચળાંક) $2.9 \times 10^{-3}\ m\ K$ છે. આ નિયમ સમજાવે છે કે શા માટે લોખંડના ટુકડાને ગરમ જ્યોતમાં તપાવતા તેનો રંગ પ્રથમ આછો લાલ થાય છે, પછી લાલાશપડતો પીળો અને છેલ્લે સફેદ થાય છે. ચંદ્ર, સૂર્ય અને બીજા તારા જેવા અવકાશી પદાર્થોની સપાટીના તાપમાનનો અંદાજ કાઢવા માટે વીનનો નિયમ ઉપયોગી છે. ચંદ્રમાંથી આવતા 14 μm તરંગલંબાઈવાળા પ્રકાશની તીવ્રતા મહત્તમ મળે છે. વીનના નિયમ પરથી ચંદ્રની સપાટીનું તાપમાન 200 K અંદાજી શકાયું છે. સૂર્યના વિકિરણ ઊર્જા, $\lambda_m = 4753$ Å માટે મહત્તમ હોય છે. જેને અનુરૂપ તાપમાન $T = 6060\ K$ છે. યાદ રાખો કે, આ તાપમાન સૂર્યની સપાટીનું છે. તેના અંદરના ભાગનું નથી.

આકૃતિ 11.18માં કાળા પદાર્થના વિકિરણ વક્રોનું ખૂબ જ અર્થપૂર્ણ લક્ષણ એ છે કે વક્રો સાર્વત્રિક છે. તે ફક્ત તાપમાન ઉપર આધારિત છે પણ પરિમાણ, આકાર અથવા કાળા પદાર્થના દ્રવ્ય પર આધારિત નથી. વીસમી સદીની શરૂઆતમાં કાળા પદાર્થનાં વિકિરણોની સૈદ્ધાંતિક સમજૂતીના પ્રયત્નોએ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ક્વૉન્ટમ વાદની ક્રાંતિને ઉત્તેજન આપ્યું. જે તમે હવે પછીના અભ્યાસક્રમમાં શીખશો.

ખૂબ જ મોટાં અંતરો સુધી માધ્યમની ગેરહાજરીમાં (શૂન્યાવકાશમાં) ઊર્જાનું સ્થળાંતર વિકિરણ દ્વારા કરી શકાય છે. નિરપેક્ષ તાપમાન T એ પદાર્થમાંથી ઉત્સર્જિત કુલ વિદ્યુતચુંબકીય ઊર્જા તેના પરિમાણ, તેની ઉત્સર્જન-ક્ષમતા (ઉત્સર્જકતા) અને સૌથી મહત્ત્વનું તેનાં તાપમાન પર આધારિત હોય છે. સંપૂર્ણ ઉત્સર્જક પદાર્થ માટે એકમ સમયમાં ઉત્સર્જિત ઊર્જા (H) નીચે મુજબ આપી શકાય છે :

$$H = A\sigma T^4 \qquad (11.16)$$

જ્યાં, A ક્ષેત્રફળ અને T પદાર્થનું નિરપેક્ષ તાપમાન છે. આ સંબંધ પ્રાયોગિક રીતે સ્ટિફન દ્વારા સાબિત થયો અને પછી સૈદ્ધાંતિક રીતે બૉલ્ટ્ઝમૅને સાબિત કર્યો જેને **સ્ટિફન બૉલ્ટ્ઝમૅન નિયમ** કહે છે અને અચળાંક σ ને સ્ટિફન બૉલ્ટ્ઝમૅન અચળાંક કહે છે. તેનું SI એકમમાં મૂલ્ય 5.67×10^{-8} W m^{-2} K^{-4} છે. મોટા ભાગના પદાર્થો સમીકરણ A2 વડે મળતી ઉષ્માના દરનો કેટલોક જ ભાગ ઉત્સર્જિત કરે છે. દીવાની મેશ (Lamp Black) જેવા પદાર્થો આ મર્યાદાની ખૂબ જ નજીક ગણી શકાય. માટે પરિમાણરહિત ઉત્સર્જકતા તરીકે ઓળખાતો ગુણોત્તર eને વ્યાખ્યાયિત કરીને,

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad (11.17)$$

લખી શકાય છે :

અહીં સંપૂર્ણ ઉત્સર્જક માટે $e = 1$. ઉદાહરણ તરીકે ટંગસ્ટન બલ્બ માટે e = લગભગ 0.4 છે. આથી, ટંગસ્ટન બલ્બના 3000 K તાપમાને અને 0.3 cm^2 સપાટીનાં ક્ષેત્રફળમાંથી ઉત્સર્જિત ઊર્જાનો દર $H = 0.3 \times 10^{-4} \times 0.4 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (3000)^4 = 55.11$ W.

T_s તાપમાનવાળા પરિસરમાં રાખેલ T તાપમાનવાળો પદાર્થ ઊર્જાનું ઉત્સર્જન કરે છે તે જ રીતે મેળવે છે. સંપૂર્ણ ઉત્સર્જક પદાર્થ માટે વિકિરણ ઊર્જા ગુમાવવાનો ચોખ્ખો દર

$$H = \sigma A(T^4 - T_s^{\,4})$$

e ઉત્સર્જકતા ધરાવતા પદાર્થ માટે ઉપર્યુક્ત સંબંધ થોડા ફેરફાર સાથે નીચે મુજબ આપી શકાય :

$$H = e\sigma A(T^4 - T_s^{\,4}) \qquad (11.18)$$

ઉદાહરણ તરીકે, આપણા શરીરમાંથી ઉત્સર્જિત ઉષ્માનો અંદાજ કાઢીએ. ધારો કે એક વ્યક્તિનાં શરીરની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ 1.9 m^2 જેટલું છે અને ઓરડાનું તાપમાન 22 °C છે. આપણે જાણીએ છીએ તે મુજબ શરીરનું આંતરિક તાપમાન 37 °C જેટલું હોય છે. ચામડીનું તાપમાન 28 °C (ધારો કે) હોઈ શકે. વિદ્યુતચુંબકીય વિકિરણ ઉત્સર્જન માટે સંકળાયેલ ચામડીની ઉત્સર્જકતા 0.97 છે, તો ઊર્જા ગુમાવવાનો દર;

$$H = 5.67 \times 10^{-8} \times 1.9 \times 0.97 \times \{(301)^4 - (295)^4\}$$
$$= 66.4 \text{ W}$$

જે સ્થિર સ્થિતિમાં શરીર દ્વારા ઉત્પાદિત થતી ઊર્જાના દર (120 W) કરતાં અડધાથી વધુ છે. આ ઉષ્માવ્યય અસરકારક રીતે ઘટાડવા (સામાન્ય કપડાં કરતાં વધુ સારાં) આધુનિક આર્કટિક (ઉત્તર ધ્રુવ પ્રદેશના) કપડાંઓમાં પાતળું, ચળકાટવાળું ધાતુનું વધારાનું આવરણ હોય છે, જે ચામડીની આગળ હોવાથી શરીરનાં વિકિરણોને પરાવર્તિત કરે છે.

11.9.5 ગ્રીનહાઉસ અસર (Green House Effect)

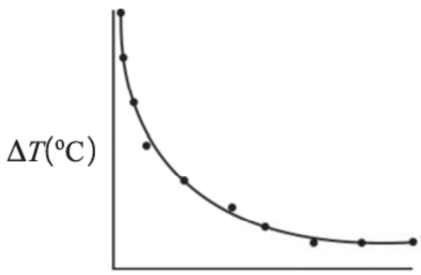
સૂર્યમાંથી મેળવેલ ઊર્જાનું પૃથ્વી શોષણ કરી ઉત્સર્જન કરે છે, તેથી તેની સપાટી ઉષ્મીય વિકિરણનો સ્રોત છે. આ વિકિરણોની તરંગલંબાઈ લાંબી તરંગલંબાઈના (ઇન્ફ્રારેડ) વિભાગમાં હોય છે. પરંતુ આ વિકિરણનો મોટો ભાગ ગ્રીનહાઉસ વાયુઓ જેવા કે, કાર્બન ડાયૉક્સાઇડ (CO_2), મીથેન (CH_4), નાઇટ્રસ ઑક્સાઇડ (N_2O), ક્લોરોફ્લોરો કાર્બન (CF_xCl_x) અને ટ્રોપોસ્ફિયરિક ઓઝોન (O_3) વડે શોષાય છે. આ ઉષ્મા વાતાવરણને ગરમ કરે છે અને ફરીથી પૃથ્વીને વધુ ઊર્જા આપે છે. પરિણામે પૃથ્વીની સપાટી હુંફાળી રહે છે. આને કારણે સપાટીનાં વિકિરણોની તીવ્રતા વધે છે. ઉપર વર્ણવેલ પ્રક્રિયાનું ચક્ર, શોષણ માટે વિકિરણ ન મળે ત્યાં સુધી ચાલુ રહે છે. અંતિમ પરિણામ સ્વરૂપે પૃથ્વીની સપાટી અને વાતાવરણ ગરમ થાય છે. જેને **ગ્રીનહાઉસ અસર** કહે છે. ગ્રીનહાઉસ અસર ન હોય તો પૃથ્વીનું તાપમાન −18 °C હોત.

માનવીય પ્રવૃત્તિઓને કારણે ગ્રીનહાઉસ વાયુની સાંદ્રતામાં વધારો થયો છે જે પૃથ્વીને વધુ ગરમ બનાવી રહી છે. આ વધારાને કારણે એક અંદાજ મુજબ આ શતાબ્દીની શરૂઆતથી પૃથ્વીના સરેરાશ તાપમાનમાં 0.3 થી 0.6 °C જેટલો વધારો થઈ રહ્યો છે. પરંતુ હવે પછીની શતાબ્દીના મધ્ય ભાગે આખી પૃથ્વીનું (ગ્લોબલ વિશ્વ વ્યાપક) તાપમાન આજના તાપમાન કરતાં 1 °C થી 3 °C જેટલું વધારે હશે. આ ગ્લોબલ વોર્મિંગ માનવજીવન, વનસ્પતિઓ અને પ્રાણીઓ માટે મુસીબતનું કારણ બનશે. ગ્લોબલ વોર્મિંગ (વિશ્વ વ્યાપક ગરમી)ને કારણે હિમશીલાઓ ઝડપથી પીગળશે, સમુદ્રની સપાટી વધશે અને વાતાવરણની રચના (ભાત) બદલાશે. ઘણા દરિયાકિનારાનાં શહેરો ડૂબી જવાનાં ભયસ્થાને છે. ગ્રીનહાઉસ અસરનાં વધારાને પરિણામે રણ વિસ્તારમાં વધારો થશે. સમગ્ર દુનિયા ગ્લોબલ વોર્મિંગની અસરને લઘુતમ કરવા માટેના પ્રયત્નો કરે છે.

11.10 ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ (NEWTON'S LAW OF COOLING)

આપણે જાણીએ છીએ કે ગરમ પાણી કે ગરમ દૂધને ટેબલ પર મૂકી રાખવામાં આવે, તો તે ધીમે ધીમે ઠંડા પડવાની શરૂઆત કરે છે અને છેવટે પરિસરનાં તાપમાને પહોંચે છે. આપેલ પદાર્થ તેના પરિસર સાથે ઉષ્માનો વિનિમય કરીને કેવી રીતે ઠંડા પડે છે. તેનો અભ્યાસ કરવા નીચે મુજબની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

ભેળક સાથેના કૅલોરિમીટરમાં કેટલુંક પાણી, ધારો કે 300 ml લઈ તેને બે છિદ્રોવાળાં ઢાંકણાં વડે બંધ કરો. ભેળકને એક છિદ્રમાંથી અને થરમૉમીટરને બીજા છિદ્રમાંથી પસાર કરી તેમાં મૂકો. થરમૉમીટરનો બલ્બ (પારાવાળો ભાગ) પાણીમાં ડૂબે તેની ખાતરી કરો. થરમૉમીટરનું અવલોકન નોંધો. આ અવલોકન પરિસરનું તાપમાન T_1 છે. કૅલોરિમીટરમાં લીધેલા પાણીનું તાપમાન ઓરડાનાં તાપમાનથી વધુ (એટલે કે પરિસરનાં તાપમાન) એટલે કે 40 °C થાય ત્યાં સુધી ગરમ કરો. ઉષ્માપ્રાપ્તિસ્થાન દૂર કરી પાણીને ગરમ કરવાનું બંધ કરો. સ્ટૉપવૉચ શરૂ કરીને સમયના ચોક્કસ ગાળાઓ માટે, જેમકે, પ્રત્યેક મિનિટે ભેળક વડે પાણીને સતત હલાવતાં રહો અને થરમૉમીટરના અવલોકનો નોંધો. પાણીનું તાપમાન T_2 પરિસરના તાપમાનથી 5 °C વધુ થાય ત્યાં સુધી સતત તાપમાન નોંધો. ત્યાર બાદ તાપમાનનાં બધાં જ મૂલ્યો માટે $\Delta T = T_2 - T_1$ને Y-અક્ષ પર અને તેને અનુરૂપ સમય tને X-અક્ષ પર લઈ આલેખ દોરો (આકૃતિ 11.19).



આકૃતિ **11.19** *સમય સાથે ગરમ પાણીનું શીતન દર્શાવતો આલેખ*

આલેખ પરથી તમે તારવી શકો છો કે કેવી રીતે ગરમ પાણીનું શીતન પોતાના અને પરિસરનાં તાપમાનના તફાવત પર આધારિત છે. તમે તે પણ નોંધ લઈ શકો છો કે પ્રારંભમાં શીતનનો દર વધારે અને પદાર્થનું તાપમાન ઘટે તેમ તે ઘટે છે.

ઉપર્યુક્ત પ્રવૃત્તિ દર્શાવે છે કે ગરમ પદાર્થ તેની ઉષ્મા પરિસરમાં ઉષ્માવિકિરણ સ્વરૂપે ગુમાવે છે. ઉષ્મા ગુમાવવાનો દર પદાર્થ અને તેના પરિસર વચ્ચેનાં તાપમાનના તફાવત પર આધારિત છે. ન્યૂટન એવા પ્રથમ વૈજ્ઞાનિક હતા જેમણે બંધ પ્રણાલીની અંદર રહેલા પદાર્થ દ્વારા ગુમાવાતી ઉષ્મા તથા તેના તાપમાન વચ્ચેના સંબંધનો યોજનાબદ્ધ અભ્યાસ કર્યો.

ન્યૂટનના શીતનના નિયમ અનુસાર, કોઈ પદાર્થના ઉષ્મા ગુમાવવાનો દર $-dQ/dt$ પદાર્થ અને તેના પરિસર વચ્ચેનાં તાપમાનના તફાવત $\Delta T = (T_2 - T_1)$ને સપ્રમાણ હોય છે. આ નિયમ નાના તાપમાન તફાવત માટે જ પળાય છે. ઉપરાંત વિકિરણ દ્વારા ગુમાવાતી ઉષ્મા પદાર્થની સપાટીની પ્રકૃતિ અને ખુલ્લી સપાટીનાં ક્ષેત્રફળ પર આધારિત છે. માટે આપણે લખી શકીએ કે,

$$-\frac{dQ}{dt} = k(T_2 - T_1) \tag{11.19}$$

જ્યાં, k સપ્રમાણતાનો ધન અચળાંક છે. જે પદાર્થની સપાટીની પ્રકૃતિ અને ક્ષેત્રફળ પર આધારિત છે. ધારો કે, T_2 તાપમાને પદાર્થનું દળ m અને વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા s છે. ધારો કે પરિસરનું તાપમાન T_1 છે. જો dt જેટલા સમયમાં તાપમાનમાં થતો નાનો ઘટાડો dT_2 હોય, તો ગુમાવાતી ઉષ્માનો જથ્થો,

$$dQ = ms\, dT_2$$

∴ ઉષ્મા ગુમાવવાનો દર,

$$\frac{dQ}{dt} = ms\frac{dT_2}{dt} \tag{11.20}$$

સમીકરણ (11.15) અને (11.16) પરથી,

$$-ms\frac{dT_2}{dt} = k(T_2 - T_1)$$

$$\frac{dT_2}{T_2 - T_1} = -\frac{k}{ms}dt = -K dt \tag{11.21}$$

જ્યાં, $K = k / m\, s$

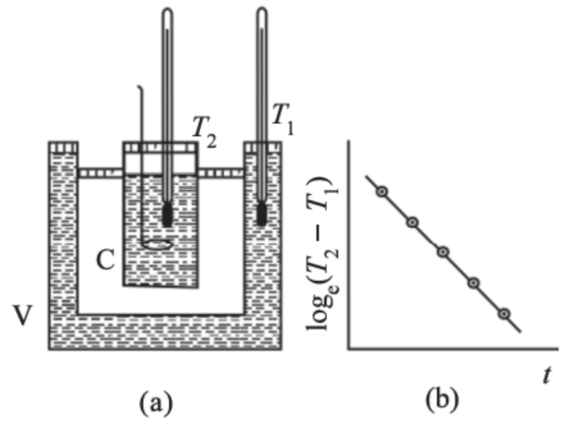
સંકલન કરતાં,

$$\log_e(T_2 - T_1) = -K\,t + c \tag{11.22}$$

અથવા $T_2 = T_1 + C'\, e^{-Kt}$; જ્યાં, $C' = e^c$ (11.23)

સમીકરણ (11.23)ની મદદથી તાપમાનના ચોક્કસ વિસ્તાર માટે પદાર્થનાં શીતનના સમયની ગણતરી શક્ય છે.

તાપમાન તફાવતના નાના ગાળા માટે ઉષ્માવહન, ઉષ્માનયન અને ઉષ્માવિકિરણની સંયુક્ત રીતે શીતનનો દર તાપમાનના ફેરફારને સપ્રમાણ હોય છે. કોઈ રેડિએટરમાંથી ઓરડામાં સ્થાનાંતર પામતી ઉષ્મા, ઓરડાની દીવાલો દ્વારા થતો ઉષ્માવ્યય અથવા ટેબલ પર મૂકેલ કપમાં રહેલી ચાના શીતનમાં આ સાચી પડતી સન્નિકટતા છે.



આકૃતિ **11.20** *ન્યૂટનના શીતનના નિયમની ચકાસણી*

આકૃતિ 11.20(a)માં દર્શાવેલ પ્રાયોગિક ગોઠવણી દ્વારા ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ ચકાસી શકાય છે. આ ગોઠવણીમાં બે દીવાલ ધરાવતા પાત્ર (V)ની બે દીવાલોની વચ્ચે પાણી ભરેલું હોય છે. ગરમ પાણી ભરેલું તાંબાનું કૅલોરિમીટર (C) બે

દીવાલ ધરાવતાં પાત્રની અંદર મૂકવામાં આવે છે. બૂચની અંદરથી પસાર કરેલાં બે થરમૉમીટરની મદદથી કૅલોરિમીટરમાં રહેલા પાણીનું તાપમાન T_2 અને બે દીવાલોની વચ્ચે રહેલા ગરમ પાણીનું તાપમાન T_1 નોંધી શકાય છે. કૅલોરિમીટરમાં રહેલા ગરમ પાણીનું તાપમાન સમયના સમાન ગાળા માટે નોંધવામાં આવે છે. $\log_e(T_2 - T_1)$ અને સમય (t) વચ્ચે આલેખ દોરવામાં આવે છે. આ આલેખની પ્રકૃતિ આકૃતિ 11.20(b)માં દર્શાવ્યા મુજબ ઋણ ઢાળ ધરાવતી સુરેખા છે, જે સમીકરણ (11.22)ને અનુમોદિત કરે છે.

ઉદાહરણ 11.8 20 °C ઓરડાનાં તાપમાને એક વાસણમાં ભરેલ ગરમ ભોજન બે મિનિટમાં 94 °Cથી 86 °C જેટલું ઠંડું થાય છે. તેનું તાપમાન 71 °Cથી 69 °C થવા માટે કેટલો સમય લાગશે ?

ઉકેલ 94 °C અને 86 °Cનું સરેરાશ તાપમાન 90 °C થશે જે ઓરડાનાં તાપમાન કરતાં 70 °C વધુ છે. આ સ્થિતિમાં વાસણ 2 મિનિટમાં 8 °C જેટલું ઠંડું થાય છે. સમીકરણ 11.21નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{\text{તાપમાનમાં થતો ફેરફાર}}{\text{સમય}} = K\Delta T$$

$$\frac{8\ ^{\circ}\text{C}}{2\ \text{min}} = K(70\ ^{\circ}\text{C})$$

69 °C અને 71 °Cનું સરેરાશ તાપમાન 70 °C છે, જે ઓરડાના તાપમાન કરતાં 50 °C વધુ છે. આ સ્થિતિ માટે પણ K મૂળ સ્થિતિ જેટલો સમાન છે.

$$\frac{2\ ^{\circ}\text{C}}{\text{સમય}} = K(50\ ^{\circ}\text{C})$$

ઉપરનાં બંને સમીકરણોનો ભાગાકાર કરતાં,

$$\frac{8\ ^{\circ}\text{C}/2\ \text{min}}{2\ ^{\circ}\text{C}/\text{સમય}} = \frac{K(70\ ^{\circ}\text{C})}{K(50\ ^{\circ}\text{C})}$$

સમય = 0.7 min

= 42 s

સારાંશ

1. ઉષ્મા એ ઊર્જાનું સ્વરૂપ છે. જે પદાર્થ અને તેની આસપાસનાં માધ્યમ વચ્ચેનાં તાપમાનના તફાવતને કારણે તેમની વચ્ચે વહન પામે છે. પદાર્થનું ગરમપણું માત્રાત્મકરૂપે તાપમાન સ્વરૂપે નિરૂપિત કરવામાં આવે છે.
2. તાપમાનમાપક રચના (થરમૉમીટર)માં કેટલાક માપી શકાય તેવા ગુણધર્મો (જેને તાપીય ગુણધર્મો કહે છે)નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે, જે તાપમાન સાથે ફેરફાર અનુભવે છે. જુદાં જુદાં થરમૉમીટરો જુદાં જુદાં તાપમાન માપક્રમ ધરાવે છે. તાપમાન માપક્રમ તૈયાર કરવા માટે બે નિયત બિંદુઓ નક્કી કરવામાં આવે છે અને તેને અનુરૂપ તાપમાનનાં બે યાદચ્છિક મૂલ્યો નક્કી કરવામાં આવે છે. આ બે સંખ્યાઓ માપક્રમના ઉદ્‌ગમ અને તેના એકમનાં પરિમાણ નિશ્ચિત કરે છે.
3. સેલ્સિયસ માપક્રમ (t_C) અને ફેરનહીટ (t_F) વચ્ચેનો સંબંધ
$$t_F = (9/5)\ t_C + 32$$
4. દબાણ (P), કદ (V) અને નિરપેક્ષ તાપમાન (T) વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું આદર્શવાયુ સમીકરણ,
$$PV = \mu RT$$
જ્યાં, μ મોલ સંખ્યા અને R સાર્વત્રિક વાયુ નિયતાંક છે.
5. નિરપેક્ષ તાપમાન માપક્રમમાં માપક્રમનું શૂન્ય એ તાપમાન નિરપેક્ષ શૂન્ય છે. આ એવું તાપમાન છે કે જ્યાં, કુદરતમાં રહેલા પદાર્થોમાં થતી આણ્વિક પ્રક્રિયાઓ લઘુતમ હોય છે. કૅલ્વિન નિરપેક્ષ તાપમાન માપક્રમ (T)ના એકમનું પરિમાણ અને સેલ્સિયસ તાપમાન માપક્રમ (t_C)ના એકમના પરિમાણ સમાન હોય છે. પરંતુ મૂળ બિંદુઓમાં તફાવત હોય છે.
$$T_C = T - 273.15$$
6. રેખીય પ્રસરણાંક (α_l) અને કદ-પ્રસરણાંક (α_v)ને નીચે આપેલ સંબંધ વડે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે :
$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \Delta T \qquad \frac{\Delta V}{V} = \alpha_V \Delta T$$
જ્યાં, Δl અને ΔV અનુક્રમે લંબાઈ l અને કદ Vનાં ΔT તાપમાને થતાં ફેરફારો દર્શાવે છે. તેમની વચ્ચેનો સંબંધ :
$$\alpha_v = 3\ \alpha_l$$

7. પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરાય છે :

$$S = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

જ્યાં, m પદાર્થનું દળ અને ΔQ તેના તાપમાનમાં ΔT જેટલો ફેરફાર કરવા માટેની જરૂરી ઉષ્મા છે. પદાર્થની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરાય છે :

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

જ્યાં, μ પદાર્થની મોલ સંખ્યા છે.

8. ગલન ગુપ્ત ઉષ્મા (L_F), સમાન તાપમાન અને દબાણે એકમ દળ ધરાવતાં ઘન પદાર્થને પ્રવાહીમાં રૂપાંતર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા છે.

બાષ્પાયન ગુપ્ત ઉષ્મા (L_v), તાપમાન અને દબાણમાં ફેરફાર થયા વગર એકમ દળનાં પ્રવાહીને વાયુમાં રૂપાંતર કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા છે.

9. ઉષ્મા-પ્રસરણની ત્રણ રીતો છે : ઉષ્માવહન, ઉષ્માનયન અને ઉષ્માવિકિરણ.

10. ઉષ્માવહનમાં, પદાર્થના પાસપાસે રહેલા વિભાગો વચ્ચે ઉષ્માનું પ્રસરણ અણુઓનાં દોલનો મારફતે થાય છે. જેમાં દ્રવ્યનું વહન થતું નથી. L લંબાઈ અને A નિયમિત આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં સળિયાના બે છેડાનું તાપમાન T_C અને T_D જેટલું જાળવી રાખવામાં આવેલ હોય ત્યારે ઉષ્માવહનનો દર H :

$$H = KA\,\frac{T_C - T_D}{L}$$

જ્યાં, K સળિયાના દ્રવ્યની ઉષ્માવાહકતા છે.

11. ન્યૂટનનાં શીતનના નિયમ અનુસાર, પદાર્થમાં શીતનનો દર પરિસર સાપેક્ષે પદાર્થના વધારાનાં તાપમાનને સપ્રમાણ હોય છે. $\frac{dQ}{dt} = -k(T_2 - T_1)$

જ્યાં, T_1 પરિસર માધ્યમનું તાપમાન અને T_2 પદાર્થનું તાપમાન છે.

ભૌતિકરાશી	સંજ્ઞા	પારિમાણિક સૂત્ર	એકમ	નોંધ
પદાર્થનો જથ્થો	μ	[mol]	mol	
સેલ્સિયસ તાપમાન	t_c	[K]	°C	$t_c = T - 273.15$
કૅલ્વિન નિરપેક્ષ તાપમાન	T	[K]	K	
રેખીય પ્રસરણાંક	α_l	$[K^{-1}]$	K^{-1}	
કદ-પ્રસરણાંક	α_v	$[K^{-1}]$	K^{-1}	$\alpha_v = 3\,\alpha_l$
તંત્રને આપેલ ઉષ્મા	ΔQ	$[ML^2T^{-2}]$	J	Q ચલિત અવસ્થા માટે નથી.
વિશિષ્ટ ઉષ્મા	s	$[L^2T^{-2}K^{-1}]$	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$	
ઉષ્માવાહકતા	K	$[MLT^{-3}K^{-1}]$	$J\ s^{-1}K^{-1}$	$H = -KA\frac{dT}{dx}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. કૅલ્વિન તાપમાન (T) અને સેલ્સિયસ તાપમાન (t_c)ને સાંકળતો સંબંધ
$T = t_c + 273.15$
અને પાણીનાં ત્રિબિંદુ માટે $T = 273.16$ K સંબંધ યથાર્થ છે (પસંદગી મુજબ). આ પસંદગી મુજબ, સેલ્સિયસ માપક્રમ પર બરફનું ગલનબિંદુ અને પાણીનું ઉત્કલનબિંદુ (બંને 1 વાતાવરણ દબાણે) અનુક્રમે 0 °C અને 100 °Cની ખૂબ જ નજીક છે, પરંતુ યથાર્થ રીતે તેનાં જેટલા જ નથી. તાજેતરમાં આ નિયત બિંદુનાં આ મુલ્યો મૂળ સેલ્સિયસ માપક્રમમાં 0 °C અને 100 °Cના જેટલા છે (પસંદગી મુજબ) પરંતુ હવે નિયત બિંદુ તરીકે પાણીનાં ત્રિબિંદુને પસંદ કરવામાં આવે છે. કારણ કે તેનું તાપમાન અનન્ય હોય છે.
2. પ્રવાહી વાયુ સાથે સંતુલિત સ્થિતિમાં હોય ત્યારે સમગ્ર તંત્રમાં તેમનાં તાપમાન તથા દબાણ સમાન હોય છે. સંતુલનમાં રહેલી બે અવસ્થાઓ તેમના કદ માટે જુદી પડે છે (એટલે કે ઘનતા). સંતુલિત સ્થિતિમાં રહેલી ગમે તેટલી સંખ્યાની અવસ્થા માટે આ બાબત સાચી છે.
3. ઉષ્મા સ્થાનાંતરમાં હંમેશાં બે તંત્રો અથવા એક જ તંત્રના બે ભાગો વચ્ચે તાપમાનનો તફાવત સંકળાયેલ હોય છે. ઊર્જાનું સ્થાનાંતર જેમાં કોઈ પણ તાપમાનનો તફાવત સંકળાયેલ ના હોય તે ઉષ્મા ન હોય.
4. ઉષ્માનયનમાં તરલના ભાગોનાં અસમાન તાપમાનને કારણે દ્રવ્યનું વહન સંકળાયેલ છે. કોઈ નળીમાંથી પડી રહેલ પાણીની ધાર નીચે ગરમ સળિયો મૂકતાં થતો ઉષ્માનો ઘટાડો, સળિયાની સપાટી અને પાણી વચ્ચે ઉષ્માવહનને લીધે થાય છે, નહિ કે પાણીમાં ઉષ્માનયનની રીતે.

સ્વાધ્યાય

11.1 નિયૉન અને કાર્બન ડાયૉક્સાઇડનાં ત્રિબિંદુ અનુક્રમે 24.57 K અને 216.55 K છે. આ તાપમાન મૂલ્યોને સેલ્સિયસ અને ફેરનહીટ માપક્રમમાં દર્શાવો.

11.2 બે નિરપેક્ષ માપક્રમ A અને B પર પાણીનું ત્રિબિંદુ 200 A અને 350 B દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે, તો T_A અને T_B વચ્ચે શું સંબંધ હોઈ શકે ?

11.3 કેટલાક થરમૉમીટરનો વિદ્યુતીય અવરોધ ઓહ્મમાં તાપમાન સાથે નીચે દર્શાવેલ અંદાજિત નિયમ અનુસાર બદલાય છે :
$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$
પાણીનાં ત્રિબિંદુ (273.16 K) એ થરમૉમીટરનો અવરોધ 101.6 Ω અને સીસાનાં સામાન્ય ગલનબિંદુ (600.5 K) પર અવરોધ 165.5 Ω છે, તો થર્મોમીટરનો અવરોધ 123.4 Ω હોય ત્યારે તેનું તાપમાન કેટલું હશે ?

11.4 નીચેનાના જવાબ આપો :
(a) આધુનિક થરમૉમેટ્રીમાં પાણીનું ત્રિબિંદુ પ્રમાણિત નિયત બિંદુ છે. શા માટે ? બરફનું ગલનબિંદુ અને પાણીના ઉત્કલન બિંદુને પ્રમાણભૂત નિયતબિંદુ સ્વીકારવામાં (જેમ મૂળ સેલ્સિયસ માપક્રમમાં સ્વીકારેલ) ખોટું શું છે ?
(b) ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ મૂળ સેલ્સિયસ માપક્રમમાં બે નિયત બિંદુઓને અનુરૂપ નક્કી કરેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે 0 °C અને 100 °C છે. નિરપેક્ષ માપક્રમ પર બેમાંથી એક નિયત બિંદુ પાણી માટેનું ત્રિબિંદુ લેવામાં આવે છે. જેમાં કૅલ્વિન પ્રમાણભૂત માપક્રમ પર તેને અનુરૂપ સંખ્યા 273.16 K નક્કી કરેલ છે. આ માપક્રમ પર (કૅલ્વિન) બીજું નિયત બિંદુ શું હશે ?
(c) નિરપેક્ષ તાપમાન (કૅલ્વિન માપક્રમ) Tનો સેલ્સિયસ માપક્રમ તાપમાન t_c સાથેનો સંબંધ નીચે મુજબ છે :
$$t_c = T - 273.15$$
શા માટે આપણે આ સંબંધમાં 273.16 ને બદલે 273.15 લીધા છે ?
(d) નિરપેક્ષ માપક્રમ પર પાણીનાં ત્રિબિંદુ માટે એવું કયું તાપમાન છે કે જેના માટે એકમ ગાળાનું પરિમાણ ફેરનહીટ માપક્રમ પરના એકમ ગાળાનાં પરિમાણ જેટલું જ હશે ?

11.5 બે આદર્શ વાયુ, થરમૉમીટર A અને Bમાં અનુક્રમે ઑક્સિજન અને હાઇડ્રોજનનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો છે. મળતાં અવલોકનો નીચે મુજબ છે :

તાપમાન	દબાણ થરમૉમીટર A	દબાણ થરમૉમીટર B
પાણીનું ત્રિબિંદુ	1.250×10^5 Pa	0.200×10^5 Pa
સલ્ફરનું સામાન્ય ગલનબિંદુ	1.797×10^5 Pa	0.287×10^5 Pa

(a) સલ્ફરનું સામાન્ય ગલનબિંદુનું નિરપેક્ષ તાપમાન થરમૉમીટર A અને Bનાં વાંચન મુજબ શું હશે ?
(b) થરમૉમીટર A અને B ના જવાબમાં થોડો તફાવત હોવાનું કારણ તમારા મંતવ્ય મુજબ શું હોઈ શકે ? (બંને થરમૉમીટર ક્ષતિરહિત છે.) બંને વાંચનાંકો વચ્ચેની વિસંગતતા ઘટાડવા માટે આ પ્રયોગમાં કઈ પદ્ધતિ (કાર્યપ્રણાલી) જરૂરી છે ?

11.6 1 m લાંબી સ્ટીલની પટ્ટીનું 27.0 °C તાપમાને ચોકસાઈપૂર્વક અંકન કરેલ છે. ગરમ દિવસે જ્યારે તાપમાન 45 °C હોય ત્યારે સ્ટીલનાં એક સળિયાની લંબાઈ આ પટ્ટી વડે માપતાં તે 63.0 cm મળે છે. તો આ દિવસે સળિયાની વાસ્તવિક લંબાઈ શું હશે ? આ જ સ્ટીલનાં સળિયાની લંબાઈ 27.0 °C તાપમાનવાળા દિવસે કેટલી હશે ? સ્ટીલ માટે રેખીય પ્રસરણાંક = 1.20×10^{-5} K^{-1}.

11.7 એક મોટા સ્ટીલનાં પૈડાને તે જ દ્રવ્યની બનેલી મોટી ધરી ઉપર બંધબેસતું કરવું છે. 27 °C તાપમાને ધરીનો બહારનો વ્યાસ 8.70 cm અને પૈડાના કેન્દ્રમાં રહેલ છિદ્ર (હૉલ)નો વ્યાસ 8.69 cm છે. સૂકા બરફ વડે ધરીને ઠંડી કરેલ છે. ધરીનાં કયા તાપમાને પૈડું તેના પર સરકવા લાગશે. જરૂરી તાપમાનના વિસ્તાર માટે સ્ટીલનો રેખીય પ્રસરણાંક અચળ રહે છે. તેમ સ્વીકારો $\alpha_{\text{સ્ટીલ}} = 1.20 \times 10^{-5}$ K^{-1}.

11.8 તાંબાની એક તકતીમાં છિદ્ર પાડેલ છે. જેનો 27.0 °C તાપમાને વ્યાસ 4.24 cm છે. આ તાંબાની તક્તીને 227 °C સુધી ગરમ કરવામાં આવે, તો છિદ્રનાં વ્યાસમાં થતો ફેરફાર કેટલો હશે ? તાંબાનો રેખીય પ્રસરણાંક = 1.70×10^{-5} K^{-1}

11.9 27 °C તાપમાને 1.8 m લાંબા પિત્તળના તારને બે દૃઢ આધારો વચ્ચે અલ્પ તણાવ સાથે જડિત કરેલ છે. જો તારને –39 °C તાપમાન સુધી ઠંડો પાડવામાં આવે તો તારમાં ઉદ્ભવતો તણાવ કેટલો હશે ? તારનો વ્યાસ 2.0 mm છે. પિત્તળ માટે રેખીય પ્રસરણાંક 2.0×10^{-5} K^{-1} અને યંગ મૉડ્યુલસ = 0.91×10^{11} Pa.

11.10 50 cm લંબાઈ અને 3.0 mm વ્યાસવાળા પિત્તળના સળિયાને તેટલી જ લંબાઈ અને તેટલા જ વ્યાસ ધરાવતાં સ્ટીલના સળિયા સાથે જોડવામાં આવે છે. સંયુક્ત સળિયાની મૂળ લંબાઈ 40 °C તાપમાને છે. જો તાપમાન 250 °C કરવામાં આવે, તો આ લંબાઈમાં થતો ફેરફાર કેટલો હશે ? શું જંક્શન પર ઉષ્મીય પ્રતિબળ ઉદ્ભવશે ? સળિયાના છેડાઓ પ્રસરણ પામવા માટે મુક્ત છે. (પિત્તળ માટે રેખીય પ્રસરણાંક = 2.0×10^{-5} K^{-1}, સ્ટીલ માટે રેખીય પ્રસરણાંક = 1.2×10^{-5} K^{-1}.

11.11 ગ્લિસરિન માટે કદ-પ્રસરણાંક 49×10^{-5} K^{-1} છે. જો તેનાં તાપમાનમાં 30 °C નો વધારો કરવામાં આવે, તો તેની ઘનતામાં થતો આંશિક ફેરફાર કેટલો હશે ?

11.12 8.0 kg દળના ઍલ્યુમિનિયમના એક બ્લૉકમાં છિદ્ર પાડવા માટે 10 kWનાં ડ્રિલમશીનનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. 2.5 મિનિટમાં બ્લૉકનાં તાપમાનમાં કેટલો વધારો થશે ? 50 % પાવર ડ્રિલમશીનને ગરમ થવામાં અથવા પરિસરમાં વ્યય થાય છે તેમ ધારો. ઍલ્યુમિનિયમની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા = 0.91 J g^{-1} K^{-1}.

11.13 2.5 kg દળના તાંબાના એક બ્લૉકને ભઠ્ઠીમાં 500 °C તાપમાન સુધી ગરમ કરવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ તેને મોટા બરફના બ્લૉક ઉપર મૂકવામાં આવે છે. કેટલા મહત્તમ જથ્થાનો બરફ ઓગળશે ? (તાંબાની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા = 0.39 J g^{-1} K^{-1}, પાણી માટે ગલન ગુપ્ત ઉષ્મા = 335 J g^{-1}).

11.14 ધાતુની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનાં પ્રયોગમાં 150 °C તાપમાને રહેલા 0.20 kg દળવાળા ધાતુના બ્લૉકને તાંબાનાં કેલોરિમીટરમાં મૂકવામાં આવે છે. (પાણીનો જળતુલ્યાંક 0.025 kg) જેમાં 150 cm^3 પાણી 27 °C તાપમાને આવેલું છે. અંતિમ તાપમાન 40 °C થાય છે. ધાતુની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાની ગણતરી કરો. જો પરિસરમાં વ્યય થતી ઉષ્માને અવગણવામાં ન આવે તો કરેલ ગણતરી દ્વારા મળતો આપનો જવાબ ધાતુની વાસ્તવિક ઉષ્માધારિતાના મૂલ્યથી વધુ હશે કે ઓછો ?

11.15 ઓરડાનાં તાપમાને કેટલાક સામાન્ય વાયુઓ માટે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનાં અવલોકનો નીચે આપેલા છે :

ગૅસ	મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (C_v) (cal mol^{-1} K^{-1})
હાઇડ્રોજન	4.87
નાઇટ્રોજન	4.97
ઑક્સિજન	5.02
નાઇટ્રિક ઑક્સાઇડ	4.99
કાર્બન મૉનોક્સાઇડ	5.01
ક્લોરિન	6.17

આ વાયુઓ માટે આપેલ મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાઓ એક પરમાણ્વિક વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાથી સ્પષ્ટ રીતે જુદી છે. પ્રતિકાત્મક રીતે એક પરમાણ્વિક વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા 2.92 cal/mol K છે. આ તફાવતનું સ્પષ્ટીકરણ કરો. ક્લોરિન માટે આ મૂલ્ય વધુ (બાકીના કરતાં) છે. તે માટે તમે શું નિષ્કર્ષ તારવશો ?

11.16 101 °F તાપમાન ધરાવતા એક બાળકને એન્ટિપાઈરિન (તાવ ઘટાડવા માટેની દવા) આપવામાં આવે છે. જેને કારણે તેના શરીરમાં પરસેવાનો બાષ્પાયનો સરેરાશ દર વધે છે. જો 20 મિનિટમાં તાવ 98 °F સુધી નીચે આવી જાય છે તો દવા દ્વારા થતાં વધારાના બાષ્પાયનનો દર કેટલો હશે ? એમ સ્વીકારો કે ઉષ્માવ્યયનો એકમાત્ર રસ્તો બાષ્પાયન છે. બાળકનું દ્રવ્યમાન 30 kg છે. માનવશરીરની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા આશરે પાણીની ઉષ્માધારિતા જેટલી જ છે. આ તાપમાને પાણીની બાષ્પાયન ગુપ્ત ઉષ્મા 580 cal g^{-1} છે.

11.17 થરમૉકોલના આઇસબૉક્સમાં ઉનાળાની ઋતુમાં ઓછી માત્રામાં રાંધેલા ખોરાકને સાચવવાની રીત સસ્તી અને કાર્યક્ષમ છે. 30 cmની બાજુવાળા સમઘન આઇસબૉક્સની જાડાઈ 5.0 cm છે. જો 4.0 kg બરફને તેમાં મુકવામાં આવે તો 6 કલાક બાદ તેમાં રહેલા બરફનાં જથ્થાનો અંદાજ મેળવો. બહારનું તાપમાન 45 °C છે. થરમૉકોલની ઉષ્માવાહકતા 0.01 J s^{-1} m^{-1} K^{-1} છે.
(પાણીની ગલનગુપ્ત ઉષ્મા = 335×10^3 J kg^{-1})

11.18 0.15 m^2 પાયાનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા પિત્તળનાં બોઈલરની જાડાઈ 1.0 cm છે. તેને ગૅસસ્ટવ પર મૂકતાં તે 6.0 kg/min ના દરથી પાણી ઉકાળે છે. બોઈલરનાં સંપર્કમાં રહેલી જ્યોતનાં તાપમાનનું અનુમાન કરો. પિત્તળની ઉષ્માવાહકતા = 109 J s^{-1} m^{-1} K^{-1}, પાણીની બાષ્પાયન ઉષ્મા = 2256×10^3 J kg^{-1}.

11.19 સ્પષ્ટતા કરો શા માટે :
(a) વધુ પરાવર્તકતા ધરાવતો પદાર્થ ઓછો ઉત્સર્જક હોય છે.
(b) ખૂબ ઠંડીના દિવસોમાં પિત્તળનું ટમ્બલર, લાકડાની ટ્રે કરતાં વધુ ઠંડું લાગે છે.
(c) આદર્શ કાળા પદાર્થના વિકિરણ માટે જેનું અંકન કરવામાં આવ્યું છે, તેવું ઑપ્ટિકલ પાયરોમીટર (ઊંચા તાપમાન માપવા માટે) ખુલ્લામાં રાખેલ ગરમ લાલચોળ લોખંડના ટુકડાનું તાપમાન નીચું દર્શાવે છે. પરંતુ તે જ લોખંડના ટુકડાને ભઠ્ઠીમાં મૂકેલ હોય ત્યારે તાપમાનનું સાચું મૂલ્ય આપે છે.
(d) પૃથ્વી તેના વાતાવરણ વગર પ્રતિકૂળ રીતે ઠંડી થઈ જાય છે.
(e) બિલ્ડિંગને હુંફાળું રાખવા માટેનાં, ગરમ પાણીનાં ભ્રમણ પર આધારિત તાપયંત્રો કરતાં વરાળ પરિભ્રમણ પર આધારિત તાપયંત્રો વધુ કાર્યક્ષમ હોય છે.

11.20 એક પદાર્થ 5 minમાં 80 °C થી 50 °C સુધી ઠંડો થાય છે. તેને 60 °C થી 30 °C સુધી ઠંડો પાડવા માટે લાગતો સમય શોધો. પરિસરનું તાપમાન 20 °C છે.

વધારાના સ્વાધ્યાય

11.21 કાર્બન ડાયૉક્સાઇડ માટેનાં $P - T$ ફેઝ ડાયગ્રામ પર આધારિત નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :
(a) કયા તાપમાને અને દબાણે CO_2ના ઘન, પ્રવાહી અને વાયુ અવસ્થાઓ સંતુલિત સ્થિતિમાં સહ અસ્તિત્વમાં હશે ?
(b) દબાણના ઘટાડા સાથે CO_2ના ગલનબિંદુ અને ઉત્કલનબિંદુ પર શું અસર થશે ?
(c) CO_2 માટે ક્રાંતિક તાપમાન અને દબાણ શું છે ? તેનું મહત્ત્વ શું છે ?
(d) (a) −70 °C તાપમાને અને 1 વાતાવરણ દબાણે
(b) −60 °C તાપમાને અને 10 વાતાવરણ દબાણે
(c) 15 °C તાપમાને અને 56 વાતાવરણ દબાણે
CO_2 ઘન, પ્રવાહી અને વાયુ પૈકી કઈ અવસ્થામાં હશે ?

11.22 CO_2ના $P - T$ ફેઝ ડાયગ્રામને આધારે નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :
(a) 1 વાતાવરણ દબાણે અને −60 °C તાપમાને CO_2નું સમતાપી સંકોચન કરવામાં આવે છે. શું તે પ્રવાહી અવસ્થામાં જશે ?
(b) CO_2નું દબાણ 4 વાતાવરણ જેટલું અચળ રાખીને તેનું ઓરડાનાં તાપમાન સુધી ઠારણ કરાવવામાં આવે તો શું થાય ?
(c) 10 વાતાવરણ દબાણે અને −65 °C તાપમાને આપેલ જથ્થાનાં ઘન CO_2નું દબાણ અચળ રાખી ઓરડાનાં તાપમાને તેને ગરમ કરતાં થતાં ગુણાત્મક ફેરફારોનું વર્ણન કરો.
(d) CO_2ને 70 °C સુધી ગરમ કરી સમતાપી સંકોચન કરવામાં આવે છે. અવલોકન માટે તમે તેનાં કયા ગુણધર્મોમાં ફેરફારની અપેક્ષા રાખશો ?

પ્રકરણ 12

થરમૉડાયનેમિક્સ (THERMODYNAMICS)

12.1 પ્રસ્તાવના
12.2 તાપીય સંતુલન
12.3 થરમૉડાયનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ
12.4 ઉષ્મા, આંતરિક ઊર્જા અને કાર્ય
12.5 થરમૉડાયનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ
12.6 વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (ક્ષમતા)
12.7 થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા ચલ રાશિઓ અને અવસ્થા સમીકરણ
12.8 થરમૉડાયનેમિક પ્રક્રિયાઓ
12.9 ઉષ્મા એન્જિનો
12.10 રેફ્રિજરેટરો અને હીટ (ઉષ્મા) પંપો
12.11 થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ
12.12 પ્રતિવર્તી અને અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ
12.13 કાર્નોટ એન્જિન
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય

12.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આગળના પ્રકરણમાં આપણે દ્રવ્યના ઉષ્મીય ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે ઉષ્માઊર્જા (Thermal Energy)નું નિયમન કરતા નિયમોનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે એવી પ્રક્રિયાઓનો અભ્યાસ કરીશું કે જેમાં કાર્યનું ઉષ્મામાં રૂપાંતરણ થતું હોય અને તેથી વિરુદ્ધ પણ થતું હોય. શિયાળામાં, જ્યારે આપણે આપણી હથેળીઓ એકબીજાની સાથે ઘસીએ ત્યારે આપણને ગરમાવો લાગે (અનુભવાય) છે. અહીં હથેળીમાં ઘસવા માટે થયેલ કાર્યથી ઉષ્મા ઉત્પન્ન થાય છે. બીજી બાજુ, વરાળયંત્ર (Steam Engine)માં બાષ્પ(વરાળ)ની 'ઉષ્મા'નો ઉપયોગ પિસ્ટનને ગતિ આપવાના ઉપયોગી કાર્યમાં થાય છે, જેને પરિણામે ટ્રેનનાં પૈડાં ફરે છે.

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં, આપણે ઉષ્મા, તાપમાન, કાર્ય વગેરેના સિદ્ધાંતો સમજીને (ધ્યાનપૂર્વક) વ્યાખ્યાયિત કરવા જોઈએ. ઐતિહાસિક રીતે, 'ઉષ્મા'ના યોગ્ય ખ્યાલો સુધી પહોંચવા માટે ઘણો સમય લાગ્યો છે. આધુનિક ખ્યાલ પહેલાં, ઉષ્માને સમાંગ અદૃશ્ય પ્રવાહી સ્વરૂપની માનવામાં આવતી હતી, જે દ્રવ્યમાં રહેલ છિદ્રોમાં ભરાતી હતી. ગરમ અને ઠંડા પદાર્થો એકબીજાના સંપર્કમાં આવે ત્યારે, આ પ્રવાહી (જેને કૅલરિક કહેવાતું) ઠંડા પદાર્થથી ગરમ પદાર્થ તરફ વહેતું હતું ! આ તો જુદી જુદી ઊંચાઈ સુધી પાણીભરેલી બે ટાંકીઓને એક સમક્ષિતિજ પાઇપ વડે જોડવા જેવું થયું. જ્યાં સુધી બંને ટાંકીઓમાં પાણી એક સરખી ઊંચાઈ સુધી ન પહોંચે ત્યાં સુધી આ પ્રવાહ ચાલ્યા કરે છે. તે જ રીતે, ઉષ્માના 'કૅલરિક' સ્વરૂપમાં 'કૅલરિક સ્તરો' (એટલે કે તાપમાન) સમાન ન થાય ત્યાં સુધી ઉષ્મા વહે છે.

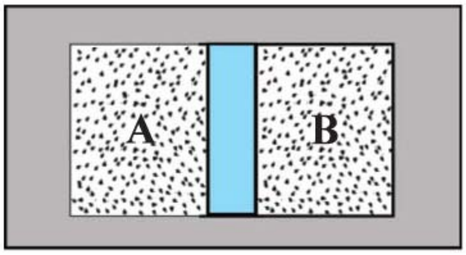
સમય જતાં, આધુનિક ખ્યાલ મુજબ ઉષ્માના ઊર્જા-સ્વરૂપની સરખામણીમાં ઉષ્માના પ્રવાહી સ્વરૂપનો ખ્યાલ પડતો મૂકવામાં આવ્યો. તેના અનુસંધાનમાં એક અગત્યનો પ્રયોગ 1798માં બેન્જામિન થોમસન (જે કાઉન્ટ રુમ્ફર્ડના નામે પણ જાણીતા છે.) દ્વારા કરવામાં આવ્યો. તેમણે અનુભવ્યું કે પિત્તળની તોપ બનાવવા તેમાં કાણું પાડવાની પ્રક્રિયા દરમિયાન ખૂબ જ ઉષ્મા ઉત્પન્ન થાય છે, જે પાણીને ઉકાળવા માટે પૂરતી હોય છે. વધુ સ્પષ્ટ રૂપે કહીએ તો, (શારડી (Drill)ને ફેરવવા માટે ઘોડાઓના ઉપયોગ દ્વારા) ઉત્પન્ન થયેલ ઉષ્મા ફક્ત કાર્ય પર આધાર રાખે છે, નહિ કે શારડીની તીક્ષ્ણતા (અણી) પર. કૅલરિક સ્વરૂપ મુજબ, અણીદાર શારડી, કાણાઓમાંથી વધારે ઉષ્મા બહાર કાઢે, પરંતુ તેવું જણાયું નહિ ! આ અવલોકનોનું પ્રાકૃતિક અર્થઘટન એવું થાય કે ઉષ્મા એ ઊર્જાનો એક પ્રકાર છે અને આ પ્રયોગે ઉષ્માનું એકમાંથી બીજા પ્રકાર - કાર્યમાંથી ઉષ્મામાં રૂપાંતરણ દર્શાવ્યું.

થરમૉડાયનેમિક્સ એ ભૌતિકવિજ્ઞાનની એવી શાખા છે કે જે ઉષ્મા અને તાપમાનના સિદ્ધાંતો તથા ઉષ્મા અને ઊર્જાનાં બીજા પ્રકારો વચ્ચેના આંતરિક રૂપાંતરણોની સાથે સંકળાયેલ છે. થરમૉડાયનેમિક્સ એ સ્થૂળ વિજ્ઞાન છે. તે સ્થૂળ તંત્રો સાથે કામ પાર પાડે છે તથા તે દ્રવ્યની આણ્વીક રચના સુધી ઊંડાણમાં જતું નથી. હકીકતમાં, દ્રવ્યનું આણ્વીય સ્વરૂપ દઢ રીતે સ્થાપિત થયું તે પહેલાં ઓગણીસમી સદીમાં તેના સિદ્ધાંતો અને નિયમો ઘડાયા હતા. થરમૉડાયનેમિક અર્થઘટન તંત્રની થોડીક સ્થૂળ ચલરાશિઓને સાંકળે છે, જે આપણી સામાન્ય સમજ વડે પણ સૂચવાયેલા છે અને સીધા માપી શકાય છે. દા.ત., કોઈ વાયુનું સૂક્ષ્મ અર્થઘટન કરવા, વાયુને રચનારા મોટી સંખ્યાના અણુઓના સ્થાન અને વેગનાં મૂલ્યો જોઈએ. વાયુના ગતિવાદમાં આપેલ અર્થઘટન વિગતવાર નથી છતાં તે અણુઓનાં વેગનું વિતરણ ધરાવે છે. બીજી તરફ, વાયુનું થરમૉડાયનેમિક અર્થઘટન, વાયુના આણ્વીક અર્થઘટનને અવગણે છે. આની સરખામણીમાં, થરમૉડાયનેમિક્સમાં વાયુની અવસ્થા સ્થૂળ ચલરાશિઓ જેવી કે દબાણ, કદ, તાપમાન, દળ અને મિશ્રણ આપણી ઇન્દ્રિયો વડે મર્યાદામાં અનુભવી શકાય અને માપી શકાય છે.*

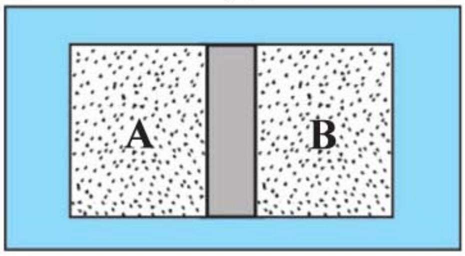
યંત્રશાસ્ત્ર અને થરમૉડાયનેમિક્સ વચ્ચેનો ભેદ મનમાં યાદ રાખવા જેવો છે. યંત્રશાસ્ત્રમાં, આપણું ધ્યાન મુખ્યત્વે બળો કે ટૉર્કની અસર હેઠળ ગતિ કરતા કણો કે પદાર્થો પર હોય છે. થરમૉડાયનેમિક્સને સંપૂર્ણ તંત્રની ગતિ સાથે કોઈ લેવાદેવા નથી. તેને તો પદાર્થની આંતરિક સ્થૂળ અવસ્થા સાથે લેવાદેવા હોય છે. જ્યારે એક ગોળી (બુલિટ)ને બંદૂકમાંથી છોડવામાં આવે ત્યારે બુલિટની યાંત્રિક અવસ્થા (સ્પષ્ટ કહીએ તો, ગતિ ઊર્જા) બદલાય છે, તેનું તાપમાન નહિ. જ્યારે બુલિટ લાકડામાં ઘૂસીને અટકે છે ત્યારે તેની ગતિઊર્જાનું ઉષ્મામાં રૂપાંતરણ થાય છે, જે બુલિટ તથા લાકડાના આજુબાજુના સ્તરોનું તાપમાન બદલે છે. તાપમાન બુલિટની આંતરિક (અસ્તવ્યસ્ત) ગતિઊર્જા સાથે સાંકળાયેલ છે, નહિ કે આખી બુલિટની ગતિ સાથે.

12.2 તાપીય સંતુલન (THERMAL EQUILIBRIUM)

યંત્રશાસ્ત્રમાં સંતુલનનો મતલબ એ કે તંત્ર પર લાગતું ચોખ્ખું બાહ્ય બળ અને ટૉર્ક શૂન્ય છે. થરમૉડાયનેમિક્સમાં 'સંતુલન' શબ્દનો અર્થ અન્ય સંદર્ભમાં કરવામાં આવે છે : જો તંત્રને દર્શાવતી સ્થૂળ ચલરાશિઓ સમય સાથે બદલાતી ન હોય, તો તંત્ર સંતુલનની અવસ્થામાં છે તેમ કહેવાય. દા.ત., જે પરિસરથી બિલકુલ અલિપ્ત (અલગ - Insulated) કરેલ હોય, તેવા બંધ દઢ પાત્રમાં રહેલો વાયુ, જેનાં દબાણ, કદ, તાપમાન, દળ, સમય સાથે બદલાતાં ન હોય, તે થરમૉડાયનેમિક સંતુલનની અવસ્થામાં છે.



(a)



(b)

આકૃતિ **12.1** (a) *તંત્રો A અને B (બે વાયુઓ) જે ઉષ્માનું વહન ન થવા દે તેવી ઉષ્મા અવાહક દીવાલ વડે જુદા પાડેલ છે.* (b) *આ બંને તંત્રો A અને B ઉષ્માવાહક દીવાલ વડે જુદા પાડેલ છે. જે ઉષ્માને એક બાજુથી બીજી બાજુ વહેવા દે. આ કિસ્સામાં, સમય જતાં તાપીય સંતુલન મેળવી શકાય છે.*

સામાન્ય રીતે, તંત્ર સંતુલનની અવસ્થામાં છે કે નહિ તેનો આધાર પરિસર પર અને તંત્રને પરિસરથી અલગ કરતી દીવાલના પ્રકાર પર આધાર રાખે છે. જુદાં જુદાં બે પાત્રોમાં રહેલા વાયુઓ A અને B લો. પ્રાયોગિક રીતે આપણે જાણીએ છીએ કે, આપેલ દળના વાયુનું દબાણ અને કદ તેના બે સ્વતંત્ર ચલ તરીકે લઈ શકીએ. ધારો કે આ વાયુઓના દબાણ અને કદ અનુક્રમે (P_A, V_A) અને (P_B, V_B) છે. પહેલાં ધારો કે બંને તંત્રોને બાજુ બાજુમાં રાખ્યાં છે પરંતુ એક બાજુની ઊર્જા (ઉષ્મા)નું બીજી બાજુ વહન ન થવા દે તેવી **સમોષ્મી દીવાલ (Adiabatic-Wall)**-અવાહક દીવાલ (જે ખસેડી શકાય તેવી હોય)થી જુદા પાડેલ છે. આ તંત્રોને અન્ય પરિસરથી આવી જ

* *થરમૉડાયનેમિક્સમાં એવી ચલરાશિઓ પણ હોઈ શકે જે આપણી ઇન્દ્રિયો ખાસ અનુભવી શકતી ન હોય. દા.ત., એન્ટ્રોપી, એન્થાલ્પી વગેરે; અને તેઓ બધી સ્થૂળ ચલરાશિઓ છે. જો કે થર્મોડાયનેમિક અવસ્થા દબાણ, કદ, તાપમાન, આંતરિક ઊર્જા અને એન્ટ્રોપી નામના પાંચ અવસ્થા ચલો દ્વારા દર્શાવાય છે. એન્ટ્રોપી તંત્રમાંની અવ્યવસ્થાનું માપ છે. એન્થાલ્પી તંત્રમાંની કુલ ઉષ્માનું માપ છે.*

સમોષ્મી દીવાલો વડે જુદા પાડેલ છે. આ પરિસ્થિતિ, આકૃતિ 12.1(a)માં દર્શાવી છે. આ પરિસ્થિતિમાં (P_A, V_A) મૂલ્યોની કોઈ પણ શક્ય જોડ (P_B, V_B) મૂલ્યોની કોઈ પણ શક્ય જોડ સાથે સંતુલનમાં રહે છે. હવે, ધારો કે સમોષ્મી (Adiabatic) દીવાલની જગ્યાએ **ઉષ્માવાહક (Diathermic)** દીવાલ મૂકવામાં આવે છે. જે એક બાજુથી બીજી બાજુ ઊર્જા (ઉષ્મા) વહન થવા દે. હવે એવું જણાય છે કે જ્યાં સુધી બંને તંત્ર સંતુલનની સ્થિતિમાં ન આવે ત્યાં સુધી *A* અને *B* તંત્રની સ્થૂળ ચલરાશિઓ આપોઆપ બદલાતી રહે છે. ત્યાર બાદ તેમની અવસ્થામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી. આ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 12.1(b)માં દર્શાવી છે. બંને વાયુઓની ચલરાશિઓ દબાણ અને કદ બદલાઈને (P_B', V_B') અને (P_A', V_A') થાય છે કે જેથી *A* અને *B*ની નવી અવસ્થાઓ એકબીજા સાથે સંતુલનમાં આવે. * ત્યાર બાદ એક તરફથી બીજી તરફ ઊર્જાનો વિનિમય નથી થતો. ત્યાર બાદ આપણે કહી શકીએ કે તંત્ર *A*, તંત્ર *B* સાથે તાપીય સંતુલનમાં છે.

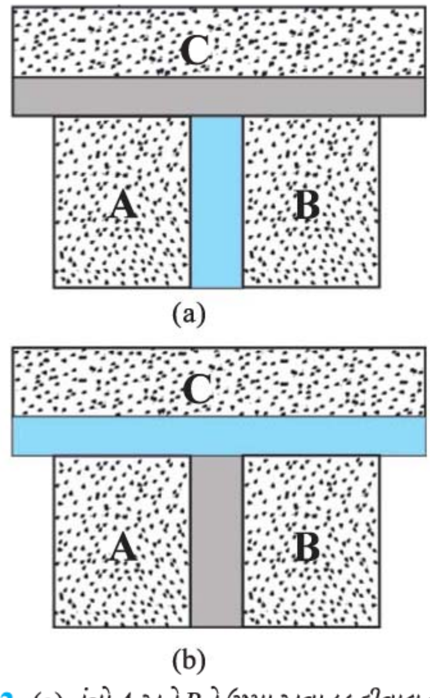
બે તંત્રોના તાપીય સંતુલનની પરિસ્થિતિની લાક્ષણિકતા શું છે ? તમારા અનુભવ પરથી જવાબ વિચારી જુઓ. તાપીય સંતુલનમાં, બંને તંત્રોના તાપમાન સમાન છે. હવે આપણે એ જોઈશું કે થરમૉડાયનેમિક્સમાં તાપમાનની વિભાવના (ખ્યાલ) સુધી કેવી રીતે આવવું ? થરમૉડાયનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ તેનું સૂચન કરે છે.

12.3 થરમૉડાયનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ (ZEROTH LAW OF THERMODYNAMICS)

ધારો કે બે તંત્રો *A* અને *B*, સમોષ્મી (ઉષ્મા અવાહક) દીવાલ વડે છૂટા પાડેલા છે અને આ દરેક તંત્ર ત્રીજા તંત્ર *C* સાથે ઉષ્માવાહક દીવાલ વડે સંપર્કમાં છે (આકૃતિ 12.2(a)). આ તંત્રોની અવસ્થાઓ (એટલે કે તેમની સ્થૂળ ચલરાશિઓ) જ્યાં સુધી બંને તંત્રો *A* અને *B*, *C* સાથે તાપીય સંતુલનમાં ન આવે ત્યાં સુધી બદલાતી રહેશે. આમ થયા બાદ, ધારો કે *A* અને *B* વચ્ચેની ઉષ્મા અવાહક દીવાલની જગ્યાએ ઉષ્માવાહક દીવાલ મૂકવામાં આવે છે અને *C* ને *A* અને *B*થી ઉષ્મા અવાહક દીવાલ વડે જુદું પાડવામાં આવે છે (આકૃતિ 12.2(b)). એવું જણાય છે કે *A* અને *B*ની અવસ્થાઓ હવે આગળ બદલાતી નથી, એટલે કે **તેઓ એકબીજા સાથે તાપીય સંતુલનમાં હોય છે**. આ અવલોકન **થરમૉડાયનેમિક્સના શૂન્ય ક્રમના નિયમનો** આધાર છે. જે દર્શાવે છે કે **'બે તંત્રો સ્વતંત્ર રીતે કોઈ ત્રીજા તંત્ર સાથે તાપીય સંતુલનમાં રહેલા હોય, તો તેઓ એકબીજા સાથે પણ તાપીય સંતુલનમાં હોય'.** થરમૉડાયનેમિક્સના પ્રથમ અને બીજા નિયમો સૂચવાયા અને તેમના ક્રમ આપવામાં આવ્યા ત્યારબાદ ઘણા સમય પછી ઈ.સ. 1931માં આર. એચ. ફાઉલરે આ નિયમ આપ્યો હતો.

શૂન્ય ક્રમનો નિયમ સ્પષ્ટ દર્શાવે છે કે જ્યારે બે તંત્રો *A* અને *B* તાપીય સંતુલનમાં હોય ત્યારે ત્યાં એવી કોઈ ભૌતિકરાશિ હોવી જોઈએ કે જેનું મૂલ્ય બંને માટે એક સમાન હોય. આ થરમૉડાયનેમિક્સ ચલરાશિ કે જેનું મૂલ્ય તાપીય સંતુલનમાં રહેલાં બંને તંત્રો માટે સમાન હોય તેને તાપમાન (*T*) કહે છે. આમ, જો *A* અને *B* બંને સ્વતંત્ર રીતે *C* સાથે સંતુલનમાં હોય, તો $T_A = T_C$ અને $T_B = T_C$. આ દર્શાવે છે કે $T_A = T_B$, એટલે કે તંત્રો *A* અને *B* પણ તાપીય સંતુલનમાં છે.

આપણે શૂન્ય ક્રમના નિયમ દ્વારા તાપમાનના ખ્યાલ સુધી પહોંચી ગયા છીએ. હવે પ્રશ્ન એ છે કે, જુદા જુદા પદાર્થોના તાપમાન સાથે તેનાં મૂલ્યો કેવી રીતે સાંકળવાં ? બીજા શબ્દોમાં, તાપમાનનો માપક્રમ કેવી રીતે રચવો ? થરમૉમેટ્રી કે જે આ પાયાના પ્રશ્ન સાથે સંકળાયેલ છે તેનો ઉલ્લેખ હવે પછીના પરિચ્છેદમાં આપણે કરીશું.



આકૃતિ 12.2 *(a) તંત્રો A અને B ને ઉષ્મા અવાહક દીવાલ વડે જુદા પાડેલ છે, જે દરેક ત્રીજા તંત્ર C સાથે ઉષ્માવાહક દીવાલ વડે સંપર્કમાં છે. (b) A અને B વચ્ચેની ઉષ્મા અવાહક દીવાલની જગ્યાએ ઉષ્માવાહક દીવાલ રાખવામાં આવે છે, જ્યારે C ને A અને B થી ઉષ્મા અવાહક દીવાલ વડે અલગ કરવામાં (જુદી પાડવામાં) આવે છે.*

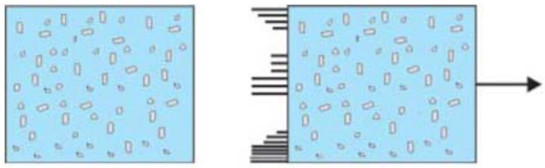
* *બંને ચલરાશિઓ બદલાવી જરૂરી નથી. તે અંકુશો (Constraints) પર આધારિત છે. દા.ત., જો વાયુઓ અચળ કદવાળા પાત્રોમાં હોય, તો તાપીય સંતુલન પ્રાપ્ત કરવા માટે ફક્ત વાયુઓના દબાણ જ બદલાત.*

12.4 ઉષ્મા, આંતરિક ઊર્જા અને કાર્ય (HEAT, INTERNAL ENERGY AND WORK)

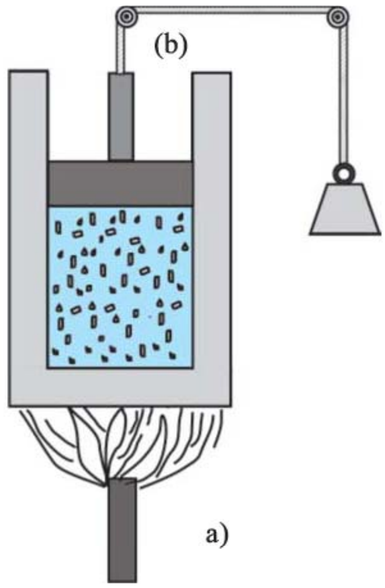
શૂન્ય ક્રમનો નિયમ આપણને તાપમાનના સિદ્ધાંત તરફ દોરી જાય છે, જે આપણી સામાન્ય બુદ્ધિનાં અવલોકનો સાથે મળતો આવે છે. તાપમાન એ પદાર્થના 'ગરમપણાની' નિશાની છે. તે જ્યારે બે પદાર્થોને એકબીજાના સંપર્કમાં મૂક્યા હોય ત્યારે ઉષ્માવહનની દિશા નક્કી કરે છે. ઊંચા તાપમાને રહેલા પદાર્થ તરફથી નીચા તાપમાને રહેલા પદાર્થ તરફ ઉષ્મા વહે છે. જ્યારે તાપમાન સમાન થાય ત્યારે વહન અટકી જાય છે; હવે આ બંને પદાર્થો તાપીય સંતુલનમાં હોય છે. જુદા જુદા પદાર્થોનાં તાપમાન દર્શાવવા માટે તાપમાન માપક્રમ કેવી રીતે તૈયાર કરવા તે આપણે થોડા ઊંડાણપૂર્વક જોયું હતું. હવે આપણે ઉષ્મા અને તેવી બીજી રાશિઓ જેવી કે આંતરિક ઊર્જા અને કાર્યના ખ્યાલો સમજીશું.

તંત્રની આંતરિક ઊર્જાનો ખ્યાલ સમજવો અઘરો નથી. આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ સ્થૂળ (Bulk) તંત્ર મોટી સંખ્યાના અણુઓ ધરાવે છે. આંતરિક ઊર્જા એ આ અણુઓની ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો જ છે. અગાઉ આપણે જણાવ્યું હતું કે, થરમૉડાયનેમિક્સમાં સમગ્રપણે તંત્રની ગતિઊર્જાનું મહત્ત્વ નથી. આથી આંતરિક ઊર્જા, જેની સાપેક્ષે તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સ્થિર હોય તેવી નિર્દેશ ફ્રેમ (Frame of Reference)માં અણુઓની ગતિ અને સ્થિતિઊર્જાનો સરવાળો છે. આમ, તે ફક્ત તંત્રના અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા અણુઓ સાથે સંકળાયેલી (અવ્યવસ્થિત) ઊર્જા દર્શાવે છે. આપણે તંત્રની આંતરિક ઊર્જાને 'U' વડે દર્શાવીએ છીએ.

અહીં, થરમૉડાયનેમિક્સને લાગે વળગે છે ત્યાં સુધી, હજી આપણે આંતરિક ઊર્જાનો અર્થ સમજવા માટે અણુ સ્વરૂપનો ઉપયોગ કર્યો છે. U એ તંત્રની એક સ્થૂળ ચલરાશિ જ છે. અગત્યની વાત એ છે કે આંતરિક ઊર્જા તે ફક્ત તંત્રની અવસ્થા પર આધાર રાખે છે. આ અવસ્થા કેવી રીતે મેળવી તેના પર નહિ ! તંત્રની આંતરિક ઊર્જા U એ થરમૉડાયનેમિક 'અવસ્થા ચલ'નું ઉદાહરણ છે. તેનું મૂલ્ય ફક્ત તંત્રની આપેલ અવસ્થા પર જ આધાર રાખે છે; તેના ઇતિહાસ (ભૂતકાળ) પર નહિ, એટલે કે, આ અવસ્થા સુધી પહોંચવા માટે લીધેલા 'માર્ગ' પર નહિ. આમ, આપેલ દળના વાયુની આંતરિક ઊર્જા દબાણ, કદ અને તાપમાનનાં ચોક્કસ મૂલ્યો વડે દર્શાવેલ અવસ્થા પર આધાર રાખે છે. વાયુની આ અવસ્થા કેવી રીતે આવી તેના પર તે આધાર રાખતી નથી. દબાણ, કદ, તાપમાન અને આંતરિક ઊર્જા એ તંત્ર (વાયુ)ના થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા ચલો છે. (જુઓ પરિચ્છેદ 12.7.) જો આપણે વાયુમાં નાનાં આંતર અણુબળો અવગણીએ તો તે, વાયુની આંતરિક ઊર્જા તેના અણુઓની અસ્તવ્યસ્ત ગતિ સાથે સંકળાયેલ ગતિઊર્જાઓના સરવાળા જેટલી જ હોય છે. આ પછીના પ્રકરણમાં આપણે જોઈશું કે વાયુમાં આ ગતિ ફક્ત રેખીય નથી હોતી (એટલે કે પાત્રના કદમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધીની ગતિ); તે અણુઓની ચક્રીય અને કંપન ગતિઓને પણ સમાવે છે (આકૃતિ 12.3).



આકૃતિ 12.3 (a) *જ્યારે બૉક્સસ્થિર સ્થિતિમાં હોય ત્યારે, વાયુની આંતરિક ઊર્જા U એ તેના અણુઓની ગતિ અને સ્થિતિઊર્જાઓના સરવાળા જેટલી હોય છે. જુદા જુદા પ્રકારની ગતિ (રેખીય, ચક્રીય, કંપન)ને અનુલક્ષીને ગતિઊર્જાઓને Uમાં સમાવવાની છે.* (b) *જો આ આખું બૉક્સ કોઈ વેગ સાથે ગતિ કરતું હોય, તો બૉક્સની ગતિઊર્જા Uમાં સમાવવાની નથી.*



આકૃતિ 12.4 *ઉષ્મા અને કાર્ય એ તંત્રની ઊર્જાવહનના અલગ પ્રકારો છે જે તેની આંતરિક ઊર્જામાં ફેરફાર માટે જવાબદાર છે. (a) ઉષ્મા એ તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે તાપમાનના તફાવતના કારણે થતું ઊર્જાનું વહન છે. (b) કાર્ય એ બીજી રીતે થતો (દા. ત., પિસ્ટનને ઉપર કે નીચે ખસેડીને કે તેની સાથે જોડાયેલા વજનને ઘટાડીને) ઊર્જાનો વિનિમય છે જે તાપમાનના તફાવત સાથે સંકળાયેલ નથી.*

કોઈ તંત્રની આંતરિક ઊર્જા બદલવા માટેના કયા ઉપાયો (માર્ગ) છે ? આકૃતિ 12.4માં દર્શાવ્યા મુજબ ફરીથી, સરળતા ખાતર એક નળાકારમાં રહેલ ચોક્કસ દળ ધરાવતા વાયુનું તંત્ર ધારો. અનુભવ દર્શાવે છે કે વાયુની અવસ્થા (અને તેથી તેની આંતરિક ઊર્જા) બદલવા માટેના બે માર્ગ છે. એક માર્ગ એ છે કે આ વાયુ કરતાં ઊંચું તાપમાન ધરાવતા પદાર્થના સંપર્કમાં આ (વાયુ) નળાકારને મૂકો. આ તાપમાનના તફાવતના કારણે ઊર્જા (ઉષ્મા) ગરમ પદાર્થથી વાયુ તરફ વહન કરશે જેથી વાયુની આંતરિક ઊર્જા વધશે. બીજો માર્ગ એ છે કે પિસ્ટનને નીચે તરફ ધક્કો મારવો, એટલે કે આ તંત્ર પર કાર્ય કરવું, તે પણ વાયુની આંતરિક ઊર્જા વધારશે. અલબત્ત, આ બંને વસ્તુ ઊલટી દિશામાં પણ થઈ શકે. પરિસર નીચા તાપમાને હોય, તો ઉષ્મા વાયુમાંથી પરિસર તરફ વહેશે. તે જ રીતે, વાયુ પિસ્ટનને ઉપર ધકેલે અને પરિસર પર કાર્ય કરે. ટૂંકમાં, ઉષ્મા અને કાર્ય એ થરમૉડાયનેમિક તંત્રની અવસ્થાને બદલવા માટે અને તેની આંતરિક ઊર્જામાં ફેરફાર કરવા માટેના બે માર્ગ છે.

ઉષ્મા વિશેના ખ્યાલને આંતરિક ઊર્જા વિશેના ખ્યાલથી કાળજીપૂર્વક જુદા તારવવા જોઈએ. ઉષ્મા ચોક્કસપણે ઊર્જા તો છે, પરંતુ તે વહન પામતી ઊર્જા (જ) છે. આ કોઈ શબ્દોની રમત નથી. આ તફાવત મૂળભૂત રીતે ખૂબ અગત્યનો છે. થરમૉડાયનેમિક તંત્રની અવસ્થા તેની આંતરિક ઊર્જા વડે દર્શાવાય છે, ઉષ્મા વડે નહિ. એવું વિધાન કે **'કોઈ એક આપેલ અવસ્થામાં રહેલા વાયુમાં અમુક ચોક્કસ પ્રમાણમાં ઉષ્મા હોય છે.'** - અર્થ વગરનું છે, તે જ રીતે એવું વિધાન કે, **'કોઈ એક આપેલ અવસ્થામાં રહેલા વાયુમાં અમુક ચોક્કસ પ્રમાણમાં કાર્ય હોય છે.'** પણ અર્થ વગરનું છે. આની સામે, **'કોઈ એક આપેલ અવસ્થામાં રહેલા વાયુમાં ચોક્કસ પ્રમાણમાં આંતરિક ઊર્જા હોય છે.'** - તે વિધાન સંપૂર્ણ અર્થસભર, તે જ રીતે એવું વિધાન કે, **'તંત્રને અમુક ચોક્કસ પ્રમાણમાં ઉષ્મા આપવામાં આવી છે.'** અથવા **'તંત્ર દ્વારા અમુક ચોક્કસ પ્રમાણમાં કાર્ય થયું છે.'** –સંપૂર્ણ અર્થસભર છે.

સારાંશ એ કે, થરમૉડાયનેમિક્સમાં ઉષ્મા અને કાર્ય એ અવસ્થા ચલો નથી. તે તંત્રમાં ઊર્જા વિનિમય દર્શાવે છે જે તેની આંતરિક ઊર્જામાં ફેરફાર કરે છે, જે અગાઉ દર્શાવ્યું તેમ અવસ્થા ચલરાશિ છે.

સામાન્ય વાતચીતમાં, આપણે ઉષ્મા અને આંતરિક ઊર્જા એકબીજાની જગ્યાએ ઉપયોગમાં લઈએ છીએ. તેમની વચ્ચેનો ભેદ ક્યારેક ભૌતિકવિજ્ઞાનના પ્રારંભિક સ્તરનાં પુસ્તકોમાં અવગણેલ હોય છે. થરમૉડાયનેમિક્સની સાચી સમજણ માટે, આ ભેદ સમજવો ખૂબ જરૂરી છે.

12.5 થરમૉડાયનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ (FIRST LAW OF THERMODINAMICS)

આપણે જોયુ કે તંત્રની આંતરિક ઊર્જા U, બે પ્રકારના ઊર્જા વિનિમય દ્વારા બદલી શકાય :

ઉષ્મા અને કાર્ય. ધારો કે,

ΔQ = પરિસર દ્વારા તંત્રને આપવામાં આવેલ ઉષ્મા

ΔW = તંત્ર દ્વારા પરિસર પર થયેલ કાર્ય

ΔU = તંત્રની આંતરિક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર

આથી ઊર્જા સંરક્ષણના વ્યાપક સિદ્ધાંત મુજબ

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \tag{12.1}$$

એટલે કે, તંત્રને આપવામાં આવેલી ઉષ્મા (ΔQ)નો થોડો ભાગ તંત્રની આંતરિક ઊર્જા (ΔU)માં, જ્યારે બાકીનો ભાગ પરિસર પર થતા કાર્ય (ΔW)માં જાય છે. સમીકરણ (12.1)ને **થરમૉડાયનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ** કહે છે. તે તંત્ર પર લગાડેલ ઊર્જા-સંરક્ષણનો વ્યાપક નિયમ છે જેમાં ઊર્જાનો પરિસર તરફ કે પરિસરમાંથી બહાર તરફ વિનિમય ગણતરીમાં લેવામાં આવે છે. આપણે સમીકરણ (12.1)ને બીજી રીતે લખીએ તો

$$\Delta Q - \Delta W = \Delta U \tag{12.2}$$

અહીં, તંત્ર પ્રારંભિક અવસ્થાથી અંતિમ અવસ્થા સુધી ઘણાબધા માર્ગે જઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે, વાયુની અવસ્થા (P_1, V_1) થી (P_2, V_2) સુધી બદલવા, આપણે દબાણ અચળ રાખીને પહેલાં વાયુનું કદ V_1 થી V_2 સુધી બદલી શકીએ. એટલે કે પહેલાં આપણે (P_1, V_2) સ્થિતિમાં જઈએ અને ત્યાર બાદ, કદ અચળ રાખીને વાયુનું દબાણ P_1 થી P_2 સુધી બદલીએ, જે વાયુને (P_2, V_2) સ્થિતિએ લઈ જાય. બીજી રીતે, આપણે પહેલાં કદ અચળ રાખીને ત્યાર બાદ દબાણ અચળ રાખી શકીએ. U અવસ્થા ચલ હોવાથી, ΔU ફક્ત પ્રારંભિક અને અંતિમ અવસ્થાઓ પર જ આધાર રાખે છે, નહિ કે વાયુએ એકથી બીજી અવસ્થા સુધી જવા માટે લીધેલા માર્ગ પર. તેમ છતાં, ΔQ અને ΔW, સામાન્ય રીતે, પ્રારંભિકથી અંતિમ અવસ્થાઓ સુધી જવા માટે લીધેલા માર્ગ પર આધાર રાખે છે. છતાં, થરમૉડાયનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ, સમીકરણ (12.2), પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે $\Delta Q - \Delta W$નું સંયોજન લીધેલા માર્ગથી સ્વતંત્ર છે. આ દર્શાવે છે કે જો તંત્રને એવી પ્રક્રિયામાંથી પસાર કરવામાં આવે કે તેમાં $\Delta U = 0$ (દા.ત., આદર્શ વાયુનું સમતાપી પ્રસરણ, પરિચ્છેદ 12.8 જુઓ), તો

$$\Delta Q = \Delta W$$

એટલે કે, તંત્રને આપવામાં આવેલી ઉષ્મા, તંત્ર દ્વારા પરિસર પર કાર્ય કરવામાં સંપૂર્ણપણે વપરાઈ જાય છે.

જો તંત્ર, ખસી શકે તેવા પિસ્ટન ધરાવતા નળાકારમાં રહેલા વાયુનું બનેલું હોય, તો પિસ્ટનને ખસેડવા માટે વાયુ કાર્ય કરે છે. બળ એ દબાણ અને ક્ષેત્રફળનો ગુણાકાર હોવાથી, તથા ક્ષેત્રફળ અને સ્થાનાંતરનું ગુણાકાર કદ દર્શાવતો હોવાથી, તંત્ર દ્વારા અચળ દબાણ P માટે થયેલ કાર્ય

$$\Delta W = P\Delta V$$

જ્યાં ΔV એ વાયુના કદમાં થતો ફેરફાર છે. આમ, આ કિસ્સામાં, સમીકરણ (12.1) પરથી

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \qquad (12.3)$$

સમીકરણ (12.3)નો ઉપયોગ દર્શાવવા, ધારો કે 1 g પાણીને પ્રવાહી સ્વરૂપથી બાષ્પ (વરાળ) સ્વરૂપમાં લઈ જવા દરમિયાન આંતરિક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર ધ્યાનમાં લઈએ. પાણીની માપેલ ગુપ્ત ઉષ્મા 2256 J/g છે. આથી, 1 g પાણી માટે ΔQ = 2256 J. વાતાવરણના દબાણે, 1 g પાણીનું કદ પ્રવાહી સ્વરૂપમાં 1 cm^3 અને વરાળ (બાષ્પ) સ્વરૂપમાં 1671 cm^3 હોય છે. આથી

$$\Delta W = P(V_g - V_l) = 1.013 \times 10^5 \times (1670) \times 10^{-6} = 169.2 \text{ J}$$

આમ, સમીકરણ (12.3) પરથી,

$$\Delta U = 2256 - 169.2 = 2086.8 \text{ J}$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, પાણીના પ્રવાહી સ્વરૂપમાંથી વરાળ સ્વરૂપમાં રૂપાંતરણ દરમિયાન મોટા ભાગની ઉષ્મા તેની આંતરિક ઊર્જા વધારવામાં વપરાય છે.

12.6 વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (SPECIFIC HEAT CAPACITY)

ધારો કે પદાર્થને આપવામાં આવેલી ઉષ્મા ΔQ, તેનું તાપમાન T થી $T + \Delta T$ જેટલું બદલે છે. આપણે પદાર્થની ઉષ્માધારિતાને આ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ, (પ્રકરણ 11 જુઓ.)

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.4)$$

આપણે માનીએ છીએ કે ΔQ અને તેથી, ઉષ્માધારિતા S એ પદાર્થના દળને સમપ્રમાણ હોવી જોઈએ. આ ઉપરાંત, તે તાપમાન પર પણ આધાર રાખતી હોઈ શકે, એટલે કે જુદાં જુદાં તાપમાને, તાપમાનમાં એકમ વધારો કરવા માટે જરૂરી ઉષ્મા જુદી જુદી હોઈ શકે. પદાર્થનો તેના જથ્થા (Amount)થી સ્વતંત્ર ગુણધર્મ વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે Sને પદાર્થના kg માં દળ m વડે ભાગીએ તો

$$s = \frac{S}{m} = \left(\frac{1}{m}\right)\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.5)$$

s પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા તરીકે ઓળખાય છે. તે પદાર્થની પ્રકૃતિ અને તેના તાપમાન પર આધાર રાખે છે. વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનો એકમ J kg^{-1} K^{-1} છે.

જો પદાર્થના જથ્થાને તેના મોલ μ (દળ mને kgના બદલે) વડે દર્શાવવામાં આવે, તો આપણે પદાર્થની મોલ દીઠ ઉષ્માધારિતા આ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

$$C = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.6)$$

C ને પદાર્થની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા કહે છે. sની જેમ, C પણ પદાર્થના જથ્થાથી સ્વતંત્ર છે. C પદાર્થની પ્રકૃતિ; તેના તાપમાન અને કઈ પરિસ્થિતિઓમાં ઉષ્મા આપવામાં આવી છે તેના પર આધાર રાખે છે. C નો એકમ J mol^{-1} K^{-1} છે. હવે પછી આપણે જોઈશું કે (વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાના સંદર્ભમાં), C કે s ને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે બીજી વધારાની શરતોની પણ જરૂર પડી શકે. C ને વ્યાખ્યાયિત કરવા પાછળનો હેતુ એ છે કે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાઓ વિશેના સામાન્ય અનુમાન કરી શકાય.

કોષ્ટક 12.1માં વાતાવરણના દબાણે અને ઓરડાના સામાન્ય તાપમાને માપેલ વિશિષ્ટ અને મોલર ઉષ્મા-ધારિતાઓની યાદી આપેલ છે.

પ્રકરણ 13માં આપણે જોઈશું કે વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં અનુમાનિત મૂલ્યો સામાન્યપણે પ્રાયોગિક મૂલ્યો સાથે મળતા આવે છે. ઘન પદાર્થોની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાનું અનુમાન કરવા માટેના ઊર્જા સમવિભાજનના નિયમનો આપણે અહીં પણ ઉપયોગ કરી શકીએ (જુઓ પરિચ્છેદ 13.5 અને 13.6). ધારો કે એક ઘન પદાર્થના N અણુઓ, તેમના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ કંપન કરે છે. એક પરિમાણના દોલકની સરેરાશ ઊર્જા $2 \times \frac{1}{2}k_BT = k_BT$ હોય છે. ત્રિપરિમાણમાં સરેરાશ ઊર્જા $3k_BT$ હોય છે. એક મોલ ઘન પદાર્થ માટે, કુલ ઊર્જા

$$U = 3k_BT \times N_A = 3\ RT \qquad (\because k_BT \times N_A = R)$$

હવે, અચળ દબાણે $\Delta Q = \Delta U + P\ \Delta V \cong \Delta U$, કારણ કે ઘન પદાર્થ માટે ΔV અવગણ્ય હોય છે. આથી,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3\ R \qquad (12.7)$$

કોષ્ટક 12.1 ઓરડાના તાપમાને અને વાતાવરણના દબાણે કેટલાક ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ અને મોલર ઉષ્માધારિતાઓ

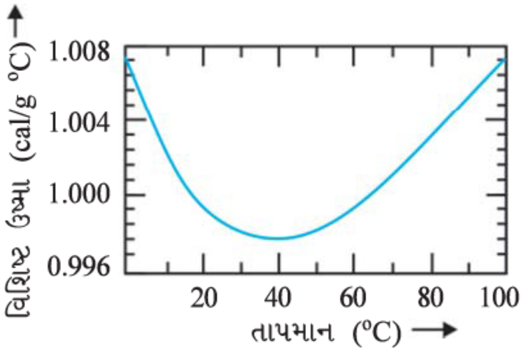
પદાર્થ	વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (J kg^{-1} K^{-1})	મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા (J mol^{-1} K^{-1})
ઍલ્યુમિનિયમ	900.0	24.4
કાર્બન	506.5	6.1
તાંબું	386.4	24.5
સીસું	127.7	26.5
ચાંદી	236.1	25.5
ટંગસ્ટન	134.4	24.9

કોષ્ટક 12.1માં દર્શાવ્યા મુજબ, મોટે ભાગે પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ મૂલ્યો, સામાન્ય તાપમાને અનુમાનિત મૂલ્યો 3R સાથે

મળતાં આવે છે (કાર્બન એક અપવાદ છે). નીચા તાપમાને આ મૂલ્યો મળતાં આવતાં નથી.

પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા
(Specific Heat Capacity of Water)

ઉષ્માનો જૂનો એકમ કૅલરી હતો. પહેલાં 1 g પાણીનું તાપમાન 1 °C વધારવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને કૅલરી કહેવાતી, વધુ ચોક્સાઈપૂર્વકના માપન દ્વારા જાણવા મળ્યું હતું કે, પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મા તાપમાન સાથે થોડી બદલાય છે. આકૃતિ 12.5માં આ ફેરફાર (બદલાવ) 0 થી 100 °C તાપમાનના ગાળા માટે દર્શાવ્યો છે.



આકૃતિ 12.5 *તાપમાન સાથે પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મામાં થતો ફેરફાર*

આથી, કૅલરીની વધુ ચોક્કસ વ્યાખ્યા માટે, તાપમાનનો એકમ ગાળો દર્શાવવો જરૂરી છે. 1 g પાણીનું તાપમાન 14.5 °C થી 15.5 °C સુધી વધારવા માટે જરૂરી ઉષ્માના જથ્થાને એક કૅલરી તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. ઉષ્મા એ ઊર્જાનો એક પ્રકાર હોવાથી, તેનો એકમ જૂલ J લખવો વધારે યોગ્ય છે. SI એકમ પદ્ધતિમાં, પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા 4186 J kg^{-1} K^{-1}, એટલે કે 4.186 J g^{-1} K^{-1} છે. 1 કૅલરી ઉષ્મા ઉત્પન્ન કરવા માટે જરૂરી કાર્યને આપણે ઉષ્માનો યાંત્રિક તુલ્યાંક કહીએ છીએ, જે ખરેખર તો ઊર્જાના બે એકમો, કૅલરીથી જૂલના રૂપાંતરણનો એકમ છે. SI એકમ પદ્ધતિમાં, ઉષ્મા, કાર્ય કે ઊર્જાનાં અન્ય કોઈ સ્વરૂપ માટે આપણે જૂલનો ઉપયોગ કરીએ છીએ, આથી યાંત્રિક તુલ્યાંક શબ્દ વધારાનો અને બિનજરૂરી છે.

આપણે અગાઉ નોંધ્યું તેમ કઈ પ્રક્રિયા કે શરત હેઠળ ઉષ્માનું વહન થાય છે તેના પર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા આધાર રાખે છે. દા.ત., વાયુઓ માટે, આપણે બે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ : **અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્મા અને અચળ દબાણે વિશિષ્ટ ઉષ્મા.** આદર્શ વાયુ માટે, આપણી પાસે સાદું સમીકરણ છે.

$$C_P - C_V = R \tag{12.8}$$

જ્યાં C_P અને C_V એ અનુક્રમે અચળ દબાણ અને કદ માટે આદર્શ વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા અને R એ સાર્વત્રિક વાયુનિયતાંક છે. આ સમીકરણ સાબિત કરવા, આપણે 1 મોલ વાયુ માટે સમીકરણ (12.3)નો ઉપયોગ કરીએ :

$$\Delta Q = \Delta U + P\,\Delta V$$

જો અચળ કદે ΔQ (ઉષ્માનું) શોષણ થતું હોય, તો $\Delta V = 0$

$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right) \tag{12.9}$$

જ્યાં છેલ્લા પદમાં V લખવામાં આવતો નથી, કારણ કે આદર્શ વાયુ માટે U ફક્ત તાપમાન પર આધાર રાખે છે. (જે રાશિ અચળ રાખી હોય તેને Subscrip વડે દર્શાવાય છે) બીજી બાજુ, જો ΔQ અચળ દબાણે શોષાતી હોય તો,

$$C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_P + P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P \tag{12.10}$$

પ્રથમ પદમાંથી P દૂર શકીએ કારણ કે આદર્શ વાયુ માટે U ફક્ત T પર આધાર રાખે છે. હવે, એક મોલ આદર્શ વાયુ માટે,

$$PV = RT$$

જેના પરથી

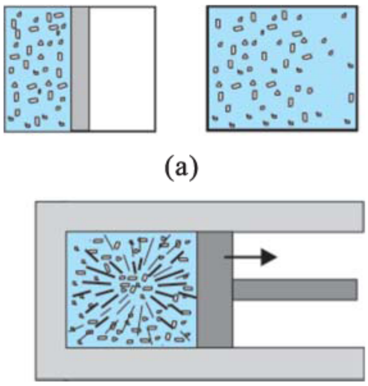
$$P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P = R \tag{12.11}$$

સમીકરણો (12.9)થી (12.11) પરથી આપણને સમીકરણ (12.8) મળે.

12.7 થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા ચલરાશિઓ અને અવસ્થા સમીકરણ (THERMODYNAMIC STATE VARIABLES AND EQUATION OF STATE)

થરમૉડાયનેમિક તંત્રની દરેક **સંતુલિત અવસ્થા** અમુક સ્થૂળ ચલરાશિઓનાં ચોક્કસ મૂલ્યો વડે દર્શાવી શકાય છે; જેમને અવસ્થા ચલરાશિઓ પણ કહે છે. દા. ત., વાયુની સંતુલિત અવસ્થા તેના દબાણ, કદ, તાપમાન અને દળ (અને જો વાયુઓનું મિશ્રણ હોય તો તેમના બંધારણ) પરથી દર્શાવી શકાય છે. થરમૉડાયનેમિક તંત્ર હંમેશાં સંતુલનમાં નથી હોતું. ઉદાહરણ રૂપે, શૂન્યાવકાશમાં વાયુનું મુક્ત પ્રસરણ એ સંતુલન

અવસ્થા નથી (આકૃતિ 12.6(a)). ઝડપી પ્રસરણ દરમિયાન, વાયુનું દબાણ બધી જગ્યાએ સમાન ન પણ હોય. તે જ રીતે, રાસાયણિક પ્રક્રિયા દ્વારા વાયુના મિશ્રણમાં ધડાકો (ભડાકો) થાય (દા.ત., પેટ્રોલની વરાળ અને વાયુના મિશ્રણને તણખા દ્વારા પ્રજ્વલિત કરવામાં આવે) તે સંતુલન અવસ્થા નથી. અહીં પણ તેના તાપમાન અને દબાણ સમાન નથી (આકૃતિ 12.6(b)). સમય જતાં, વાયુ સમાન તાપમાન અને દબાણ પ્રાપ્ત કરે છે અને પરિસર સાથે તાપીય અને યાંત્રિક સંતુલનમાં આવે છે.



(a) (b)

આકૃતિ **12.6** (a) *બૉક્સમાં આવેલ પડદો (દીવાલ) અચાનક દૂર કરવામાં આવે છે જેથી વાયુનું મુક્ત પ્રસરણ થાય છે.* (b) *વાયુઓના મિશ્રણમાં રાસાયણિક પ્રક્રિયા દ્વારા ધડાકો થાય છે. બંને પરિસ્થિતિમાં, વાયુ સંતુલિત અવસ્થામાં નથી અને તેને અવસ્થા ચલરાશિઓ વડે દર્શાવી શકાય નહિ.*

ટૂંકમાં, થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા ચલરાશિઓ તંત્રની સંતુલિત અવસ્થા દર્શાવે છે. જુદા જુદા અવસ્થા ચલો એકબીજાથી સ્વતંત્ર હોવા જરૂરી નથી. અવસ્થા ચલરાશિઓને જોડતું સમીકરણ, અવસ્થા સમીકરણ કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, આદર્શ વાયુ માટે, આદર્શ વાયુ સમીકરણ એ અવસ્થા સમીકરણ છે.

$$P V = \mu R T$$

આથી, ચોક્કસ જથ્થાના વાયુ માટે, એટલે કે આપેલ μ માટે ફક્ત બે સ્વતંત્ર ચલરાશિઓ હોય છે, જેમકે, P અને V અથવા T અને V. અચળ તાપમાને દબાણ-કદનો વક્ર **સમતાપી (Isotherm)** કહેવાય છે. વાસ્તવિક વાયુઓનાં અવસ્થા સમીકરણો વધુ જટિલ હોઈ શકે.

થરમૉડાયનેમિક ચલરાશિઓ બે પ્રકારની હોય છે : **એક્સ્ટેનસિવ (વિસ્તૃત) અને ઇન્ટેન્સિવ (ગાઢ) :** એક્સ્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ તંત્રનું 'પરિમાણ' (Size) દર્શાવે છે. ઇન્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ જેમ કે દબાણ અને તાપમાન પરિમાણ નથી દર્શાવતા. કઈ ચલરાશિ એક્સ્ટેન્સિવ કે ઇન્ટેન્સિવ છે તે નક્કી કરવા, સંતુલનમાં રહેલું કોઈ તંત્ર લો અને ધારો કે તે એકસરખા બે ભાગમાં વહેંચાયેલું છે. બંને ભાગ માટે જે ચલરાશિઓનાં મૂલ્યો બદલાય નહિ તે ઇન્ટેન્સિવ કહેવાય. જે ચલરાશિઓનાં મૂલ્યો દરેક ભાગમાં અડધા થાય તેને એક્સ્ટેન્સિવ કહેવાય. તે સહેલાઈથી જોઈ શકાય. દા.ત., આંતરિક ઊર્જા U, કદ V, કુલ દળ M એ એક્સ્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ છે. દબાણ P, તાપમાન T અને ઘનતા ρ એ ઇન્ટેન્સિવ ચલરાશિઓ છે. ચલરાશિઓના આ વર્ગીકરણનો ઉપયોગ કરીને થરમૉડાયનેમિક સમીકરણોની સાતત્યતા સારી રીતે ચકાસી શકાય છે. દા.ત.,

$$\Delta Q = \Delta U + P\ \Delta V$$

સમીકરણમાં બંને બાજુની રાશિઓ એક્સ્ટેન્સિવ* છે. (ઇન્ટેન્સિવ રાશિ, જેમ કે P, અને એક્સ્ટેન્સિવ રાશિ, ΔVનો ગુણાકાર એક્સ્ટેન્સિવ હોય છે.)

12.8 થરમૉડાયનેમિક પ્રક્રિયાઓ (THERMODYNAMIC PROCESSES)

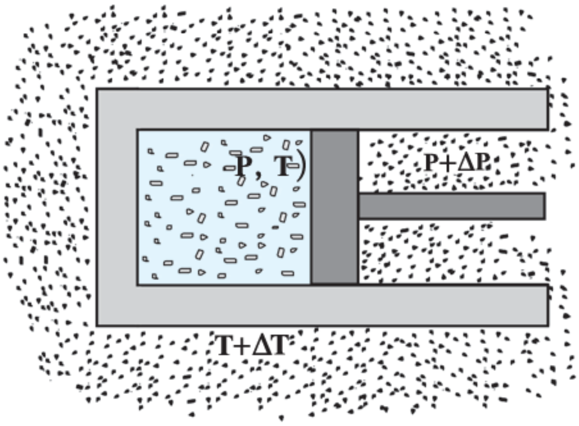
12.8.1 ક્વૉસાઈ સ્ટેટિક (અર્ધ-સ્થાયી) પ્રક્રિયા (Quasi-Static Process)

ધારો કે, એક વાયુ પરિસર સાથે તાપીય અને યાંત્રિક સંતુલનમાં છે. આ પરિસ્થિતિમાં વાયુનું દબાણ, બાહ્ય દબાણ જેટલું અને તેનું તાપમાન, પરિસરના તાપમાન જેટલું હોય છે. ધારો કે, બાહ્ય દબાણ અચાનક ઘટાડવામાં આવે છે (ધારો કે, વાયુપાત્રમાં ખસી શકે તેવા પિસ્ટન પરનું વજન ઊંચકી લઈને). આ પિસ્ટન બહારની તરફ પ્રવેગી ગતિ કરશે. આ પ્રક્રિયા દરમિયાન, વાયુ એવી અવસ્થાઓમાંથી પસાર થશે કે જે સંતુલિત ન હોય. અસંતુલિત અવસ્થાઓને ચોક્કસ રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય તેવા દબાણ અને તાપમાન હોતા નથી. એ જ રીતે, જો વાયુ અને તેના પરિસર વચ્ચે તાપમાનનો દેખીતો તફાવત હોય, તો ત્યાં ઉષ્માનું ઝડપથી આદાન-પ્રદાન (વિનિમય) થશે જે દરમિયાન વાયુ અસંતુલિત અવસ્થાઓમાંથી પસાર થશે. સમય જતાં આ વાયુ એ પરિસરના સુવ્યાખ્યાયિત તેવા (Well Defined) તાપમાન અને દબાણ સાથે સંતુલિત સ્થિતિમાં આવશે. શૂન્યાવકાશમાં વાયુનું વિસ્તરણ અને રાસાયણિક પ્રક્રિયા દ્વારા વાયુઓના મિશ્રણમાં વિસ્ફોટ થવો, જે પરિચ્છેદ 12.7માં દર્શાવ્યું છે તેમ, તે તંત્ર અસંતુલિત અવસ્થાઓમાંથી પસાર થતું હોવાનાં ઉદાહરણો છે.

તંત્રની અસંતુલિત અવસ્થાઓ સાથે કામ પાર પાડવું અઘરું છે. આથી, એવી આદર્શ પ્રક્રિયા વિચારવી યોગ્ય કહેવાશે કે જેમાં દરેક સ્થિતિમાં તંત્ર સંતુલિત અવસ્થામાં હોય. આવી પ્રક્રિયા, સૈદ્ધાંતિક રીતે, અત્યંત ધીમી હોય છે

* *અગાઉ જણાવ્યું હતું તે મુજબ, Q એ અવસ્થા ચલરાશિ નથી. આમ છતાં, ΔQ સ્પષ્ટરૂપે તંત્રના દળના સમપ્રમાણમાં છે અને તેથી એક્સ્ટેન્સિવ છે.*

અને તેથી તેને અર્ધસ્થાયી (ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક) કહે છે. તંત્ર તેની ચલરાશિઓ (P, T, V) એટલી ધીમે ધીમે બદલે છે કે જેથી તે દરેક વખતે પરિસર સાથે તાપીય અને યાંત્રિક સંતુલનમાં રહે. અર્ધસ્થાયી પ્રક્રિયામાં દરેક તબક્કામાં, તંત્રના દબાણ અને બાહ્ય દબાણ વચ્ચેનો તફાવત અતિસૂક્ષ્મ (Infinitesimally Small) છે. જ્યારે તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે તાપમાનનો તફાવત હોય ત્યારે પણ આ સત્ય છે (આકૃતિ 12.7). વાયુને એક અવસ્થા (P, T)થી બીજી અવસ્થા (P', T') સુધી ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયા દ્વારા લઈ જવા માટે, આપણે બાહ્ય દબાણને બહુ જ નાના પ્રમાણમાં એવી રીતે બદલીએ કે જેથી તંત્ર તેના પરિસર સાથે સંતુલન કરી શકે અને આ પ્રક્રિયા અત્યંત ધીમેથી કરતાં કરતાં તંત્રને દબાણ P' સુધી લાવી શકાય. તે જ રીતે, તાપમાન બદલવા માટે આપણે તંત્ર અને પરિસર સ્રોત (Reservoirs-ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન) વચ્ચે અતિસૂક્ષ્મ તાપમાનનો તફાવત રાખીએ અને તે રીતે T થી T' સુધીના વધતા ક્રમના તાપમાનોવાળાં ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાનો પસંદ કરતા જઈએ, તો તંત્ર તાપમાન T' સુધી પહોંચે.



આકૃતિ 12.7 અર્ધસ્થાયી (ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક) પ્રક્રિયામાં બહારના ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન (પરિસર)નું તાપમાન અને બહારનું દબાણ તંત્રના તાપમાન અને દબાણથી અત્યંત સૂક્ષ્મ પ્રમાણમાં અલગ હોય છે.

અર્ધસ્થાયી પ્રક્રિયા એ દેખીતી રીતે વૈચારિક (Hypothetical) નમૂનો (Construct) છે. હકીકતમાં, જે પ્રક્રિયાઓ અત્યંત ધીમી હોય અને પિસ્ટન પ્રવેગી ગતિ ધરાવતો ન હોય, તાપમાનનો મોટો તફાવત (Gradient) ન હોય વગેરે. લગભગ આદર્શ ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયાની સન્નિકટતા છે. હવે પછી જ્યાં સુધી સ્પષ્ટ કહેવામાં ન આવે ત્યાં સુધી ક્વૉસાઇ સ્ટેટિક પ્રક્રિયાઓ ધ્યાનમાં લઈશું.

જે પ્રક્રિયામાં અંત સુધી તંત્રનું તાપમાન અચળ રહેતું હોય તેને **સમતાપી પ્રક્રિયા (Isothermal Process)** કહેવાય. અચળ તાપમાને રહેલા મોટા પ્રાપ્તિસ્થાન (Reservoir)માં મૂકેલ ધાતુના નળાકાર પાત્રમાં વાયુનું પ્રસરણ એ સમતાપી પ્રક્રિયાનું ઉદાહરણ છે. (મોટા પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી તંત્રમાં આવેલી ઉષ્મા સામાન્ય રીતે મોટા પ્રાપ્તિસ્થાનના તાપમાન પર અસર કરતી નથી, કારણ કે તેની ઉષ્માધારિતા ખૂબ મોટી હોય છે.) **સમદાબ (Isobaric) પ્રક્રિયા**માં દબાણ અચળ હોય છે જ્યારે **સમકદ (Isochoric)** પ્રક્રિયામાં કદ અચળ હોય છે.

અંતમાં જો તંત્રને પરિસરથી (અવાહક દ્વારા) અલગ કરવામાં આવે, તો તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે ઉષ્માનું વહન થતું નથી. આ પ્રક્રિયા **સમોષ્મી (Adiabatic)** કહેવાય છે. કોષ્ટક 12.2માં આ પ્રક્રિયાઓની ખાસિયતોની યાદી આપેલ છે.

કોષ્ટક 12.2 કેટલીક ખાસ થરમૉડાયનેમિક પ્રક્રિયાઓ

પ્રક્રિયાનો પ્રકાર	ખાસિયત (Feature)
સમતાપી	અચળ તાપમાન
સમદાબ	અચળ દબાણ
સમકદ	અચળ કદ
સમોષ્મી	તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે ઉષ્માવહન નહિ ($\Delta Q = 0$)

આપણે હવે આ પ્રક્રિયાઓનો ઊંડાણપૂર્વક અભ્યાસ કરીએ :

12.8.2 *સમતાપી પ્રક્રિયા (Isothermal Process)*

સમતાપી પ્રક્રિયા (T અચળ) માટે આદર્શ વાયુ સમીકરણ પરથી,

$$PV = \text{અચળ}$$

એટલે કે, આપેલ દળના વાયુનું દબાણ તેના કદના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં બદલાય છે. આ બૉઇલનો નિયમ છે.

ધારો કે એક આદર્શ વાયુ સમતાપી રીતે (T તાપમાને) પ્રારંભિક અવસ્થા (P_1, V_1)થી અંતિમ અવસ્થા (P_2, V_2) સુધી જાય છે. વચ્ચેના કોઈ તબક્કે P દબાણે તેનું કદ Vથી $V + \Delta V$ (ΔV નાનું) સુધી બદલાય છે.

$$\Delta W = P \, \Delta \, V$$

$\Delta V \to 0$ લેતાં અને સંપૂર્ણ પ્રક્રિયા દરમિયાન રાશિ ΔWનો સરવાળો કરતાં,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P \, dV$$

$$= \mu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (12.12)$$

અહીંયાં બીજા પદમાં આપણે આદર્શ વાયુ સમીકરણ $PV = \mu RT$નો ઉપયોગ કર્યો છે અને અચળાંકોને સંકલનની બહાર લીધા છે. આદર્શ વાયુ માટે, આંતરિક ઊર્જા ફક્ત તાપમાન પર આધાર રાખે છે. આથી, સમતાપી પ્રક્રિયામાં આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જામાં કોઈ ફરક પડતો નથી. થરમૉડાયનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ સૂચવે છે કે, વાયુને આપવામાં આવેલી ઉષ્મા, વાયુ વડે થયેલાં કાર્ય જેટલી હોય છે : $Q = W$. સમીકરણ (12.12) પરથી નોંધો કે $V_2 > V_1$ માટે $W > 0$; અને $V_2 < V_1$ માટે $W < 0$. એટલે કે, સમતાપી પ્રસરણમાં વાયુ ઉષ્મા શોષે છે અને કાર્ય કરે છે જ્યારે સમતાપી સંકોચનમાં પરિસર વડે વાયુ પર કાર્ય થાય છે અને વાયુ ઉષ્મા ગુમાવે છે.

12.8.3 *સમોષ્મી પ્રક્રિયા (Adiabatic Process)*

સમોષ્મી પ્રક્રિયામાં પરિસરથી તંત્ર અલિપ્ત (અલગ કરેલું) હોય છે અને શોષેલી કે ગુમાવેલી ઉષ્મા શૂન્ય હોય છે. સમીકરણ (12.1) પરથી, આપણે જોઈ શકીએ કે વાયુ વડે થયેલું કાર્ય તેની આંતરિક ઊર્જામાં ઘટાડો કરે છે (અને તેથી આદર્શ વાયુના તાપમાનમાં પણ). કોઈ પણ સાબિતી વગર આપણે લખી શકીએ (જેનાં પરિણામો તમે ઉચ્ચ અભ્યાસક્રમોમાં ભણશો) કે આદર્શ વાયુ માટે સમોષ્મી પ્રક્રિયામાં,

$$PV^{\gamma} = \text{અચળ} \qquad (12.13)$$

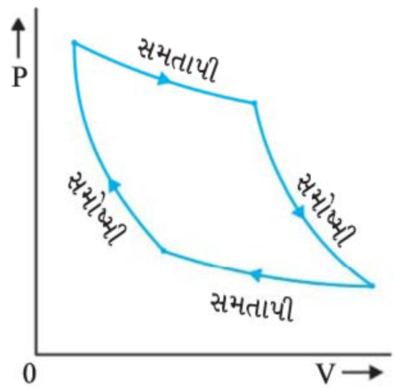
જ્યાં γ એ અચળ દબાણે અને અચળ કદે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ (સામાન્ય કે મોલર)નો ગુણોત્તર છે.

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

આથી, જો આદર્શ વાયુ સમોષ્મી રીતે (P_1, V_1) અવસ્થાથી (P_2, V_2) સુધી જાય તો,

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} = \text{અચળાંક} \qquad (12.14)$$

આકૃતિ 12.8માં આદર્શ વાયુ માટે $P–V$ના બે સમોષ્મી અને બે સમતાપી વક્રો દર્શાવ્યા છે.



આકૃતિ 12.8 આદર્શ વાયુની સમોષ્મી અને સમતાપી પ્રક્રિયાઓના P–V વક્રો

અગાઉની જેમ આપણે આદર્શ વાયુની (P_1, V_1, T_1) અવસ્થાથી (P_2, V_2, T_2) અવસ્થા સુધીના સમોષ્મી ફેરફાર માટે થયેલ કાર્ય ગણી શકીએ

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

$$= \text{અચળાંક} \times \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \text{અચળાંક} \times \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{1-\gamma}\right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{\text{અચળાંક}}{(1-\gamma)} \times \left[\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right] \qquad (12.15)$$

સમીકરણ (12.14) પરથી, અચળાંકનું મૂલ્ય $P_1V_1^{\gamma}$ કે $P_2V_2^{\gamma}$ છે.

$$W = \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{P_2V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}[P_2V_2 - P_1V_1] = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \qquad (12.16)$$

અપેક્ષા મુજબ જો વાયુ દ્વારા સમોષ્મી પ્રક્રિયામાં કાર્ય થતું હોય ($W > 0$), તો સમીકરણ (12.16) પરથી $T_2 < T_1$, બીજી બાજુ જો વાયુ પર કાર્ય થયું હોય ($W < 0$), તો $T_2 > T_1$ મળે, એટલે કે વાયુનું તાપમાન વધે છે.

12.8.4 *સમકદ પ્રક્રિયા (Isochoric Process)*

સમકદ પ્રક્રિયામાં V અચળ હોય છે. વાયુ પર કે વાયુ વડે કાર્ય થતું નથી. સમીકરણ (12.1) પરથી, વાયુ વડે શોષાયેલી ઉષ્મા સંપૂર્ણપણે તેની આંતરિક ઊર્જા અને તાપમાન બદલવામાં વપરાય છે. આપેલ જથ્થાની ઉષ્મા માટે તાપમાનમાં થતો ફેરફાર અચળ કદે વાયુની વિશિષ્ટ ઉષ્મા પરથી શોધી શકાય છે.

12.8.5 *સમદાબ પ્રક્રિયા (Isobaric Process)*

સમદાબ પ્રક્રિયામાં P અચળ હોય છે. વાયુ વડે થયેલું કાર્ય,

$$W = P(V_2 - V_1) = \mu R(T_2 - T_1) \qquad (12.17)$$

તાપમાન સાથે આંતરિક ઊર્જા પણ બદલાય છે. શોષાયેલી ઉષ્મા થોડીક આંતરિક ઊર્જાના વધારામાં અને થોડીક કાર્ય કરવામાં જાય છે. આપેલ જથ્થાની ઉષ્મા માટે તાપમાનમાં થતો ફેરફાર અચળ દબાણે વાયુની વિશિષ્ટ ઉષ્મા પરથી શોધી શકાય છે.

12.8.6 *ચક્રીય પ્રક્રિયા (Cyclic Process)*

ચક્રીય પ્રક્રિયામાં તંત્ર તેની પ્રારંભિક અવસ્થા સુધી પાછું આવે છે. આંતરિક ઊર્જા અવસ્થા ચલરાશિ હોવાથી ચક્રીય પ્રક્રિયા

માટે $\Delta U = 0$. સમીકરણ (12.1) પરથી શોષાયેલી ઉષ્મા તંત્ર વડે થયેલા કાર્ય જેટલી હોય છે.

12.9 ઉષ્મા એન્જિનો (HEAT ENGINES)

ઉષ્મા એન્જિન એવું સાધન છે કે જેના દ્વારા તંત્ર ચક્રીય પ્રક્રિયા કરે, જેના પરિણામે ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર થાય છે.

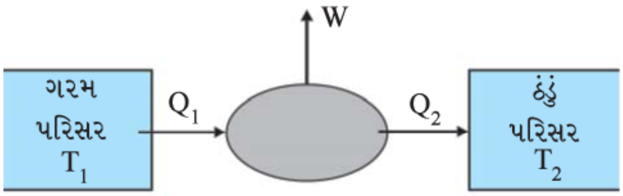
(1) તે **કાર્યકારી પદાર્થ**-ધરાવતા તંત્રનું બનેલું છે. દા.ત., પેટ્રોલ કે ડીઝલ એન્જિનમાં બળતણની બાષ્પ (વરાળ) અને વાયુનું મિશ્રણ, કે વરાળ યંત્રમાં વરાળ એ કાર્યકારી પદાર્થો છે.

(2) કાર્યકારી પદાર્થ ઘણીબધી પ્રક્રિયાઓમાંથી પસાર થઈને એક ચક્ર પૂરું કરે છે. આમાંની કેટલીક પ્રક્રિયાઓમાં તે કોઈ ઊંચા તાપમાન T_1 પર રહેલા બહારના પરિસરમાંથી કુલ ઉષ્મા Q_1 શોષે છે.

(3) ચક્રની કેટલીક પ્રક્રિયાઓમાં કાર્યકારી પદાર્થ કુલ Q_2 ઉષ્મા, નીચા તાપમાન T_2 એ રહેલા બહારના પરિસરમાં મુક્ત કરે છે.

(4) ચક્ર દરમિયાન તંત્ર વડે થયેલ કાર્ય (W) કોઈ વ્યવસ્થા દ્વારા પરિસર સુધી પહોંચે છે. (દા.ત., કાર્યકારી પદાર્થ ખસી શકે તેવા પિસ્ટન ધરાવતા નળાકાર પાત્રમાં હોઈ શકે જે યાંત્રિકઊર્જાને ધોરિયા (Shaft) દ્વારા બહારનાં પૈડાં સુધી પહોંચાડે.)

ઉષ્મા એન્જિનનાં મૂળભૂત લક્ષણોની રૂપરેખા આકૃતિ 12.9માં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 12.9 ઉષ્મા એન્જિનની વ્યવસ્થાનું નિદર્શન. T_1 તાપમાને રહેલા પરિસરમાંથી એન્જિન Q_1 ઉષ્મા મેળવે છે. T_2 તાપમાને રહેલા ઠંડા પરિસરમાં Q_2 ઉષ્મા મુક્ત કરે છે અને બહારના વિસ્તારમાં કાર્ય W પહોંચાડે છે.

કોઈ હેતુ માટે ઉપયોગી કાર્ય કરવા માટે આ ચક્ર વારે ઘડીએ પુનરાવર્તિત કરવામાં આવે છે. થરમૉડાયનેમિક્સની શાખાના મૂળ ઉષ્મા એન્જિનના અભ્યાસમાં રહેલ છે. એક મૂળભૂત પ્રશ્ન ઉષ્મા એન્જિનની કાર્યક્ષમતા સાથે જોડાયેલ છે. આ ઉષ્મા એન્જિનની કાર્યક્ષમતા (η), આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$\eta = \frac{W}{Q_1} \qquad (12.18)$$

જ્યાં, Q_1 એ આપેલી ઉષ્મા એટલે કે એક સંપૂર્ણ ચક્ર દરમિયાન તંત્રએ શોષેલી ઉષ્મા અને W એ સંપૂર્ણ ચક્ર દરમિયાન પરિસર પર થયેલ કાર્ય છે. એક ચક્ર દરમિયાન અમુક જથ્થાની ઉષ્મા (Q_2) પરિસરમાં પણ મુક્ત થઈ હોઈ શકે. આમ, એક ચક્ર માટે થરમૉડાયનેમિક્સના પ્રથમ નિયમ મુજબ,

$$W = Q_1 - Q_2 \qquad (12.19)$$

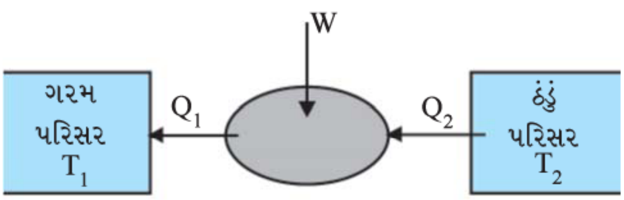
$$\text{તેથી, } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (12.20)$$

$Q_2 = 0$ માટે $\eta = 1$, એટલે કે ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કરવાની એન્જિનની કાર્યક્ષમતા 100 % હશે. નોંધો કે થરમૉડાયનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ એટલે કે, ઊર્જા સંરક્ષણનો નિયમ આવા એન્જિનને નકારતો નથી. પરંતુ અનુભવ દર્શાવે છે કે, વાસ્તવિક ઉષ્મા એન્જિનો સાથે સંકળાયેલા જુદા જુદા પ્રકારના વ્યય દૂર કરીએ તોપણ $\eta = 1$ હોય તેવું આદર્શ એન્જિન કદી શક્ય નથી. પ્રકૃતિના નૈસર્ગિક સિદ્ધાંત મુજબ એ દેખાઈ આવે છે કે, ઉષ્મા એન્જિનની કાર્યક્ષમતાની એક સૈદ્ધાંતિક મર્યાદા છે, જે થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ કહેવાય છે (પરિચ્છેદ 12.11).

ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કરવા માટેની કાર્યપ્રણાલી જુદા જુદા ઉષ્મા એન્જિનો માટે અલગ પ્રકારની હોય છે. સામાન્ય રીતે એના બે પ્રકાર છે : તંત્રને (જેમકે વાયુ કે વાયુઓના મિશ્રણ) બાહ્ય ભઠ્ઠી (Furnace) દ્વારા ગરમ કરવામાં આવે, વરાળ એન્જિનની જેમ; અથવા ઉષ્માક્ષેપક (Exothermic) રાસાયણિક પ્રક્રિયા દ્વારા અંદરથી જ ગરમ કરવામાં આવે, જેમકે આંતરિક બળતણ એન્જિન (Internal Combustion Engine). એક ચક્ર દરમિયાન સંકળાયેલા વિવિધ પદ (તબક્કા) (Steps) પણ એક એન્જિનથી બીજા એન્જિન માટે જુદા હોઈ શકે.

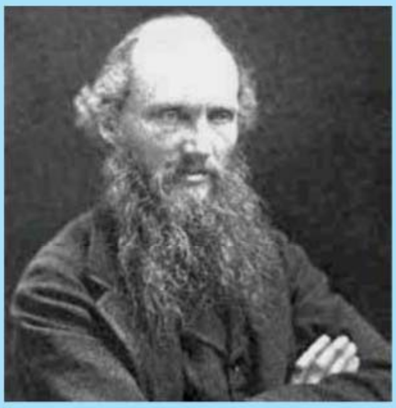
12.10 રેફ્રિજરેટરો અને હીટ (ઉષ્મા) પંપો (REFRIGERATORS AND HEAT PUMPS)

રેફ્રિજરેટર, ઉષ્મા એન્જિનથી ઊલટું છે. અહીં કાર્યકારી પદાર્થ, T_2 તાપમાને રહેલા ઠંડા પરિસરમાંથી Q_2 ઉષ્મા મેળવે (ખેંચે) છે. થોડુંક બાહ્ય કાર્ય W તેના પર કરવામાં આવે છે અને T_1 તાપમાને રહેલા ગરમ પરિસરમાં Q_1 ઉષ્મા મુક્ત કરવામાં આવે છે.



આકૃતિ 12.10 હીટ એન્જિનથી ઊલટું રેફ્રિજરેટર કે હીટ પંપની રૂપરેખા

થરમૉડાયનેમિક્સના પ્રણેતાઓ (Pioneers of Thermodynamics)



લૉર્ડ કૅલ્વિન (વિલિયમ થોમસન) Lord Kelvin (William Thomson) (1824-1907) આયર્લૅન્ડના બેલફાસ્ટમાં જન્મેલા, જે ઓગણીસમી સદીના બ્રિટિશ વિજ્ઞાનીઓમાંના આગલી હરોળના (Foremost) વિજ્ઞાની છે. જેમ્સ જૂલ (1818-1889), જુલિયસ મેયર (1814-1878) અને હરમન હેલ્મહોલ્ટ્ઝ (1821-1894) એ નિર્દેશ કરેલ ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમના વિકાસમાં તેમનો ખૂબ અગત્યનો ફાળો છે. તેમણે જાણીતી જૂલ-થોમસન અસર (શૂન્યાવકાશમાં વાયુના પ્રસરણ દરમિયાન તે ઠંડો પડે) માટે જૂલ સાથે કાર્ય કર્યું હતું. તેમણે નિરપેક્ષ શૂન્ય તાપમાનનો સિદ્ધાંત આપ્યો હતો અને નિરપેક્ષ તાપમાન માપક્રમ દર્શાવ્યો હતો, જે તેમના માનમાં કૅલ્વિન માપક્રમ કહેવાય છે. સાદી કાર્નોટ (1796-1832)ના કાર્ય પરથી થોમસને થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ આપ્યો. થોમસન બહુમુખી પ્રતિભાવાળા ભૌતિકશાસ્ત્રી હતા, જેમનું અગત્યનું પ્રદાન વિદ્યુતચુંબકીય સિદ્ધાંત અને જલ ગતિશાસ્ત્ર (Hydrodynamics)માં પણ છે.

રુડૉલ્ફ ક્લૉસિયસ (Rudolf Clausius) (1822-1888) પોલૅન્ડમાં જન્મેલા, જે થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમના શોધક તરીકે જાણીતા છે. કાર્નોટ અને થોમસનનાં કાર્યના આધારે, ક્લૉસિયસે એન્ટ્રોપીનો અગત્યનો સિદ્ધાંત તારવ્યો જે તેમને થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમ તરફ દોરી ગયો, જે દર્શાવે છે કે અલગ કરેલા તંત્રની એન્ટ્રોપી ક્યારેય ઘટી ના શકે. ક્લૉસિયસે વાયુઓના ગતિવાદ પર પણ કાર્ય કર્યું હતું અને અણુઓના પરિમાણ, ઝડપ, મુક્ત ગતિપથ વગેરે વિશે ભરોસાપાત્ર પરિણામો મેળવ્યાં હતાં.

હીટ પંપ એ રેફ્રિજરેટર જેવો જ છે. આપણે કયો શબ્દ વાપરવો એ સાધનના હેતુ પર આધાર રાખે છે. જો થોડીક જગ્યા, જેમ કે ચેમ્બરનો અંદરનો ભાગ ઠંડો કરવો હોય અને બહારનું પરિસર ઊંચા તાપમાને હોય તો તે માટેના સાધનને આપણે રેફ્રિજરેટર કહીએ છીએ. જો હેતુ અમુક જગ્યામાં (બહારનું વાતાવરણ ઠંડું હોય ત્યારે ઈમારતના ઓરડામાં) ઉષ્મા દાખલ કરવાનો હોય તો તે માટેના સાધનને હીટપંપ કહે છે.

રેફ્રિજરેટરમાં કાર્યકારી પદાર્થ (મોટા ભાગે, વાયુ સ્વરૂપમાં) નીચેના તબક્કાઓમાંથી પસાર થાય છે : (a) વાયુનું ઊંચા દબાણથી નીચા દબાણ તરફ અચાનક વિસ્તરણ, જે તેને ઠંડો કરે છે અને તેને બાષ્પ-પ્રવાહી મિશ્રણમાં રૂપાંતરિત કરે છે, (b) જે વિસ્તારનું તાપમાન ઘટાડવાનું છે તેમાંથી ઠંડા પ્રવાહી વડે ઉષ્માનું શોષણ, જેથી પ્રવાહીનું બાષ્પમાં રૂપાંતર થાય છે. (c) તંત્ર પર બહારથી થતા કાર્ય વડે બાષ્પનું તાપમાન વધારવું અને (d) બાષ્પ દ્વારા પરિસરમાં ઉષ્મા મુક્ત કરવી, જેથી ફરીથી તે પોતાની પ્રારંભિક અવસ્થામાં આવે અને આ ચક્ર પૂરું થાય.

રેફ્રિજરેટરનો પરફોર્મન્સ (કાર્ય સિદ્ધિ) ગુણાંક (α) (Coefficient of Performance) આ રીતે દર્શાવાય,

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} \qquad (12.21)$$

જ્યાં, Q_2 એ ઠંડા પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી મેળવેલ ઉષ્મા છે અને W એ રેફ્રિજરન્ટ એટલે કે તંત્ર પર થયેલ કાર્ય છે. (હીટ પંપ માટે αને Q_1/W વડે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.) નોંધો કે વ્યાખ્યા મુજબ η ક્યારેય 1 કરતાં વધારે થઈ શકતો નથી, જ્યારે α, 1 કરતાં વધુ હોઈ શકે. ઊર્જા-સંરક્ષણ મુજબ ઉષ્ણ (ગરમ) પરિસરમાં મુક્ત થયેલ ઉષ્મા

$$Q_1 = W + Q_2$$

એટલે, $$\alpha = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \qquad (12.22)$$

હીટ એન્જિનમાં, ઉષ્મા સંપૂર્ણ રીતે કાર્યમાં રૂપાંતરિત થઈ શકતી નથી; તે જ રીતે રેફ્રિજરેટરમાં જ્યાં સુધી તંત્ર પર બાહ્ય કાર્ય થાય નહિ ત્યાં સુધી તે કાર્ય કરી શકતું નથી. એટલે કે, સમીકરણ (12.21)માં પરફોર્મન્સ ગુણાંક અનંત થઈ શકે નહિ.

12.11 થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ (SECOND LAW OF THERMODYNAMICS)

થરમૉડાયનેમિક્સનો પહેલો નિયમ ઊર્જા-સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત છે. સામાન્ય અનુભવ દર્શાવે છે કે એવી કેટલીય પ્રક્રિયાઓ છે કે જે પહેલા નિયમનું પાલન કરતી હોય અને છતાં તેમનું અવલોકન ન કર્યું હોય. દા.ત., ટેબલ પર પડેલ પુસ્તકને ક્યારેય કોઈએ એની જાતે ટેબલ પર ઉંચે કૂદકા મારતું ન

જોયું હોય. જો ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમનું જ એક માત્ર બંધન (Restriction) હોત તો કદાચ આમ શક્ય બનત. ટેબલ કદાચ અચાનક ઠંડું થાય, જેથી તેની આંતરિક ઊર્જા તેટલા પ્રમાણમાં પુસ્તકની યાંત્રિકઊર્જામાં રૂપાંતરિત થાય. જે ત્યાર બાદ મેળવેલ યાંત્રિકઊર્જાને સમતુલ્ય સ્થિતિઊર્જા જેટલી ઊંચાઈ સુધી કૂદકો મારે. પરંતુ આવું ક્યારેય થતું નથી. નિઃશંક તે ઊર્જા-સંરક્ષણના સિદ્ધાંતનું સમાધાન કરતું હોવા છતાં, પ્રકૃતિનો બીજો કોઈ પાયાનો સિદ્ધાંત આમ થવા દેતો નથી. આ સિદ્ધાંત, જે થરમૉડાયનેમિક્સના પહેલા નિયમનું પાલન કરતી ઘણી પ્રક્રિયાઓ થવા દેતો નથી, તેને થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ કહે છે.

થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ હીટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા અને રેફ્રિજરેટરના પરફોર્મન્સ ગુણાંક માટેની મૂળભૂત મર્યાદાઓ દર્શાવે છે. સાદી ભાષામાં તે દર્શાવે છે કે હીટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ક્યારેય 1 જેટલી ન હોઈ શકે. સમીકરણ (12.20) મુજબ, ઠંડા પરિસરમાં મુક્ત કરવામાં આવેલી ઉષ્મા ક્યારે પણ શૂન્ય ન કરી શકાય. રેફ્રિજરેટર માટે બીજો નિયમ દર્શાવે છે કે, પરફોર્મન્સ ગુણાંક ક્યારે પણ અનંત ન હોઈ શકે. સમીકરણ (12.21) મુજબ, આનો મતલબ એ કે બાહ્ય કાર્ય (W) ક્યારે પણ શૂન્ય ન હોઈ શકે. નીચે આપેલ બે વિધાનોમાં, પહેલું કેલ્વિન અને પ્લાન્કનું છે, જે મુજબ આદર્શ હીટ એન્જિન શક્ય નથી અને બીજું ક્લૉસિયસનું છે, જે મુજબ આદર્શ રેફ્રિજરેટર કે હીટ પંપ શક્ય નથી, એ ઉપરનાં અવલોકનોના સંક્ષિપ્ત સારાંશ છે.

થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ (Second Law of Thermodynamics)

કેલ્વિન-પ્લાન્કનું કથન

એવી કોઈ પ્રક્રિયા શક્ય નથી જેના એકમાત્ર પરિણામરૂપે ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન (પરિસર)માંથી ઉષ્માનું શોષણ થઈ પૂરેપૂરી ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર થાય.

ક્લૉસિયસનું કથન

એવી પ્રક્રિયા શક્ય નથી કે જેના એકમાત્ર પરિણામરૂપે ઉષ્માનો વિનિમય (વહન) ઠંડા પદાર્થથી ગરમ પદાર્થ તરફ થાય.

એ સાબિત કરી શકાય કે ઉપરનાં બંને વિધાનો સમતુલ્ય છે.

12.12 પ્રતિવર્તી અને અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ (REVERSIBLE AND IRREVERSIBLE PROCESSES)

કોઈ પ્રક્રિયા વિચારો કે જેમાં થરમૉડાયનેમિક તંત્ર પ્રારંભિક અવસ્થા iથી અંતિમ અવસ્થા f સુધી જાય છે. આ પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર પરિસરમાંથી Q જેટલી ઉષ્મા શોષે (મેળવે) છે અને તેના પર W કાર્ય કરે છે. શું આપણે આ પ્રક્રિયાને ઊલટાવીને તંત્ર અને પરિસર બંનેને ક્યાંય પણ અન્ય કોઈ અસર વગર તેમની પ્રારંભિક અવસ્થાઓ સુધી લઈ જઈ શકીએ ? અનુભવ દર્શાવે છે કે કુદરતની મોટા ભાગની પ્રક્રિયાઓ માટે આ શક્ય નથી. કુદરતની સ્વતઃ (Spontaneous) પ્રક્રિયાઓ અપ્રતિવર્તી હોય છે. કેટલાંક ઉદાહરણો આપી શકાય. સગડી (ભઠ્ઠી) પર મૂકેલા વાસણ (પાત્ર)નું તળિયું તેના બીજા ભાગોથી વધુ ગરમ હશે. જ્યારે વાસણને લઈ લેવામાં આવે ત્યારે ઉષ્મા તેના તળિયાથી બીજા ભાગો તરફ જાય છે; જેથી પાત્ર સમાન તાપમાને પહોંચે (જે સમય જતાં પરિસરના તાપમાન સુધી ઠંડું પડે છે). આ પ્રક્રિયાને ઊલટાવી ન શકાય; વાસણનો કોઈ ભાગ આપમેળે ઠંડો પડે અને તળિયું ગરમ થાય એવું નહિ બને. જો એમ થાય તો તે થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમનું ઉલ્લંઘન કરશે. તણખો કરીને સળગાવેલું પેટ્રોલ અને હવાનું મિશ્રણ ઊલટાવી ન શકાય. રસોડામાં ગૅસ સિલિન્ડરમાંથી ગળતો (ચુવાતો/Leaking) ગૅસ આખા ઓરડામાં પ્રસરે છે. પ્રસરવાની આ પ્રક્રિયા જાતે ઊલટાઈ જઈને ગૅસને પાછો સિલિન્ડરમાં ભરી દેશે નહિ. પરિસર સાથે તાપીય સંપર્કમાં રહેલા પ્રવાહીને સતત (ચક્રીય રીતે) હલાવતાં થયેલ કાર્ય ઉષ્મામાં રૂપાંતર પામશે, જેથી પરિસરની આંતરિક ઊર્જા વધે. આ પ્રક્રિયા તદ્દન ઊલટાવી શકાય નહિ; નહિતર તેના પરિણામે ઉષ્માનું સંપૂર્ણપણે કાર્યમાં રૂપાંતર થાય, જે થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમનું ઉલ્લંઘન કરે. અપ્રતિવર્તીપણું એ, અપવાદ નહિ પણ કુદરતનો નિયમ છે.

અપ્રતિવર્તીપણું મુખ્યત્વે બે કારણે ઉદ્ભવે છે : એક, ઘણી પ્રક્રિયાઓ (જેમકે મુક્ત વિસ્તરણ અથવા વિસ્ફોટક રાસાયણિક પ્રક્રિયા) તંત્રને અસંતુલિત અવસ્થાઓ સુધી દોરી જાય છે; બીજું, મોટા ભાગની પ્રક્રિયાઓ ઘર્ષણ, શ્યાનતા અને બીજી ઊર્જા વ્યય કરતી (Dissipative) ઘટનાઓ (દા.ત., ગતિ કરતો કોઈ પદાર્થ રોકાય ત્યાં સુધીમાં તેની યાંત્રિકઊર્જાને જમીન અને પદાર્થમાં ઉષ્માના રૂપમાં ગુમાવતો જાય, પ્રવાહીમાં ચક્રીય ગતિ કરતું પાંખિયું શ્યાનતાના કારણે રોકાય અને તેની યાંત્રિકઊર્જાને ગુમાવીને પ્રવાહીની આંતરિક ઊર્જાનો વધારો કરે). ઊર્જાનો વ્યય કરતી ઘટનાઓ દરેક જગ્યાએ હાજર હોય છે અને તેમને ન્યૂનતમ કરી શકાય છે, પરંતુ બિલકુલ દૂર કરી શકાતી નથી. મોટા ભાગની પ્રક્રિયાઓ જેમની સાથે આપણે કાર્ય કરીએ છીએ તે અપ્રતિવર્તી હોય છે.

જે પ્રક્રિયાને ઊલટાવી શકાય કે જેથી બંને તંત્ર અને પરિસર વિશ્વમાં બીજે ક્યાંય કોઈ ફેરફાર વગર તેમની પ્રારંભિક અવસ્થાઓ સુધી પહોંચે તો આ પ્રક્રિયા (અવસ્થા $i \rightarrow$ અવસ્થા f)ને પ્રતિવર્તી કહેવાય. અગાઉની ચર્ચા મુજબ, પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા એક આદર્શવાદ છે. કોઈ પ્રક્રિયા

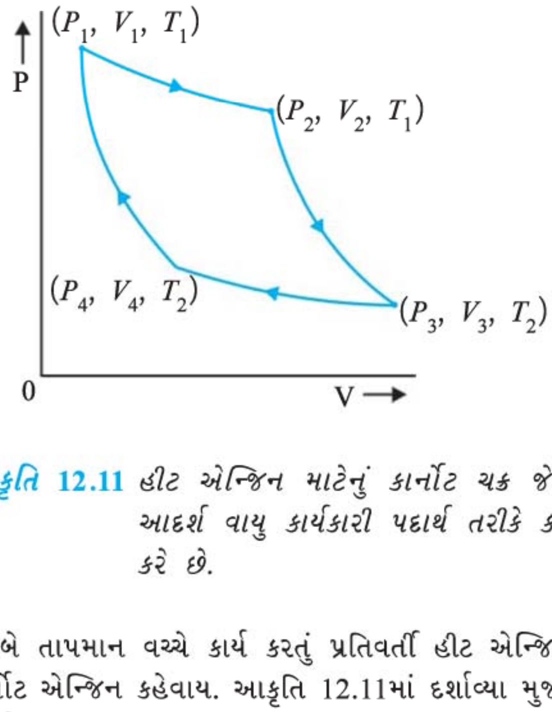
પ્રતિવર્તી તો જ હોય જો તે ક્વૉસાઈ-સ્ટેટિક (દરેક તબક્કામાં તંત્ર પરિસર સાથે સંતુલનમાં) હોય અને તેમાં કોઈ ઊર્જા વ્યય કરતી પ્રક્રિયાઓ ના હોય. દા.ત., એક આદર્શ વાયુનું, ખસી શકે તેવા પિસ્ટન ધરાવતા નળાકાર પાત્રમાં, ક્વૉસાઈ-સ્ટેટિક સમતાપી વિસ્તરણ એ પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા છે.

થરમૉડાયનેમિક્સમાં શા માટે પ્રતિવર્તીપણું એ પાયાનો સિદ્ધાંત છે ? આપણે જોયું તેમ, થરમૉડાયનેમિક્સનો એક હિતસંબંધ એ પણ છે કે, ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કેટલી કાર્યક્ષમતાથી થાય છે. થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ દર્શાવે છે કે 100 % કાર્યક્ષમતાવાળું હીટ એન્જિન હોવાની શક્યતા નથી. પરંતુ T_1 અને T_2 તાપમાન ધરાવતા બે પરિસરો વચ્ચે કાર્ય કરતા હીટ એન્જિનની મહત્તમ કાર્યક્ષમતા કેટલી હોઈ શકે ? એ જણાય છે કે આદર્શ રીતે થતી પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ માટે હીટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા મહત્તમ હોય છે. બાકીના બીજા એન્જિન જેમાં અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ સંકળાયેલી હોય (જે વાસ્તવમાં જોવા મળતા એન્જિનમાં હોય છે) તેમની કાર્યક્ષમતા આ મૂલ્યથી ઓછી હોય છે.

12.13 કાર્નોટ એન્જિન (CARNOT ENGINE)

ધારો કે આપણી પાસે ગરમ પરિસર T_1 તાપમાને અને ઠંડું પરિસર T_2 તાપમાને છે. આ બે પરિસર વચ્ચે કાર્ય કરતા હીટ એન્જિનની મહત્તમ કાર્યક્ષમતા કેટલી હોઈ શકે અને આ મહત્તમ કાર્યક્ષમતા મેળવવા માટે કઈ પ્રક્રિયાઓનું ચક્ર ધ્યાનમાં લેવું જોઈએ ? 1824માં ફ્રેન્ચ એન્જિનિયર સાડી કાર્નોટે (Sadi Carnot) આ પ્રશ્ન પર પ્રથમ ધ્યાન કેન્દ્રિત કર્યું. અગત્યનું એ હતું કે ઉષ્મા અને થરમૉડાયનેમિક્સના પાયાના ખ્યાલો ચોક્સાઈથી સ્થાપિત થયા નહોતા, એ પહેલાં કાર્નોટને સાચો જવાબ મળ્યો.

આપણી અપેક્ષા હોઈ શકે કે બે તાપમાન વચ્ચે કાર્ય કરતું આદર્શ એન્જિન પ્રતિવર્તી એન્જિન હોવું જોઈએ. અગાઉના વિભાગમાં દર્શાવ્યું તેમ અપ્રતિવર્તીપણું એ ઊર્જા વ્યય કરતી પ્રક્રિયાઓ સાથે સંકળાયેલું છે અને તે કાર્યક્ષમતા ઘટાડે છે. જે પ્રક્રિયા અર્ધસ્થાયી (ક્વૉસાઈ-સ્ટેટિક) અને ઊર્જાવ્યય કરતી ન હોય તે પ્રતિવર્તી હોય. આપણે જોયું હતું કે જે પ્રક્રિયામાં તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે ચોક્કસ તાપમાનનો તફાવત હોય તે ક્વૉસાઈ-સ્ટેટિક ન હોય. આનો મતલબ એ કે બે તાપમાન વચ્ચે કાર્ય કરતાં પ્રતિવર્તી હીટ એન્જિનમાં, ઉષ્માનું શોષણ (ગરમ પરિસરમાંથી) સમતાપી અને વ્યય (ઠંડા પરિસર તરફ) પણ સમતાપી હોવા જોઈએ. આમ, આપણે પ્રતિવર્તી હીટ એન્જિનના બે તબક્કા જાણી લીધા : T_1 તાપમાને સમતાપી પ્રક્રિયા દ્વારા ગરમ પરિસરમાંથી Q_1 ઉષ્માનું શોષણ અને T_2 તાપમાને Q_2 ઉષ્માનો વ્યય. ચક્ર પૂરું કરવા માટે, આપણે તંત્રને T_1થી T_2 તાપમાને લઈ જવું પડે અને ત્યાર બાદ પાછું તાપમાન T_2 થી T_1 પર. એવી કઈ પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ છે જેમનો આપણે આ માટે ઉપયોગ કરી શકીએ ? સામાન્ય પ્રતિક્રિયા તો એમ કહે છે કે આ માટે આપણે સમોષ્મી પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી શકીએ, જેમાં પરિસરમાંથી કોઈ પણ પ્રકારની ઉષ્માનો વિનિમય થતો નથી. જો આપણે બીજી કોઈ પ્રક્રિયાનો ઉપયોગ કરીએ કે જે સમોષ્મી ના હોય, ધારો કે સમકદ (Isochoric) પ્રક્રિયા તો તંત્રને એક તાપમાનથી બીજા તાપમાન સુધી લઈ જવા માટે આપણને T_2થી T_1 સુધીના તાપમાનની મર્યાદામાં આવેલાં પરિસરોની એક શ્રેણીની જરૂર પડે જેથી દરેક અવસ્થામાં પ્રક્રિયા ક્વૉસાઈ-સ્ટેટિક રહે. (ફરીથી યાદ રહે કે પ્રક્રિયા ક્વૉસાઈ-સ્ટેટિક અને પ્રતિવર્તી હોવા માટે, તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે ચોક્કસ તાપમાનનો તફાવત ન હોવો જોઈએ). પરંતુ આપણે એવું પ્રતિવર્તી એન્જિન વિચાર્યું છે કે જે ફક્ત બે તાપમાન વચ્ચે કાર્ય કરે છે. આમ સમોષ્મી પ્રક્રિયા આ એન્જિન માટે તંત્રના તાપમાનને T_1 થી T_2 અને T_2 થી T_1 સુધી લઈ જવી જોઈએ.



આકૃતિ 12.11 *હીટ એન્જિન માટેનું કાર્નોટ ચક્ર જેમાં આદર્શ વાયુ કાર્યકારી પદાર્થ તરીકે કાર્ય કરે છે.*

બે તાપમાન વચ્ચે કાર્ય કરતું પ્રતિવર્તી હીટ એન્જિન, કાર્નોટ એન્જિન કહેવાય. આકૃતિ 12.11માં દર્શાવ્યા મુજબ કાર્નોટ ચક્રમાં આવું એન્જિન એક ચક્ર દરમિયાન આપેલા શ્રેણીબદ્ધ તબક્કાઓમાં કાર્ય કરતું હોવું જોઈએ. આપણે કાર્નોટ એન્જિનના કાર્યકારી પદાર્થ તરીકે આદર્શ વાયુ લીધેલો છે.

(a) તબક્કો 1 $\rightarrow$ 2 વાયુનું સમતાપી વિસ્તરણ જે તેને (P_1, V_1, T_1) થી (P_2, V_2, T_1) અવસ્થા સુધી લઈ જાય છે.

T_1 તાપમાને રહેલા પરિસરમાંથી વાયુ વડે શોષાયેલી ઉષ્મા (Q_1)ને સમીકરણ (12.12)માં દર્શાવી છે. તે વાયુ વડે પરિસર

પર થયેલા કાર્ય ($W_{1 \to 2}$) જેટલી છે.

$$W_{1 \to 2} = Q_1 = \mu\ R\ T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (12.23)$$

(b) તબક્કો 2 $\to$ 3 (P_2, V_2, T_1) થી (P_3, V_3, T_2) સુધી વાયુનું સમોષ્મી પ્રસરણ.

સમીકરણ (12.16) પરથી વાયુ વડે થયેલું કાર્ય

$$W_{2 \to 3} = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \qquad (12.24)$$

(c) તબક્કો 3 $\to$ 4 (P_3, V_3, T_2) થી (P_4, V_4, T_2) સુધી વાયુનું સમતાપી સંકોચન.

T_2 તાપમાને રહેલા પરિસરમાં વાયુ વડે મુક્ત થયેલ ઉષ્મા (Q_2), સમીકરણ (12.12) વડે દર્શાવી છે. તે પણ પરિસર વડે વાયુ પર થયેલ કાર્ય ($W_{3 \to 4}$) જેટલી છે.

$$W_{3 \to 4} = Q_2 = \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (12.25)$$

(d) તબક્કો 4 $\to$ 1 (P_4, V_4, T_2) થી (P_1, V_1, T_1) સુધી વાયુનું સમોષ્મી સંકુચન

(સમીકરણ (12.16) પરથી) વાયુ પર થયેલ કાર્ય

$$W_{4 \to 1} = \mu R\left(\frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1}\right) \qquad (12.26)$$

સમીકરણ (12.23) થી (12.26) પરથી, એક ચક્ર દરમિયાન વાયુ વડે થયેલ કુલ કાર્ય

$$W = W_{1 \to 2} + W_{2 \to 3} - W_{3 \to 4} - W_{4 \to 1}$$

$$= \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (12.27)$$

કાર્નોટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ηનું મૂલ્ય,

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \qquad (12.28)$$

તબક્કો 2 $\to$ 3 સમોષ્મી પ્રક્રિયા હોવાથી,

$$T_1 V_2^{\ \gamma - 1} = T_2\ V_3^{\ \gamma - 1}$$

તેથી $$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma - 1)} \qquad (12.29)$$

તે જ રીતે, તબક્કો 4 $\to$ 1 સમોષ્મી પ્રક્રિયા હોવાથી,

$$T_2 V_4^{\ \gamma - 1} = T_1\ V_1^{\ \gamma - 1}$$

તેથી, $$\frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma - 1)} \qquad (12.30)$$

સમીકરણ (12.29) અને (12.30) પરથી,

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \qquad (12.31)$$

સમીકરણ (12.31)નો ઉપયોગ સમીકરણ (12.28)માં કરતાં,

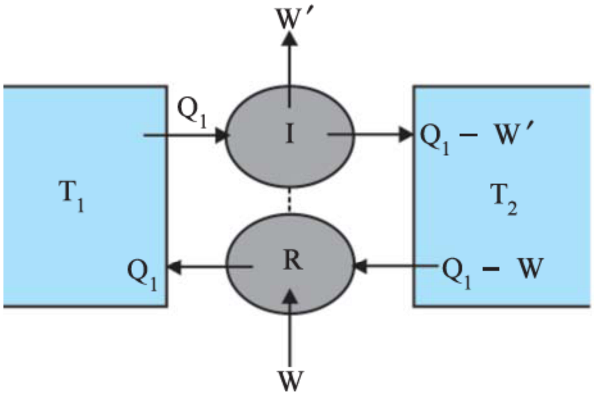
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \ \text{(કાર્નોટ એન્જિન)} \qquad (12.32)$$

આપણે અગાઉ જોયું હતું કે, કાર્નોટ એન્જિન એ પ્રતિવર્તી એન્જિન છે. ફક્ત તે જ એવું શક્ય પ્રતિવર્તી એન્જિન છે કે જે જુદાં જુદાં તાપમાને રહેલા બે પરિસર વચ્ચે કાર્ય કરે છે. આકૃતિ (12.11)માં દર્શાવેલ કાર્નોટ એન્જિનનો દરેક તબક્કો ઊલટાવી શકાય છે. આમાં T_2 તાપમાને રહેલા ઠંડા પરિસરમાંથી ઉષ્મા Q_2 લઈ તંત્ર પર W જેટલું કાર્ય કરી અને ગરમ પરિસરમાં ઉષ્મા Q_1 મુક્ત કરવામાં આવે છે. આ પ્રતિવર્તી રેફ્રિજરેટર છે.

હવે આપણે એક અગત્યનું પરિણામ (ઘણી વાર કાર્નોટનું પ્રમેય કહેવાય છે) સ્થાપિત કરીશું કે (a) અનુક્રમે T_1 અને T_2 તાપમાને રહેલા ગરમ અને ઠંડાં પરિસરો વચ્ચે કાર્ય કરતાં કોઈ પણ હીટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કાર્નોટ એન્જિન કરતા વધુ ન હોઈ શકે, અને (b) કાર્નોટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કાર્યકારી પદાર્થની પ્રકૃતિ પર આધાર રાખતી નથી.

પરિણામ (a) સાબિત કરવા તે જ ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન (source) (ગરમ પરિસર) અને ઠારણ વ્યવસ્થા (sink) (ઠંડું પરિસર) વચ્ચે કાર્ય કરતું પ્રતિવર્તી (કાર્નોટ) એન્જિન R અને અપ્રતિવર્તી એન્જિન I વિચારો. આપણે, I અને Rને એવી રીતે જોડીએ છીએ કે I હીટ એન્જિન તરીકે વર્તે અને R રેફ્રિજરેટર તરીકે વર્તે. ધારો કે ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાનમાંથી I, Q_1 જેટલી ઉષ્મા શોષે છે, W' જેટલું કાર્ય કરે (આપે) છે અને ઠારણ વ્યવસ્થામાં $Q_1 - W'$ જેટલી ઉષ્મા મુક્ત કરે છે. આપણે એવી ગોઠવણી કરીએ કે, ઠારણ વ્યવસ્થામાંથી Q_2 ઉષ્મા લઈ અને $W = Q_1 - Q_2$ જેટલું જરૂરી કાર્ય તેના પર થવા દઈને, R તેટલી જ ઉષ્મા Q_1 ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાનને પાછી આપે. હવે ધારો કે $\eta_R < \eta_I$, એટલે

કે જો R એન્જિન તરીકે કાર્ય કરવાનું હોય, તો તે I કરતાં ઓછું કાર્ય ઊપજ (output) આપશે, જેથી આપેલ Q_1 માટે $W < W'$. R રેફ્રિજરેટર તરીકે કાર્ય કરતું હોવાથી, પરિણામ સ્વરૂપે $Q_2 = Q_1 - W > Q_1 - W'$. આમ, બધું મળીને ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન કે બીજે ક્યાંય કોઈ પણ ફેરફાર વગર $I - R$નું જોડેલ તંત્ર ઠંડા પરિસરમાંથી $(Q_1 - W) - (Q_1 - W') = (W' - W)$ ઉષ્મા મેળવશે અને તેટલું જ કાર્ય એક ચક્ર દરમિયાન આપશે. આ સ્પષ્ટ પણે કેલ્વિન-પ્લાન્કના કથન મુજબ થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમનું ઉલ્લંઘન કરે છે. આથી એવું વિધાન કે $\eta_I > \eta_R$ ખોટું છે. કોઈ પણ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કાર્નોટ એન્જિન કરતા વધુ



આકૃતિ **12.12** *અપ્રતિવર્તી એન્જિન (I)નું પ્રતિવર્તી રેફ્રિજરેટર (R) સાથે જોડાણ. જો $W' > W$, તો $W' - W$ જેટલી ઉષ્માનું ઠારણ વ્યવસ્થામાંથી શોષણ થશે અને તે સંપૂર્ણપણે કાર્યમાં રૂપાંતરિત થશે, જે થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમનું ઉલ્લંઘન છે.*

ન હોઈ શકે. આવું જ એક બીજું વિધાન કરી શકાય, જે દર્શાવે કે એક ચોક્કસ પદાર્થનો ઉપયોગ કરતું પ્રતિવર્તી એન્જિન, બીજા પદાર્થનો ઉપયોગ કરતા એન્જિન કરતાં વધુ કાર્યક્ષમ ન હોઈ શકે. સમીકરણ (12.32) દ્વારા દર્શાવેલી કાર્નોટ એન્જિનની મહત્તમ કાર્યક્ષમતા કાર્નોટ ચક્રની પ્રક્રિયાઓ કરતા તંત્રની પ્રકૃતિથી સ્વતંત્ર હોય છે. આમ, કાર્નોટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ηની ગણતરીમાં આદર્શ વાયુને તંત્ર તરીકે લેવામાં આપણે બરોબર સાબિત થયા છીએ. આદર્શ વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ સરળ છે, જે આપણને ηની ગણતરીમાં મદદરૂપ થાય છે, પરંતુ ηનું અંતિમ પરિણામ [સમીકરણ (12.32)] એ કોઈ પણ કાર્નોટ એન્જિન માટે સત્ય છે.

આ અંતિમ સૂચન દર્શાવે છે કે કાર્નોટ ચક્રમાં,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{12.33}$$

એ તંત્રની પ્રકૃતિથી સ્વતંત્ર સાર્વત્રિક સમીકરણ છે. અહીંયાં Q_1 અને Q_2 અનુક્રમે કાર્નોટ એન્જિનમાં સમતાપી રીતે શોષાયેલી અને મુક્ત (વ્યય) થયેલી (ગરમમાંથી અને ઠંડા પરિસરમાંથી) ઉષ્મા છે. આથી, સમીકરણ (12.33)નો ઉપયોગ સાચા સાર્વત્રિક થરમૉડાયનેમિક તાપમાન માપક્રમ, કે જે કાર્નોટ ચક્રમાં ઉપયોગ કરેલ તંત્રના ચોક્કસ ગુણધર્મોથી સ્વતંત્ર હોય, તેને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે થઈ શકે. અલબત્ત, કાર્યકારી પદાર્થ તરીકે આદર્શ વાયુ હોય, તો આ સાર્વત્રિક તાપમાન એ પરિચ્છેદ 12.11માં દર્શાવેલ આદર્શ વાયુના તાપમાન જેટલું જ હોય.

સારાંશ

1. થરમૉડાયનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ દર્શાવે છે કે *બે તંત્ર ત્રીજા તંત્ર સાથે તાપીય સંતુલનમાં હોય તો તે બંને પણ એકબીજા સાથે તાપીય સંતુલનમાં હોય.* શૂન્ય ક્રમનો નિયમ તાપમાનના ખ્યાલ તરફ દોરી જાય છે.

2. તંત્રની આંતરિક ઊર્જા તંત્રના આણ્વીક ઘટકોની ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જાઓના સરવાળા જેટલી હોય છે. તે તંત્રની સમગ્રપણે ગતિઊર્જાને નથી સમાવતી. ઉષ્મા અને કાર્ય એ તંત્રમાં ઊર્જા વિનિમયના બે પ્રકાર છે : તંત્ર અને પરિસર વચ્ચે તાપમાનના તફાવતના કારણે થતો ઊર્જાનો વિનિમય એ ઉષ્મા છે. કાર્ય એ બીજી રીતે થતો ઊર્જાનો વિનિમય છે. જેમકે, વાયુ ધરાવતા નળાકાર પાત્રમાં પિસ્ટન સાથે લગાડેલા વજનમાં વધારો કે ઘટાડો કરીને તેના સ્થાનમાં ફેરફાર કરવો.

3. થરમૉડાયનેમિક્સનો પહેલો નિયમ એ ઊર્જા-સંરક્ષણનો સામાન્ય નિયમ છે જે કોઈ પણ તંત્ર કે જેમાંથી અથવા જેના તરફ પરિસરમાંથી (ઉષ્મા કે કાર્ય દ્વારા) ઊર્જાનો વિનિમય થતો હોય. તે દર્શાવે છે કે,

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

જ્યાં, ΔQ એ તંત્રને આપેલી ઉષ્મા છે. ΔW એ તંત્ર વડે થયેલું કાર્ય અને ΔU એ તંત્રની આંતરીક ઊર્જામાં થતો ફેરફાર છે.

4. પદાર્થની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા, વ્યાખ્યા મુજબ

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

જ્યાં m એ પદાર્થનું દળ અને ΔQ એ તેનું તાપમાન ΔT જેટલું બદલવા માટે જરૂરી ઉષ્મા છે. પદાર્થની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા વ્યાખ્યા મુજબ,

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

જ્યાં, μ એ પદાર્થના મોલની સંખ્યા છે. ઘન પદાર્થ માટે, ઊર્જા સમવિભાજનના નિયમ મુજબ

$$C = 3\ R$$

જે સામાન્ય તાપમાને પ્રયોગો સાથે લગભગ મળતું આવે છે. ઉષ્માનો જૂનો એકમ કૅલરી છે. 1 g પાણીનું તાપમાન 14.5 °C થી 15.5 °C સુધી વધારવા માટે જરૂરી ઉષ્માને 1 કૅલરી કહે છે. 1 cal = 4.186 J.

5. આદર્શ વાયુ માટે અચળ દબાણ અને કદે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા ઘનતાઓ,

$$C_p - C_v = R$$

સમીકરણનું સમાધાન કરે છે, જ્યાં R એ સાર્વત્રિક વાયુ-નિયતાંક છે.

6. થરમૉડાયનેમિક તંત્રની સંતુલન અવસ્થાઓને અવસ્થા ચલરાશિઓ વડે દર્શાવી શકાય છે. અવસ્થા ચલરાશિનું મૂલ્ય ફક્ત તેની ચોક્કસ અવસ્થા પર આધાર રાખે છે. આ અવસ્થા સુધી આવવા માટે તેણે લીધેલા માર્ગ પર નહિ. દબાણ (P), કદ (V), તાપમાન (T) અને દળ (m) એ અવસ્થા ચલરાશિઓનાં ઉદાહરણો છે. ઉષ્મા અને કાર્ય-અવસ્થા ચલરાશિઓ નથી. અવસ્થા સમીકરણ (જેમકે, વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ $PV = \mu RT$) એ જુદી જુદી અવસ્થા ચલરાશિઓને સાંકળતું સમીકરણ છે.

7. ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયા એટલી બધી ધીમી હોય છે કે જેથી સમગ્ર પ્રક્રિયા દરમિયાન તંત્ર-પરિસર સાથે તાપીય અને યાંત્રિક સંતુલનમાં રહે છે. ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયામાં, પરિસરના દબાણ અને તાપમાન તંત્ર કરતાં નહિવત્ પ્રમાણમાં જ જુદાં હોય છે.

8. T તાપમાને આદર્શ વાયુના કદ V_1 થી V_2 સુધીના સમતાપી વિસ્તરણ દરમિયાન શોષાયેલી ઉષ્મા (Q), વાયુ વડે થયેલા કાર્ય (W) જેટલી હોય છે, જે આ સમીકરણ વડે અપાય છે.

$$Q = W = \mu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

9. આદર્શ વાયુ માટે સમોષ્મી પ્રક્રિયા દરમિયાન

PV^{γ} = અચળ

જ્યાં,
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

આદર્શ વાયુ દ્વારા અવસ્થા (P_1, V_1, T_1)થી (P_2, V_2, T_2) સુધીના સમોષ્મી ફેરફાર દરમિયાન થયેલ કાર્ય,

$$W = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

10. હીટ એન્જિન એવું સાધન છે કે જેમાં તંત્ર ચક્રીય પ્રક્રિયા દરમિયાન ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર કરે છે. જો ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન (source)માંથી શોષેલ ઉષ્મા Q_1 હોય, ઠારણ વ્યવસ્થા (sink)માં મુક્ત (વ્યય) કરેલ ઉષ્મા Q_2 હોય અને એક ચક્ર દરમિયાન થયેલ કાર્ય W હોય, તો

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

11. રેફ્રિજરેટર કે હીટ પંપમાં તંત્ર ઠારણ-વ્યવસ્થામાંથી ઉષ્મા Q_2 શોષે છે અને Q_1 જેટલી ઉષ્મા ગરમ પરિસરમાં મુક્ત કરે છે, જ્યારે તંત્ર પર થયેલું કાર્ય W હોય છે. રેફ્રિજરેટરનો પરફૉર્મન્સ ગુણાંક આ રીતે મળે છે

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

12. થરમૉડાયનેમિક્સના પહેલા નિયમ સાથે સુસંગત કેટલીક પ્રક્રિયાઓને થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ સમર્થન આપતો નથી. તેનાં વિધાનો :

કૅલ્વિન-પ્લાન્કનું વિધાન

એવી કોઈ પ્રક્રિયા શક્ય નથી કે જેના એકમાત્ર પરિણામરૂપે પરિસરમાંથી ઉષ્મા શોષાય અને બધી જ ઉષ્માનું કાર્યમાં રૂપાંતર થાય.

ક્લૉસિયસનું વિધાન

એવી કોઈ પ્રક્રિયા શક્ય નથી કે જેના એકમાત્ર પરિણામરૂપે આપોઆપ (જાતે) ઉષ્માનું ઠંડા પદાર્થથી ગરમ પદાર્થ તરફ વહન થાય. સાદી ભાષામાં, બીજા નિયમનો મતલબ એ કે કોઈ પણ હીટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા ηનું મૂલ્ય 1 જેટલું ન હોઈ શકે અને કોઈ પણ રેફ્રિજરેટરનો પરફૉર્મન્સ ગુણાંક α અનંત ન હોઈ શકે.

13. જો તંત્ર અને પરિસર તેમની પ્રારંભિક અવસ્થાઓ સુધી બહારના વિશ્વમાં કોઈ પણ ફેરફાર વગર પાછા આવી શકે તો તે પ્રક્રિયા પ્રતિવર્તી કહેવાય. કુદરતમાં સ્વૈચ્છિક (આપોઆપ) થતી પ્રક્રિયાઓ અપ્રતિવર્તી હોય છે. આદર્શરૂપ પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા એ ક્વૉસાઇ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયા છે, જેમાં ઘર્ષણ, શ્યાનતા વગેરે ઊર્જા-વ્યયનાં પરિબળો હોતાં નથી.

14. કાર્નોટ એન્જિન એ બે તાપમાનો T_1 (ઉષ્મા પ્રાપ્તિસ્થાન - source) અને T_2 (ઠારણ-વ્યવસ્થા - sink) વચ્ચે કાર્ય કરતું પ્રતિવર્તી એન્જિન છે. કાર્નોટ ચક્ર બે સમતાપી પ્રક્રિયાઓ અને બે સમોષ્મી પ્રક્રિયાઓના જોડાણથી પૂર્ણ થાય છે. કાર્નોટ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{(કાર્નોટ એન્જિન)}$$

વડે દર્શાવાય છે.

બે તાપમાનો વચ્ચે કાર્ય કરતા કોઈ પણ એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કાર્નોટ એન્જિન કરતાં વધુ ન હોઈ શકે.

15. જો $Q > 0$ તંત્રમાં ઉષ્મા આવે છે.
જો $Q < 0$ તંત્ર વડે ઉષ્મા ગુમાવાય છે.
જો $W > 0$ તંત્ર વડે કાર્ય થાય છે.
જો $W < 0$ તંત્ર પર કાર્ય થાય છે.

જથ્થો	સંજ્ઞા	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
કદ-પ્રસરણાંક	α_v	$[K^{-1}]$	K^{-1}	$\alpha_v = 3\alpha_l$
તંત્રને આપેલી ઉષ્મા	ΔQ	$[ML^2T^{-2}]$	J	Q એ અવસ્થા ચલ નથી.
વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા	s	$[L^2T^{-2}K^{-1}]$	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$	
ઉષ્માવાહકતા (Thermal Conductivity)	K	$[MLT^{-3}K^{-1}]$	$J\ s^{-1}K^{-1}$	$H = -KA\frac{dT}{dx}$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ (Point to Ponder)

1. પદાર્થનું તાપમાન તેની આંતરિક ઊર્જા સાથે સંકળાયેલું હોય છે; તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિની ગતિઊર્જા સાથે નહિ. બંદૂકમાંથી છૂટેલી ગોળી (બુલિટ) તેની ઝડપના કારણે ઊંચા તાપમાને નથી હોતી.
2. થરમૉડાયનેમિક્સમાં સંતુલનનો મતલબ એ કે જે પરિસ્થિતિમાં તંત્રની થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા દર્શાવતી ચલરાશિઓ સમય પર આધારિત ન હોય. યંત્રશાસ્ત્રમાં સંતુલનનો મતલબ એ કે તંત્ર પર લાગતું કુલ (ચોખ્ખું) બળ અને ટૉર્ક શૂન્ય હોય.
3. થરમૉડાયનેમિક સંતુલનની અવસ્થામાં તંત્રનાં સૂક્ષ્મ (microscopic) ઘટકો (કણો) સંતુલિત સ્થિતિમાં (યંત્રશાસ્ત્રની ભાષામાં) હોતાં નથી.
4. જ્યારે તંત્રને ઉષ્મા આપવામાં આવે ત્યારે તંત્ર કઈ પ્રક્રિયામાંથી પસાર થાય છે તેના પર મોટા ભાગે ઉષ્માધારિતા આધાર રાખે છે.
5. સમતાપી ક્વૉસાઈ-સ્ટેટિક પ્રક્રિયામાં વાયુનું તાપમાન બહારના પરિસર જેટલું હોય તોપણ તંત્રની દરેક અવસ્થામાં ઉષ્મા કાં તો શોષાય છે કે તંત્રમાંથી મુક્ત થાય છે. તંત્ર અને પરિસર વચ્ચેના અતિસૂક્ષ્મ તાપમાનના તફાવતના કારણે આમ થતું હોય છે.

સ્વાધ્યાય

12.1 એક મિનિટમાં 3.0 લિટરના દરથી પસાર થતા પાણીને ગિઝર 27 °C થી 77 °C સુધી ગરમ કરે છે. જો ગિઝર, ગૅસ બર્નર પર કાર્ય કરતું હોય અને બળતણ (combustion) ઉષ્મા 4.0×10^4 J/g હોય, તો બળતણના વપરાશનો દર કેટલો હશે ?

12.2 અચળ દબાણે રહેલા 2.0×10^{-2} kg નાઈટ્રોજન (ઓરડાના તાપમાને)નું તાપમાન 45 °C જેટલું વધારવા માટે કેટલી ઉષ્મા આપવી પડશે ? (N_2નો અણુભાર = 28 ; R = 8.3 J mol^{-1} K^{-1})

12.3 સમજાવો :

(a) T_1 અને T_2 તાપમાન ધરાવતા બે પદાર્થોને તાપીય સંપર્કમાં લાવતાં તેમનું સરેરાશ તાપમાન $(T_1 + T_2)/2$ હોવું જરૂરી નથી.

(b) રાસાયણિક કે ન્યુક્લિઅર પ્લાન્ટમાં રહેલા કુલન્ટ (એટલે કે પ્લાન્ટના જુદા જુદા ભાગને અતિશય ગરમ થતાં રોકે તેવું પ્રવાહી)ની વિશિષ્ટ ઉષ્મા વધુ હોવી જોઈએ.

(c) કાર ચલાવતી વખતે તેના ટાયરમાં દબાણ વધે છે.

(d) દરિયાકિનારે આવેલ બંદરનું (Harbour) વાતાવરણ સમાન અક્ષાંશ ધરાવતા જંગલમાં આવેલા શહેર કરતાં ગરમ (ઉષ્ણ) હોય છે.

12.4 ખસી શકે તેવો પિસ્ટન ધરાવતા એક નળાકાર પાત્રમાં પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે 3 મોલ હાઈડ્રોજન રહેલો છે. નળાકાર પાત્રની દીવાલો ઉષ્મા અવાહક પદાર્થની બનેલી છે અને પિસ્ટન પર રેતીનો ઢગલો કરીને અવાહક બનાવ્યો છે. જો વાયુને તેના કદ કરતાં અડધા કદ સુધી સંકોચિત કરવામાં આવે તો વાયુનું દબાણ કેટલા પ્રમાણમાં બદલાશે ?

12.5 એક વાયુને સંતુલિત અવસ્થા A થી સમોષ્મી રીતે સંતુલિત અવસ્થા B સુધી લઈ જવા માટે, તંત્ર પર થયેલ કાર્ય 22.3 J જેટલું છે. જો તંત્રને A થી B સ્થિતિ સુધી એવી રીતે લઈ જવામાં આવે કે જેથી તેમાં શોષાયેલી ચોખ્ખી ઉષ્મા 9.35 કૅલરી હોય, તો બીજા કિસ્સામાં તંત્ર વડે કેટલું ચોખ્ખું કાર્ય થયું હશે ? (1 કૅલરી = 4.19 J લો.)

12.6 એકસરખી ક્ષમતા ધરાવતાં બે નળાકાર પાત્રો A અને Bને એકબીજાં સાથે સ્ટૉપકૉક (બંધ કરી શકાય તેવા કૉક) વડે જોડેલા છે. Aમાં વાયુ પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે રહેલો છે. B સંપૂર્ણ રીતે ખાલી (evacuated) છે. આખું તંત્ર તાપીય રીતે અલિપ્ત (અલગ) કરેલું છે. સ્ટૉપકૉકને અચાનક ખોલવામાં આવે છે. નીચેનાના જવાબ આપો :

(a) A અને Bમાં અંતિમ દબાણ કેટલું હશે ?

(b) વાયુની આંતરિક ઊર્જામાં કેટલો ફેરફાર થયો હશે ?

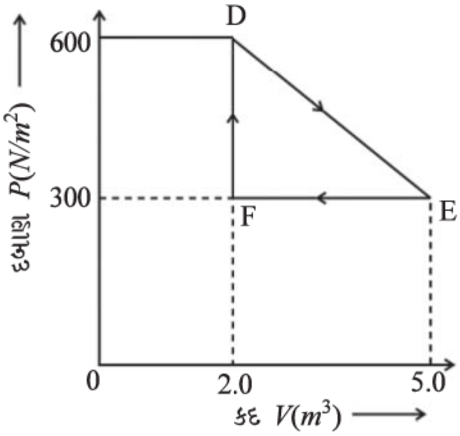
(c) વાયુના તાપમાનમાં કેટલો ફેરફાર થયો હશે ?

(d) શું તંત્રની વચ્ચેની અવસ્થાઓ (અંતિમ સંતુલિત અવસ્થામાં સ્થિર થતાં પહેલાં) તેના P - V - T સપાટી પર હશે ?

12.7 એક વરાળયંત્ર એક મિનિટમાં 5.4×10^8 J કાર્ય આપે છે અને તેના બોઇલરમાંથી એક મિનિટમાં 3.6×10^9 J ઉષ્મા પૂરી પાડે છે. એન્જિનની કાર્યક્ષમતા કેટલી હશે ? એક મિનિટમાં કેટલી ઉષ્મા વેડફાતી હશે ?

12.8 એક ઇલેક્ટ્રિક હીટર, તંત્રને 100 *W*ના દરથી ઉષ્મા પૂરી પાડે છે. જો તંત્ર એક સેકન્ડમાં 75 જૂલના દરથી કાર્ય કરતું હોય, તો તેની આંતરિક ઊર્જાનો વધવાનો દર કેટલો હશે ?

12.9 આકૃતિ 12.13માં દર્શાવ્યા મુજબ એક થરમૉડાયનેમિક તંત્રને તેની પ્રારંભિક અવસ્થાથી વચગાળાની (intermediate) અવસ્થા સુધી રેખીય પ્રક્રિયા દ્વારા લઈ જવામાં આવે છે.



આકૃતિ **12.13**

ત્યાર બાદ તેનું કદ E થી F સુધી સમદાબ પ્રક્રિયા દ્વારા ઘટાડીને મૂળ મૂલ્ય સુધી લાવવામાં આવે છે. વાયુ દ્વારા D થી Eથી F સુધીમાં થયેલ કુલ કાર્ય ગણો.

12.10 એક રેફ્રિજરેટરમાં રાખેલ ખોરાકને 9 °C તાપમાને સાચવવાનો છે. જો ઓરડાનું તાપમાન 36 °C હોય, તો પરફોર્મન્સ-ગુણાંક (કાર્ય સિદ્ધિ ગુણાંક) શોધો.

પ્રકરણ 13

ગતિવાદ (KINETIC THEORY)

13.1 પ્રસ્તાવના
13.2 દ્રવ્યનું આણ્વિક રૂપ
13.3 વાયુઓની વર્તણૂક
13.4 આદર્શ વાયુનો ગતિવાદ
13.5 ઊર્જાના સમવિભાજનનો નિયમ
13.6 વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા
13.7 સરેરાશ મુક્ત પથ
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાના સ્વાધ્યાય

13.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

1661માં બૉઇલે એક નિયમ શોધ્યો જેને તેનું નામ આપવામાં આવ્યું છે. વાયુઓ નાના પરમાણ્વીક કણોના બનેલા છે તેવું માનીને બૉઇલ, ન્યૂટન અને બીજા ઘણાએ વાયુઓની વર્તણૂક સમજાવવા પ્રયત્ન કર્યો હતો. ત્યાર બાદ 150 વર્ષ પછી સાચો અણુવાદ સ્થાપિત થયો. ગતિવાદમાં વાયુઓની વર્તણૂક, વાયુ એ ઝડપથી ગતિ કરતા પરમાણુઓ અને અણુઓનો બનેલો છે તેવા અનુમાનના આધારે સમજાવવામાં આવે છે. આ એટલા માટે શક્ય છે કે, પરમાણુઓ વચ્ચેનાં આંતરિક બળો, જે ઘન તથા પ્રવાહી માટે જરૂરી ટૂંકા અંતરનાં બળો છે, તે વાયુ માટે અવગણી શકાય તેટલા હોય છે. ઓગણીસમી સદીમાં મૅક્સવેલ, બોલ્ટ્ઝમેન અને બીજાઓએ ગતિવાદ વિકસાવ્યો હતો. તે નોંધપાત્ર રીતે સફળ રહ્યો છે. તે વાયુના દબાણ અને તાપમાનનું અર્થઘટન અણુઓના રૂપમાં આપે છે અને તેમાં વાયુના નિયમો અને ઍવોગેડ્રોનો અધિતર્ક આવે છે. તે ઘણા વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા યોગ્ય રીતે સમજાવે છે. તે વાયુઓના માપી શકાય તેવા ગુણધર્મો જેવા કે શ્યાનતા, વાહકતા, એકબીજામાં ભળવું (Diffusion) વગેરેને અણુઓના ગુણધર્મો સાથે સાંકળે છે, જેના પરથી અણુઓના કદ અને દળ વિશે અંદાજ મેળવી શકાય છે. આ પ્રકરણ ગતિવાદ વિશે પ્રાથમિક માહિતી આપે છે.

13.2 દ્રવ્યનું આણ્વિક રૂપ (MOLECULAR NATURE OF MATTER)

20મી સદીના મહાન વિજ્ઞાનીઓમાંના એક એવા રિચાર્ડ ફિનમૅન (Richard Feynman)ના મતે ''દ્રવ્ય (પદાર્થ) પરમાણુઓનું બનેલું છે'' એ શોધ અત્યંત મહત્ત્વની છે. જો માનવ સમજદારીપૂર્વક નહિ વર્તે તો માનવજાતનો કદાચ જડમૂળથી નાશ થઈ જશે (ન્યુક્લિઅર હુમલાઓના કારણે) કે પછી વિનાશ થશે (વાતાવરણની આફતોના કારણે). જો આવું થાય અને વિજ્ઞાનનું બધું જ જ્ઞાન નાશ પામે તો ફિનમૅનના મતે 'પરમાણુવાદ' વિશેની માહિતી તો વિશ્વમાં આવનારી પેઢી સુધી પહોંચાડવી જ જોઈએ. પરમાણુ અધિતર્ક (Hypothesis) આ છે : દરેક વસ્તુઓ પરમાણુઓની બનેલી છે. સૂક્ષ્મ કણો અવકાશમાં નિરંતર ગતિ કરે છે તથા જ્યારે એકબીજાથી થોડા અંતરે હોય ત્યારે આકર્ષે છે, પરંતુ ખૂબ નજીક જાય ત્યારે એકબીજાને અપાકર્ષે છે.

ઘણી જગ્યાએ અને ઘણી સભ્યતાઓમાં એવી માન્યતા હતી કે, દ્રવ્ય સતત ન પણ હોઈ શકે. ભારતમાં કણાદ અને ગ્રીસમાં ડૅમોક્રિટસે એ દર્શાવ્યું હતું કે, દ્રવ્યનું બંધારણ અવિભાજ્ય છે. વૈજ્ઞાનિક પદ 'પરમાણુ વાદ' માટે જહોન ડાલ્ટન (John Dalton)ને યશ આપવામાં આવે છે. એમણે, મૂળ તત્ત્વો ચોક્કસ અને અલગ અલગ

પ્રાચીન ભારત અને ગ્રીસના પરમાણુ અધિતર્ક (Atomic Hypothesis in Ancient India and Greece)

આજનું વિજ્ઞાન ભલે ડાલ્ટનને અણુવાદ આપવા બદલ યશ (Credit) આપતું હોય, પરંતુ તેના બહુ પહેલાં પ્રાચીન ભારત અને ગ્રીસના જ્ઞાનીજનોએ પરમાણુ અને અણુઓ વિશે અનુમાન કરેલ. (ઈ.સ. પૂર્વે છઠ્ઠી સદીમાં) ભારતના કન્નડમાં આપેલ વૈશેસિકા શાળામાં ભણાવવામાં આવતું હતું તે મુજબ પરમાણુ વિશેની માહિતી ઘણી ગહન રીતે આપવામાં આવી છે. પરમાણુઓ શાશ્વત, ટુકડા ન કરી શકાય તેવા (અતૂટ), અતિસૂક્ષ્મ અને દ્રવ્યનો અમૂલ્ય હિસ્સો માનવામાં આવતા હતા. એવું માનવામાં આવતું હતું કે જો દ્રવ્યને સતત તોડતા રહીએ તો મેરુ પર્વત અને રાઈના દાણા વચ્ચે કોઈ ફરક ન રહે. ચાર પ્રકારના અણુઓ (**પરમાણુ**-નાનામાં નાના કણ માટેનો સંસ્કૃત શબ્દ)ની કલ્પના કરવામાં આવી હતી તે ભૂમિ (જમીન), અપ (જળ), તેજસ (અગ્નિ) અને વાયુ (હવા) જેમને ચોક્કસ દળ અને બીજા ગુણધર્મો હતા. આકાશ (અવકાશ)ને પરમાણ્વીક બંધારણ નથી અને તે સતત તથા જડ (અચેતન) છે તેમ માનવામાં આવતું હતું. પરમાણુઓ ભેગા મળીને જુદા જુદા અણુની રચના કરે છે. (દા.ત., બે પરમાણુઓ ભેગા મળીને દ્વિપરમાણ્વીક અણુ દ્વિણુક, ત્રણ પરમાણુઓ ભેગા મળીને ત્ર્યાણુક કે ત્રિપરમાણ્વીક અણુ બનાવે), તેમના ગુણધર્મો તેમના મૂળભૂત પરમાણુઓની પ્રકૃતિ અને તેમના ગુણોત્તર પર આધાર રાખે છે. પરમાણુઓના પરિમાણ પણ અનુમાન દ્વારા કે આપણે જાણતા નથી તેવી પદ્ધતિઓથી શોધવામાં આવ્યા હતા. શોધેલ આ મૂલ્યો જુદાં હતાં. લલિતા વિસ્તાર, ઈ.સ. પૂર્વે બીજી સદીમાં લખાયેલા જાણીતા બુદ્ધના જીવનચરિત્રમાં અનુમાન કરેલ મૂલ્ય અત્યારના પરમાણુના કદ, 10^{-10}mના ક્રમને મળતું આવે છે.

જૂના ગ્રીસમાં ડૅમોક્રિટસ્ (ઈ.સ. પૂર્વે ચોથી સદી) તેના પરમાણુવાદ માટે જાણીતો છે. ગ્રીકમાં 'પરમાણુ' શબ્દનો અર્થ 'તોડી ન શકાય તેવું' છે. તેણે દર્શાવ્યા મુજબ અણુઓ એકબીજાથી ફક્ત ભૌતિક રીતે આકાર, કદ અને બીજા ગુણધર્મોમાં જુદા છે. જેના પરિણામે તેમના સંયોજન વડે બનતા પદાર્થોના ગુણધર્મો પણ જુદા છે. પાણીના પરમાણુઓ લીસા, ગોળ અને એકબીજામાં 'ખૂંપે' (Hook) એવા ન હોવાથી પ્રવાહી/પાણી સહેલાઈથી વહે છે. જમીન (પૃથ્વી)ના પરમાણુઓ ખરબચડા અને ખાંચવાળા હોવાથી તે એકબીજાને જકડી રાખે છે અને કઠણ પદાર્થ બનાવે છે. અગ્નિના પરમાણુઓ કાંટાવાળા હતા અને તેથી તે દુઃખદાયક રીતે દઝાડે છે. આ આકર્ષક ખ્યાલો, તેમની કુશળતા હોવા છતાં, તેમાં આગળ ઉત્ક્રાંતિ ન થઈ. કદાચ તે કાલ્પનિક માન્યતાઓ હતી અને આ ખ્યાલોની ખરાઈ કરાઈ ન હતી કે પ્રાયોગિક રીતે ચકાસીને સુધારવામાં આવ્યા ન હતા. જે અર્વાચિન વિજ્ઞાનની ગુણવત્તાનો પાયો છે.

માત્રામાં ભેગા થઈને કેવી રીતે સંયોજન બનાવે છે તે સમજાવતો પરમાણુવાદ આપ્યો. પહેલો નિયમ દર્શાવે છે કે આપેલ સંયોજનમાં રહેલાં તત્ત્વોનું દળ ચોક્કસ પ્રમાણમાં હોય છે. બીજો નિયમ દર્શાવે છે કે જ્યારે બે તત્ત્વો ભેગા થઈને એક કરતાં વધારે સંયોજનો બનાવે ત્યારે કોઈ એક તત્ત્વના ચોક્કસ દળ માટે, બીજા તત્ત્વોના દળ નાના પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણોત્તરમાં હોય છે.

આ નિયમો સમજાવવા ડાલ્ટને, આશરે 200 વર્ષ પહેલાં, સૂચવ્યું (Suggested) કે કોઈ સંયોજનના નાનામાં નાના કણો પરમાણુઓ છે. એક તત્ત્વના પરમાણુઓ એક સમાન (Indentical) હોય છે, પરંતુ તે બીજાં તત્ત્વો કરતાં જુદા હોય છે. દરેક તત્ત્વના થોડી (નાની) સંખ્યાના પરમાણુઓ ભેગા મળીને (સંયોજાઈને) સંયોજનનો અણુ બનાવે છે. ઓગણીસમી સદીમાં આપેલ ગૅલ્યુસેકનો નિયમ દર્શાવે છે કે, જ્યારે વાયુઓ રાસાયણિક પ્રક્રિયા વડે સંયોજાઈને બીજો વાયુ બનાવે ત્યારે, તેમના કદનો ગુણોત્તર નાની પરંતુ ચોક્કસ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં હોય છે. ઍવોગેડ્રોનો નિયમ દર્શાવે છે કે, સમાન તાપમાન અને દબાણે રહેલા, એકસરખું કદ ધરાવતા, દરેક વાયુમાં અણુઓની સંખ્યા એકસરખી હોય છે. જ્યારે ઍવોગેડ્રોનો નિયમ ડાલ્ટનના સિદ્ધાંત સાથે મળીને ગેલ્યુસેકનો નિયમ સમજાવે છે. અહીં તત્ત્વો મોટા ભાગે અણુઓના રૂપમાં હોવાથી, ડાલ્ટનના પરમાણુવાદને ક્યારેક દ્રવ્ય માટેનો અણુવાદ પણ કહે છે. હવે આ સિદ્ધાંતને વિજ્ઞાનીઓ દ્વારા માન્યતા પણ મળેલ છે. પરંતુ ઓગણીસમી સદીના અંત સુધી ઘણા પ્રખ્યાત વિજ્ઞાનીઓ પરમાણુવાદને સાચો માનતા ન હતા !

ઘણાંબધાં અવલોકનો બાદ, આજના સમયમાં આપણે જાણીએ છીએ કે અણુઓ (જે એક કે વધુ પરમાણુઓના બનેલા છે), સંયોજાઈને દ્રવ્ય બનાવે છે. ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપ અને સ્કેનિંગ ટનલિંગ માઇક્રોસ્કોપ (Scanning Tunneling Microscope)ની મદદથી આપણે તેમને જોઈ પણ શકીએ છીએ. પરમાણુનું પરિમાણ લગભગ એન્ગસ્ટ્રોમ (10^{-10} m) જેટલું હોય છે. ઘન પદાર્થો, જે ખૂબ ગીચતા ધરાવે છે (Tightly Packed), તેમાં પરમાણુઓ વચ્ચેના અંતર અમુક એન્ગસ્ટ્રોમ (2 Å) જેટલા જ હોય છે. પ્રવાહીઓમાં પણ પરમાણુઓ વચ્ચેનું અંતર લગભગ આ ક્રમનું જ હોય છે. ઘન પદાર્થોની જેમ પ્રવાહીમાં પરમાણુઓ દૃઢ રીતે બંધાયેલ હોતા નથી, પણ તે આસપાસમાં (આજુબાજુમાં) ગતિ કરી શકે છે. આ કારણથી પ્રવાહી વહી શકે છે. વાયુઓમાં પરમાણુઓ વચ્ચેના અંતર દસ એન્ગસ્ટ્રોમના ક્રમના હોય છે. અથડામણ પહેલાં અણુએ કાપેલ સરેરાશ અંતરને **સરેરાશ મુક્ત પથ (Mean Free Path)** કહે છે. વાયુઓમાં આ સરેરાશ મુક્ત પથ હજારો એન્ગસ્ટ્રોમના ક્રમનો હોય છે. વાયુમાં પરમાણુઓ વધારે મુક્ત હોય છે અને (એકબીજાને) અથડાયા વગર લાંબું અંતર કાપી શકે છે. જો બંધ પાત્રમાં ન હોય તો તેઓ વિખેરાઈ (disperse) જાય છે. ઘન અને પ્રવાહીઓમાં અણુઓ એકબીજાની નજીક હોવાથી આંતર અણુ બળોનું મહત્ત્વ

વધી જાય છે. લાંબા અંતર માટે આ બળ આકર્ષી અને ટૂંકા અંતર માટે અપાકર્ષી હોય છે. પરમાણુઓ અમુક ઍન્ગસ્ટ્રોમના અંતરે હોય ત્યારે (એકબીજાને) આકર્ષે છે પરંતુ જ્યારે તેઓ નજીક આવે ત્યારે અપાકર્ષે છે. વાયુ સ્થિર છે તેવું વિધાન ગેરવ્યાજબી છે. વાયુ ખૂબ જ ક્રિયાશીલ છે અને તેની ગતિશીલતા સંતુલિત હોય છે. ગતિકીય સંતુલનમાં, અણુઓ અથડાય છે અને અથડામણ દરમિયાન તેમની ઝડપ બદલાય છે. ફક્ત સરેરાશ ગુણધર્મો જ અચળ રહે છે.

પરમાણુવાદ આપણા સવાલોનો અંત નથી, પરંતુ તે તો શરૂઆત છે. આપણે હવે જાણીએ છીએ કે, પરમાણુઓ ભાગ ન પાડી શકાય તેવા કે અવિઘટનીય નથી. તે ન્યુક્લિયસ અને ઇલેક્ટ્રૉનના બનેલા છે. ન્યુક્લિયસ પોતે પણ ન્યૂટ્રૉન અને પ્રોટોનનું બનેલું છે. પ્રોટોન અને ન્યૂટ્રૉન પણ ક્વાર્કસના બનેલા છે. આ ઉપરાંત ક્વાર્ક્સ સુધી આવીને વાત અટકતી નથી. આગળ જતાં દોરી જેવા અવિઘટનીય અંશ (Entities) હોઈ શકે. કુદરત પાસે આપણા માટે ઘણા આશ્ચર્ય છે, પણ સત્ય (તથ્ય) માટેની શોધ મોટે ભાગે આનંદદાયી હોય છે તથા શોધ હંમેશાં સુંદર હોય છે. આ પ્રકરણમાં, આપણે ફક્ત વાયુઓની (અને થોડા અંશે ઘન પદાર્થોની) સતત ગતિ કરતા અણુઓના સમૂહના રૂપમાં વર્તણૂક સમજવા પૂરતું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીશું.

13.3 વાયુઓની વર્તણૂક (BEHAVIOUR OF GASES)

ઘન અને પ્રવાહીની સરખામણીમાં વાયુઓની વર્તણૂક સમજવી સહેલી છે. આનું મુખ્ય કારણ એ છે કે વાયુઓમાં અણુઓ એકબીજાથી દૂર હોય છે અને તેમની વચ્ચેની આંતરક્રિયાઓ, બે અણુઓ અથડાય નહિ ત્યાં સુધી, નહિવત હોય છે. તેઓ પ્રવાહી (કે ઘન) અવસ્થામાં આવે, તે પહેલાંનાં નીચા દબાણ અને ઊંચાં તાપમાને, આપેલ વાયુના નમૂના માટે, તેમના દબાણ, તાપમાન અને કદને સાંકળતા સમીકરણ (જુઓ પ્રકરણ 11).

$$PV = KT \tag{13.1}$$

નું સમાધાન કરે છે.

અહીં, તાપમાન T કેલ્વિન (અથવા નિરપેક્ષ) માપક્રમમાં છે. વાયુના આપેલ નમૂના માટે K અચળ હોય છે પરંતુ વાયુના કદ સાથે બદલાય છે. જો આપણે પરમાણુઓ કે અણુઓ (ને ધ્યાનમાં લઈએ)ના સંદર્ભમાં વિચારીએ તો K, આપેલ નમૂના માટે અણુઓની સંખ્યા N (ધારો કે)ના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આપણે લખી શકીએ કે $K = N\,k$. આ જોતાં સમજાય છે કે બધા જ વાયુઓ માટે k એક સમાન જ છે. તેને બૉલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક કહે છે અને k_B વડે દર્શાવાય છે. અહીં,

$$\frac{P_1V_1}{N_1T_1} = \frac{P_2V_2}{N_2T_2} = \text{અચળ} = k_B \tag{13.2}$$

હોવાથી, જો P, V અને T સમાન હોય, તો બધા વાયુઓ માટે N પણ સમાન જ હોય. આ ઍવોગેડ્રોનો અધિતર્ક છે, કે નિયત તાપમાન અને દબાણે રહેલા બધા જ (દરેક) વાયુઓ માટે એકમ કદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા એકસરખી (સમાન) હોય છે. દરેક વાયુ માટે 22.4 લિટરમાં અણુઓની સંખ્યા 6.02×10^{23} હોય છે. જેને ઍવોગેડ્રો અંક કહે છે અને તે N_A સંજ્ઞા વડે દર્શાવાય છે. 22.4 લિટરના દરેક વાયુનું આણ્વીય દળ STP એ (પ્રમાણભૂત તાપમાન 273 K અને દબાણ 1 atm) ગ્રામમાં તેના અણુભાર જેટલું હોય છે. પદાર્થના આટલા જથ્થાને એક મોલ (વધુ સ્પષ્ટ વ્યાખ્યા માટે પ્રકરણ 2 જુઓ.) કહે છે. ઍવોગેડ્રોએ રાસાયણિક પ્રક્રિયાઓ પરથી નિયત તાપમાન અને દબાણે એક સમાન કદ ધરાવતા વાયુઓ માટે આ સંખ્યા એક સમાન હશે તેમ માન્યું હતું. ગતિવાદ આ અધિતર્કને અનુમોદન આપે છે.

આદર્શ વાયુ સમીકરણ આ રીતે લખી શકાય.

$$PV = \mu\, RT \tag{13.3}$$

જ્યાં, μ એ મોલની સંખ્યા અને $R = N_A\, k_B$ એ સાર્વત્રિક અચળાંક છે. તાપમાન T એ નિરપેક્ષ તાપમાન છે. નિરપેક્ષ

જ્હોન ડાલ્ટન (John Dalton) (1766-1844)

તે અંગ્રેજ રસાયણશાસ્ત્રી હતો. જ્યારે જુદા જુદા પ્રકારના પરમાણુઓ સંયોજાય ત્યારે તેઓ અમુક સામાન્ય નિયમોનું પાલન કરે છે. ડાલ્ટનનો પરમાણુવાદ આ સામાન્ય નિયમો સમજાવે છે. તેમણે રંગઅંધત્વ માટેનો સિદ્ધાંત પણ આપ્યો હતો.

આમેડો ઍવોગેડ્રો (Amedo Avogadro) (1776-1856)

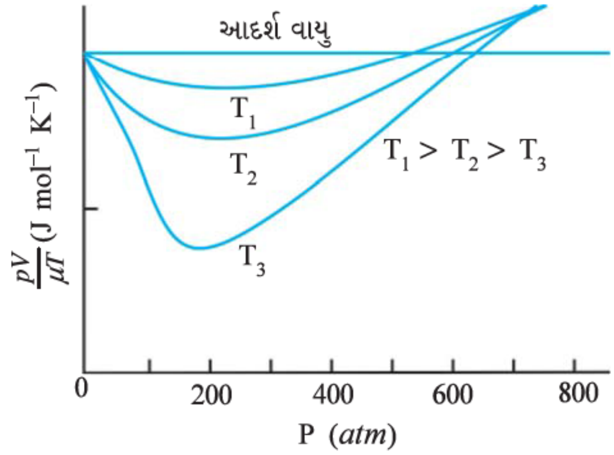
તેમણે એક અગત્યનું અનુમાન કર્યું કે સમાન તાપમાન અને દબાણે સમાન કદમાં રહેલા વાયુઓના અણુઓની સંખ્યા સમાન હોય છે. આથી, જુદા જુદા વાયુઓના મિશ્રણ (સંયોજન) સમજવામાં મદદ મળી રહી. એને હવે ઍવોગેડ્રોનો સિદ્ધાંત (નિયમ) કહે છે. તેમણે એ પણ દર્શાવ્યું કે હાઇડ્રોજન, ઑક્સિજન અને નાઇટ્રોજન જેવા વાયુઓના નાનાંમાં નાનાં ઘટકો પરમાણુઓ નહિ પરંતુ દ્વિપરમાણ્વીક અણુઓ છે.

તાપમાનને કેલ્વિનમાં દર્શાવીએ તો, $R = 8.314$ J mol^{-1} K^{-1}. અહીં,

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{N}{N_A} \qquad (13.4)$$

જ્યાં, M એ N અણુઓ ધરાવતા વાયુનું દળ, M_0 મોલર દળ અને N_A ઍવોગેડ્રોનો અચળાંક છે. સમીકરણો (13.4) અને (13.3) પરથી લખી શકાય કે,

$PV = k_B NT$ અથવા $P = k_B nT$



આકૃતિ 13.1 *નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાને વાસ્તવિક વાયુઓની વર્તણૂક આદર્શ વાયુ જેવી હોય છે.*

જ્યાં, n એ સંખ્યા ઘનતા, એટલે કે એકમ કદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા છે. અગાઉ દર્શાવ્યું તેમ k_B એ બૉલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક છે. SI એકમ પદ્ધતિમાં તેનું મૂલ્ય 1.38×10^{-23} J K^{-1} છે.

સમીકરણ (13.3)નું બીજું અગત્યનું સ્વરૂપ

$$P = \frac{\rho RT}{M_0} \qquad (13.5)$$

છે, જ્યાં, ρ એ વાયુની દળ ઘનતા છે.

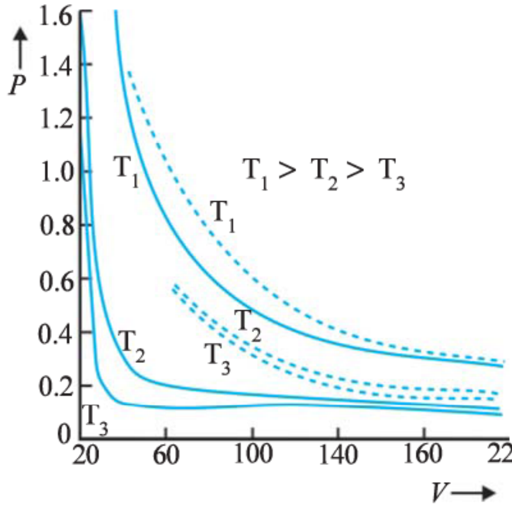
જે વાયુ દરેક દબાણ અને તાપમાને સમીકરણ (13.3)નું સંપૂર્ણ પાલન કરે તેને **આદર્શ વાયુ (Ideal Gas)** કહે છે. આદર્શ વાયુ એ વાયુ માટેનો એક સૈદ્ધાંતિક નમૂનો છે. વાસ્તવમાં, કોઈ પણ વાસ્તવિક વાયુ આદર્શ હોતો નથી. આકૃતિ 13.1માં ત્રણ તાપમાન માટે વાસ્તવિક વાયુનું આદર્શ વાયુથી જુદાપણું (Departure) દર્શાવ્યું છે. એ નોંધો કે નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાને બધા જ વક્રો આદર્શ વાયુ વર્તણૂક તરફ દોરી જાય છે.

નીચા દબાણ અથવા ઊંચા તાપમાને અણુઓ એકબીજાથી દૂર હોય છે અને અણુઓ વચ્ચેની આંતરક્રિયા નહિવત હોય છે. આંતરક્રિયાની ગેરહાજરીમાં વાયુ આદર્શ રીતે વર્તે છે.

જો આપણે સમીકરણ (13.3)માં μ અને T અચળ રાખીએ, તો આપણને

$$PV = \text{અચળ} \qquad (13.6)$$

મળે. એટલે કે, તાપમાન અચળ રાખીએ તો, આપેલ દળના વાયુનું દબાણ તેના કદના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં બદલાય છે. આ જાણીતો **બૉઈલનો નિયમ** છે. આકૃતિ 13.2માં પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ P–V વક્રો અને બૉઇલના નિયમ વડે મેળવેલ સૈદ્ધાંતિક વક્રો વચ્ચેની સરખામણી દર્શાવી છે. અહીં, ફરીથી તમે ઊંચા તાપમાન અને નીચા દબાણે સારી સંમતિ જોઈ શકો છો. ત્યાર બાદ, જો તમે P અચળ રાખો તો, સમીકરણ 13.1 મુજબ $V \propto T$, એટલે કે, નિયત દબાણે વાયુનું કદ તેના નિરપેક્ષ તાપમાન Tના સમપ્રમાણમાં **(ચાર્લ્સનો નિયમ Charles' Law)** હોય છે. જુઓ આકૃતિ 13.3.



આકૃતિ 13.2 *ત્રણ તાપમાન માટે બાષ્પ (વરાળ)ના પ્રાયોગિક P–V વક્રો (સળંગ લીટી) અને બૉઇલના નિયમ (ત્રુટક લીટી)ની સરખામણી. P એ 22 atmના એકમ (Unit)માં અને V એ 0.09 litreના એકમમાં છે.*

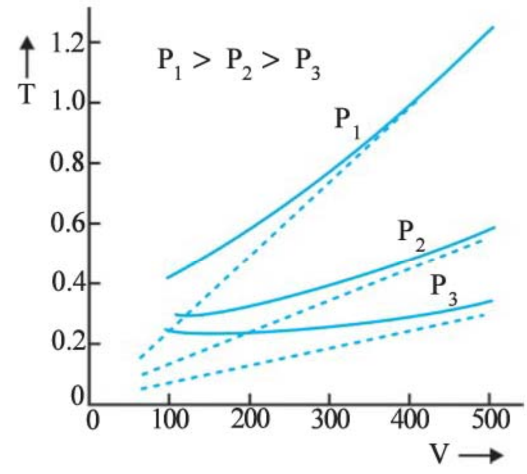
અંતમાં, આંતરક્રિયા ન કરે તેવા આદર્શ વાયુઓનું મિશ્રણ ધારો : વાયુ 1ના μ_1 મોલ, વાયુ 2ના μ_2 મોલ વગેરે, V કદના પાત્રમાં T તાપમાન અને P દબાણે રહેલા છે. આ મિશ્રણ માટે વાયુનું અવસ્થા સમીકરણ (Equation of State) આ મુજબ છે :

$$PV = (\mu_1 + \mu_2 + \ldots)\, RT \qquad (13.7)$$

$$\text{આથી, } P = \mu_1 \frac{RT}{V} + \mu_2 \frac{RT}{V} + \ldots \qquad (13.8)$$

$$= P_1 + P_2 + \ldots \qquad (13.9)$$

એ સ્પષ્ટ છે કે $P_1 = \mu_1$ RT/V એ, જ્યારે બીજા વાયુઓ હાજર ન હોય ત્યારે, આ જ કદ અને તાપમાનની પરિસ્થિતિઓમાં, વાયુ 1 વડે લાગતું દબાણ છે. આને વાયુનું આંશિક દબાણ (Partial Pressure) કહે છે. આમ, આદર્શ વાયુઓના મિશ્રણનું કુલ દબાણ, તે વાયુઓના આંશિક દબાણના સરવાળા જેટલું હોય છે. આ ડાલ્ટનનો આંશિક દબાણનો નિયમ છે.



આકૃતિ 13.3 *ત્રણ દબાણ માટે CO_2ના પ્રાયોગિક T–V વક્રો (સળંગ લીટી) અને ચાર્લ્સના નિયમ વડે મેળવેલ વક્રો (ત્રુટક લીટી). Tનું મૂલ્ય 300 Kના એકમમાં અને Vનું મૂલ્ય 0.13 litresના એકમમાં છે.*

હવે આપણે થોડાં એવાં ઉદાહરણો જોઈએ કે જે આપણને અણુઓ વડે ઘેરાયેલ કદ અને એક અણુના કદ વિશે માહિતી આપે.

> **ઉદાહરણ 13.1** પાણીની ઘનતા 1000 kg m^{-3} છે. 100° C તાપમાને અને 1 atm દબાણે પાણીની બાષ્પ ઘનતા 0.6 kg m^{-3} છે. અણુના કદ અને તેમની કુલ સંખ્યાના ગુણાકારને આણ્વિક કદ કહે છે. ઉપર આપેલ તાપમાન અને દબાણની પરિસ્થિતિમાં રહેલ પાણીની બાષ્પ માટે આણ્વિક કદ અને તેણે ઘેરાયેલ કુલ કદનો ગુણોત્તર ગણો.

ઉકેલ પાણીના અણુઓના આપેલ દળ માટે, કદ વધુ હોય તો ઘનતા ઓછી હોય છે. આથી બાષ્પનું કદ 1000/0.6 = $1/(6 \times 10^{-4})$ ગણું મોટું હોય. જો પાણીના જથ્થાની અને પાણીના અણુઓની ઘનતા સરખી હોય, તો પ્રવાહી સ્વરૂપમાં આણ્વિક કદ અને કુલ કદનો ગુણોત્તર 1 હોય છે. બાષ્પ રૂપમાં કદ વધે છે, આથી કદનો ગુણોત્તર તેટલા એટલે કે 6×10^{-4} પ્રમાણમાં ઓછો હોય છે. ◀

> **ઉદાહરણ 13.2** ઉદાહરણ 13.1માં આપેલ માહિતી પરથી પાણીના અણુનું કદ મેળવો.

ઉકેલ પ્રવાહી અવસ્થા (કે ઘન)માં, પાણીના અણુઓ ઘણાં નજીક ગોઠવાયેલા હોય છે. આથી પાણીના અણુની ઘનતા લગભગ પાણીના જથ્થાની ઘનતા = 1000 kg m^{-3} જેટલી સમજી શકાય. પાણીના એક અણુનું કદ મેળવવા માટે, આપણે પાણીના એક અણુનું દળ જાણવું પડે. આપણે જાણીએ છીએ કે, 1 મોલ પાણીનું દળ આશરે (2 + 16)g = 18 g = 0.018 kg જેટલું હોય છે.

પરંતુ, 1 મોલમાં લગભગ 6×10^{23} અણુઓ (ઍવોગેડ્રો નંબર) હોવાથી, પાણીના એક અણુનું દળ $(0.018)/(6 \times 10^{23})$ kg = 3×10^{-26} kg. આથી, પાણીના અણુનું લગભગ કદ નીચેની રીતે મેળવી શકાય :

પાણીના અણુનું કદ

$= (3 \times 10^{-26}\ \text{kg}) / (1000\ \text{kg m}^{-3})$

$= 3 \times 10^{-29}\ \text{m}^3$

$= (4 / 3)\ \pi$ (ત્રિજ્યા)^3

આથી, ત્રિજ્યા $\simeq 2 \times 10^{-10}$ m = 2 Å ◀

> **ઉદાહરણ 13.3** પાણીના અણુઓ વચ્ચેનું (આંતર આણ્વિક) સરેરાશ અંતર કેટલું છે ? ઉદાહરણો 13.1 અને 13.2ની માહિતીનો ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ વરાળ (બાષ્પ) સ્વરૂપમાં રહેલ આપેલ દળના પાણીનું કદ તેટલા જ દળના પાણીના પ્રવાહી સ્વરૂપ કરતાં 1.67×10^3 ગણું હોય છે (ઉદાહરણ 13.1). તેટલા જ પ્રમાણમાં કદનો વધારો પાણીના દરેક અણુને મળી રહે છે. જ્યારે કદ 10^3 ગણું વધે ત્યારે ત્રિજ્યા $\propto V^{1/3}$ એટલે કે 10 ગણી વધે છે. એટલે કે 10 × 2 Å = 20 Å. આથી, સરેરાશ અંતર 2 × 20 = 40 Å જેટલું છે. ◀

> **ઉદાહરણ 13.4** એક પાત્રમાં બે અક્રિયાશીલ વાયુઓ રહેલા છે. નિયૉન (એક પરમાણ્વિક) અને ઑક્સિજન (દ્વિ-પરમાણ્વિક). તેમના આંશિક દબાણનો ગુણોત્તર 3 : 2 છે. તો, (i) અણુઓની સંખ્યા, અને (ii) પાત્રમાં નિયૉન અને ઑક્સિજનની ઘનતાનો ગુણોત્તર મેળવો. નિયૉનનું પરમાણુ દળ Ne = 20.2 u., ઑક્સિજનનું અણુ દળ O_2 = 32.0 u.

ઉકેલ વાયુના મિશ્રણનું આંશિક દબાણ, એટલા જ કદ અને તાપમાને પાત્રને તે કોઈ એક વાયુથી ભરેલો હોય ત્યારના વાયુ - દબાણ જેટલું હોય છે(અક્રિયાશીલ વાયુઓના મિશ્રણનું કુલ દબાણ તેના દરેક વાયુઓના આંશિક દબાણના સરવાળા જેટલું હોય છે).દરેક વાયુ (આદર્શ ધારેલ છે),વાયુના નિયમનું પાલન કરે છે. બંને વાયુઓ માટે V અને T એક જ હોવાથી, $P_1V = \mu_1 RT$ અને $P_2V = \mu_2 RT$ તેથી $(P_1/P_2) = (\mu_1/\mu_2)$. અહીંયાં 1 અને 2 નિયૉન અને ઑક્સિજન દર્શાવે છે. $(P_1/P_2) = (3/2)$ (આપેલ છે), આથી $(\mu_1/\mu_2) = 3/2$.

(i) વ્યાખ્યા મુજબ $\mu_1 = (N_1/N_A)$ અને $\mu_2 = (N_2/N_A)$, જ્યાં N_1 અને N_2 એ 1 અને 2ના અણુઓની સંખ્યા છે અને N_A એ ઍવોગેડ્રો અંક (સંખ્યા) છે. આથી, $(N_1/N_2) = (\mu_1/\mu_2) = 3/2$.

(ii) આપણે $\mu_1 = (m_1/M_1)$ અને $\mu_2 = (m_2/M_2)$ પણ લખી શકીએ, જ્યાં m_1 અને m_2 એ 1 અને 2ના દળ છે; અને M_1 અને M_2 તેમના આણ્વિક દળો છે. (બંને m_1 અને M_1; તથા m_2 અને M_2 સમાન એકમોમાં દર્શાવવા જોઈએ). જો ρ_1 અને ρ_2 અનુક્રમે 1 અને 2ની દળ ઘનતા હોય તો,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1/V}{m_2/V} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{20.2}{32.0} = 0.947$$ ◀

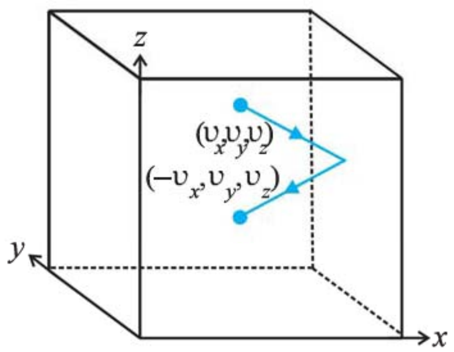
13.4 આદર્શ વાયુનો ગતિવાદ (KINETIC THEORY OF IDEAL GAS)

વાયુનો ગતિવાદ દ્રવ્યના અણુ સ્વરૂપ પર આધારિત છે. આપેલ જથ્થાનો વાયુ એ મોટી સંખ્યાનો (લગભગ ઍવોગેડ્રો અંકના ક્રમનો) અણુ સમૂહ છે, જે સતત અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરતા હોય છે. સામાન્ય દબાણ અને તાપમાને, અણુઓ વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર, અણુના સામાન્યતઃ પરિમાણ (2 Å)ના કરતાં 10 ગણું કે તેથી વધુ હોય છે. આથી અણુઓ વચ્ચેની આંતરક્રિયા નહિવત હોય છે અને આપણે એવું માની શકીએ કે તેઓ ન્યૂટનના પહેલા નિયમ મુજબ મુક્ત રીતે સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે. આમ છતાં, ઘણી વાર તેઓ એકબીજાની નજીક આવે છે આંતર આણ્વિક બળો અનુભવે છે અને તેમના વેગ બદલાય છે. આવી આંતરક્રિયાઓ સંઘાત (અથડામણ) કહેવાય છે. અણુઓ એકબીજા સાથે અથવા દીવાલો સાથે અવિરત સંઘાત અનુભવતા હોય છે અને તેમના વેગ બદલાતા રહે છે. આ અથડામણોને સ્થિતિસ્થાપક ગણી શકાય. ગતિવાદ પરથી આપણે વાયુના દબાણ માટેનું સમીકરણ તારવી શકીએ.

આપણે એવું માનીને શરૂ કરીશું કે વાયુના અણુઓ અવિરત અસ્તવ્યસ્ત ગતિમાં છે તથા એકબીજા સાથે અને પાત્રની દિવાલો સાથે સંઘાતો અનુભવે છે. અણુઓ વચ્ચેની આંતરિક અથડામણો અથવા અણુઓ અને દીવાલો વચ્ચેની અથડામણો સ્થિતિસ્થાપક છે. આનો મતલબ એ કે કુલ ગતિઊર્જાનું સંરક્ષણ થાય છે. હંમેશની જેમ કુલ વેગમાનનું સંરક્ષણ થાય છે.

13.4.1 આદર્શ વાયુનું દબાણ (Pressure of an Ideal Gas)

ધારો કે એક વાયુ l એકમ જેટલી બાજુઓ ધરાવતા સમઘનમાં ભરેલો છે. આકૃતિ 13.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમઘનની બાજુઓને સમાંતર અક્ષો લો. $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ વેગ ધરાવતો એક અણુ yz સમતલને સમાંતર રહેલી સમતલ દીવાલના



આકૃતિ 13.4 *પાત્રની દીવાલ સાથે વાયુના અણુનો સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત*

$A(=l^2)$ ક્ષેત્રફળને અથડાય છે. અથડામણ સ્થિતિસ્થાપક હોવાથી, અણુ તેટલા જ વેગથી પાછો પડે છે. અથડામણમાં તેના વેગના y અને z ઘટકો બદલાતાં નથી, પરંતુ x-ઘટક તેની સંજ્ઞા (દિશા) ઊલટાવે છે. એટલે કે, અથડામણ બાદ વેગ $(-\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ છે. અણુના વેગમાનમાં થતો ફેરફાર : $-m\upsilon_x - (m\upsilon_x) = -2m\upsilon_x$. વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમ અનુસાર, અથડામણ દ્વારા દીવાલને મળતું વેગમાન $= 2m\upsilon_x$.

દીવાલ પર લાગતું બળ (અને દબાણ) મેળવવા, આપણે એકમ સમયમાં દીવાલને મળતું વેગમાન શોધવું પડે. Δt જેટલા સૂક્ષ્મ સમયમાં, x-દિશામાંના ઘટક υ_x જેટલો વેગ ધરાવતો અણુ દીવાલથી $\upsilon_x \Delta t$ જેટલા અંતર સુધીમાં હશે તો દીવાલને અથડાશે. એટલે કે, $A\upsilon_x\Delta t$ કદમાં રહેલા બધા અણુઓ જ Δt સમયમાં દીવાલને અથડાઈ શકે. પરંતુ સરેરાશ રીતે, આમાંના અડધા દીવાલ તરફ અને બાકીના અડધા દીવાલથી દૂર તરફ ગતિ કરતા હોય છે. આમ, દીવાલને Δt સમયમાં અથડાતા $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ વેગ ધરાવતા અણુઓની સંખ્યા $\frac{1}{2}A\upsilon_x\Delta t\ n$ છે. જ્યાં, n એ એકમ કદમાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા છે. આ અણુઓ વડે Δt સમયમાં દીવાલને મળતું વેગમાન :

$$Q = (2m\upsilon_x)(\tfrac{1}{2}\ n\ A\upsilon_x\ \Delta t) \qquad (13.10)$$

દીવાલ પર લાગતું બળ એ વેગમાનના ફેરફારનો દર $Q/\Delta t$ છે અને દબાણ એ એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ બળ છે :

$$P = Q\ /\ (A\ \Delta t) = n\ m\ \upsilon_x^{\ 2} \qquad (13.11)$$

હકીકતમાં, વાયુમાં રહેલા બધા જ અણુઓનો વેગ સમાન હોતો નથી. પરંતુ ત્યાં વેગ-વિતરણ (Distribution) હોય છે. આથી ઉપરનું સમીકરણ, x દિશામાંના વેગ υ_x ધરાવતા અણુ સમૂહના કારણે લાગતા દબાણ અને n આ

અણુ સમૂહની સંખ્યા ઘનતા દર્શાવે છે. આમ, બધા જ સમૂહોના ફાળાનો સરવાળો કરતાં કુલ દબાણ

$$P = n\,m\overline{\upsilon_x^2} \qquad (13.12)$$

મળે. જ્યાં, $\overline{\upsilon_x^2}$ એ $\upsilon_x{}^2$નું સરેરાશ છે. હવે વાયુ સમદિગ્ધર્મી (Isotropic) છે. એટલે કે, પાત્રમાં અણુઓના વેગની કોઈ માનીતી/ચોક્કસ (Preferred) દિશા હોતી નથી. આથી, સંમિતિ મુજબ :

$$\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_z^2}$$

$$= (1/3)\,[\overline{\upsilon_x^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_z^2}] = (1/3)\overline{\upsilon^2} \qquad (13.13)$$

જ્યાં, υ ઝડપ છે અને $\overline{\upsilon^2}$ એ સરેરાશ વર્ગીત ઝડપ છે. આથી,

$$P = (1/3)\,n\,m\,\overline{\upsilon^2} \qquad (13.14)$$

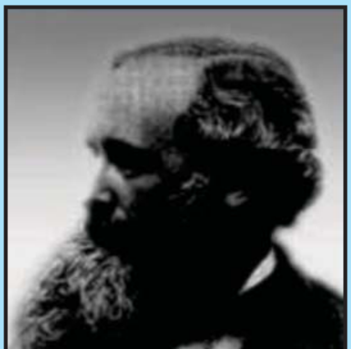
આ તારવણીમાં ધ્યાનમાં રાખવા જેવા મુદ્દાઓ. પહેલું, આપણે પાત્રને ભલે સમઘન ધાર્યું હોય, પરંતુ પાત્રનો આકાર કોઈ મહત્ત્વ ધરાવતો નથી. અનિયમિત આકારના પાત્ર માટે, આપણે હંમેશાં અતિસૂક્ષ્મ એવું નાનું (સમતલ) ક્ષેત્રફળ વિચારી શકીએ અને ઉપરના પદ અનુસરી શકીએ. નોંધો કે અંતિમ પરિણામમાં A અને Δt આવતા નથી. પાસ્કલના નિયમ મુજબ, પ્રકરણ 10માં આપેલ, સંતુલન સ્થિતિમાં રહેલા વાયુના એક ભાગમાં લાગતું દબાણ બીજે બધે પણ એટલું જ હોય છે. બીજું, આપણે ગણતરીમાં કોઈ પણ પ્રકારની અથડામણોને અવગણી છે. ભલે આ ધારણા સાબિત કરવી અઘરી હોય, પરંતુ આપણે સામાન્ય રીતે સમજી શકીએ કે તેના પરથી ભૂલભરેલાં (ખોટા) પરિણામો નહિ મળે. Δt સમયમાં દીવાલ સાથે અથડાતા અણુઓની સંખ્યા $\frac{1}{2}nA\upsilon_x\Delta t$ મળી હતી. હવે વાયુ સ્થાયી સ્થિતિમાં છે અને અથડામણો અનિયમિત છે. આથી, જો $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ વેગ ધરાવતો કોઈ અણુ અથડામણના કારણે બીજો વેગ મેળવે, તો ત્યાં બીજો કોઈ એવો અણુ પણ હોવો જ જોઈએ કે જે અથડામણ બાદ $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ વેગ મેળવે. જો આમ ન હોત તો, વેગની વહેંચણી (Distribution) સ્થિર ન રહેત. કોઈ પણ પરિસ્થિતિમાં આપણે $\overline{\upsilon_x^2}$ શોધીએ છીએ. આમ, સર્વાંગી રીતે, અણુઓની અથડામણો (જો તે સતત ન હોય અને અથડામણ દરમિયાનનો સમય ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સમય કરતાં નહિવત હોય તો) ઉપરની ગણતરીને અસર નહિ કરે.

13.4.2 તાપમાનનું ગતિક અર્થઘટન (Kinetic Interpretation of Temperature)

સમીકરણ 13.14ને આ રીતે પણ લખી શકાય :

$$PV = (1/3)\,nVm\,\overline{\upsilon^2} \qquad (13.15a)$$

વાયુના પરમાણુવાદના શોધકો (Founders of Kinetic Theory of Gases)



જેમ્સ ક્લાર્ક મૅક્સવેલ (James Clerk Maxwell) (1831-1879) : એડિનબર્ગ, સ્કોટલૅન્ડમાં જન્મેલા જે ઓગણીસમી સદીના મહાન ભૌતિકવિજ્ઞાનીઓમાંના એક છે. તેમણે વાયુના અણુઓના તાપીય વેગ વિતરણ (Distribution) વિશે તારણ આપ્યું હતું, જેના પરથી શ્યાનતા જેવી માપી શકાય તેવી રાશિઓ વિશે અનુમાન થઈ શકે છે. મૅક્સવેલની મહાનતમ સિદ્ધિ એ હતી કે તેમણે વિદ્યુત અને ચુંબકત્વના નિયમોને (એકબીજા સાથે) સાંકળીને સુસંગત સૂત્રો/સમીકરણો (જે કુલમ્બ, ઑરસ્ટેડ, એમ્પિયર અને ફેરાડેએ શોધ્યા હતા)નો સમૂહ આપ્યો, જે હવે મૅક્સવેલનાં સમીકરણો કહેવાય છે. આ પરથી તેમણે એક અત્યંત અગત્યનું તારણ આપ્યું કે પ્રકાશ એ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ છે. રસપ્રદ એ છે કે (ફેરાડેએ ભારપૂર્વક દર્શાવેલા વિદ્યુત વિશ્લેષણના નિયમો મુજબ) વિદ્યુતભાર કણ સ્વરૂપ ધરાવે છે તેવા વિચાર સાથે મૅક્સવેલ સહમત ન હતા.

લુડવિંગ બૉલ્ટ્ઝમેન (Ludwing Boltzmann) (1844-1906) : વિએના, ઑસ્ટ્રિયામાં જન્મ્યા હતા, જેમણે વાયુના ગતિવાદ પર મૅક્સવેલથી સ્વતંત્ર રીતે કાર્ય કર્યું હતું. તે પરમાણુવાદના પ્રખર હિમાયતી હતા, જે ગતિવાદનો પાયાનો સિદ્ધાંત છે. બૉલ્ટ્ઝમેને થરમૉડાયનેમિક્સના બીજા નિયમ અને એન્ટ્રોપી વિશે આંકડાકીય અર્થઘટન આપ્યું હતું. તેમને પ્રચલિત આંકડાકીય યંત્રવિજ્ઞાનના જનકોમાંના એક ગણવામાં આવે છે. યંત્રવિજ્ઞાનમાં ઊર્જા અને તાપમાનને સમપ્રમાણમાં સાંકળતો અચળાંક બૉલ્ટ્ઝમેનનો અચળાંક કહેવાય છે.

$PV = (2/3)\ N \times (\frac{1}{2}\ m\overline{\upsilon^2})$ (13.15b)

જ્યાં, $N (= nV)$ એ નમૂનામાં રહેલા અણુઓની સંખ્યા છે.

કૌંસમાંની રાશિ વાયુના અણુઓની સરેરાશ રેખીય ગતિઊર્જા છે. આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જા E સંપૂર્ણ ગતિકીય* હોવાથી,

$E = N \times (1/2)\ m\overline{\upsilon^2}$ (13.16)

આ પરથી સમીકરણ (13.15 b) મુજબ

$PV = (2/3)\ E$ (13.17)

હવે આપણે તાપમાનના ગતિક અર્થઘટન માટે તૈયાર છીએ. સમીકરણ (13.17) અને આદર્શ વાયુ સમીકરણ (13.3) પરથી

$E = (3/2)\ k_B NT$ (13.18)

અથવા $E / N = \frac{1}{2}\ m\ \overline{\upsilon^2} = (3/2)k_B T$ (13.19)

એટલે કે, વાયુના અણુની સરેરાશ ગતિઊર્જા તેના નિરપેક્ષ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે; તે દબાણ, કદ અથવા આદર્શ વાયુની પ્રકૃતિથી સ્વતંત્ર હોય છે. આ મૂળભૂત (સિદ્ધાંત) સમીકરણ તાપમાન, જે માપી શકાય તેવી વાયુની સ્થૂળ રાશિ છે (જેને થરમૉડાયનેમિક ચલ પણ કહે છે), તેને આણ્વીક રાશિ, એટલે કે અણુની સરેરાશ ગતિઊર્જા સાથે સાંકળે છે. આ બંને વિભાગો (Domains) બૉલ્ટ્ઝમેનના અચળાંક વડે સંકળાયેલા છે. વધુમાં આપણે નોંધીએ કે સમીકરણ (13.18) મુજબ આદર્શ વાયુની આંતરિક ઊર્જા ફક્ત તેના તાપમાન પર આધાર રાખે છે, નહિ કે દબાણ અથવા કદ પર. તાપમાનના આ અર્થઘટન સાથે, આદર્શ વાયુનો ગતિવાદ એ આદર્શ વાયુ સમીકરણ અને તેના પર આધારિત બીજા વાયુનિયમો સાથે સુસંગત છે.

અક્રિયાશીલ એવા આદર્શ વાયુઓના મિશ્રણ માટે, મિશ્રણમાં રહેલ દરેક વાયુ કુલ દબાણમાં ફાળો આપે છે. સમીકરણ (13.14) પરથી,

$P = (1/3)\ [n_1 m_1 \overline{\upsilon_1^2} + n_2 m_2 \overline{\upsilon_2^2} + ...]$ (13.20)

સંતુલનની સ્થિતિમાં, જુદા જુદા દરેક વાયુના અણુઓની સરેરાશ ગતિઊર્જા સમાન હશે. એટલે કે,

$\frac{1}{2}\ m_1 \overline{\upsilon_1^2} = (\frac{1}{2})\ m_2 \overline{\upsilon_2^2} = (3/2)k_B\ T$

આથી,

$P = (n_1 + n_2 + ...)\ k_B\ T$ (13.21)

જે આંશિક દબાણ માટેનો ડાલ્ટનનો નિયમ (Dalton's Law) છે.

સમીકરણ (13.19) પરથી, આપણને વાયુના અણુઓની ઝડપ કેટલી હશે તેનો અંદાજ મળે છે. $T = 300$ K તાપમાને, નાઇટ્રોજન વાયુના અણુની સરેરાશ વર્ગીત ઝડપ (Mean Square Speed) આ રીતે શોધાય.

$$m = \frac{M_{N_2}}{N_A} = \frac{28}{6.02 \times 10^{26}} = 4.65 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

$$\overline{\upsilon^2} = 3\ k_B\ T\ /\ m = (516)^2\ \text{m}^2\ \text{s}^{-2}$$

$\overline{\upsilon^2}$ ના વર્ગમૂળને સરેરાશ વર્ગીત ઝડપનું વર્ગમૂળ (Root Mean Square (rms) Speed) કહે છે અને તે υ_{rms} વડે દર્શાવાય છે, (આપણે $\overline{\upsilon^2}$ ને $<\upsilon^2>$ વડે પણ દર્શાવીએ છીએ.)

$\upsilon_{rms} = 516\ \text{m s}^{-1}$

આ ઝડપ હવામાં અવાજની ઝડપના ક્રમની છે. સમીકરણ (13.19) પરથી સ્પષ્ટ છે કે આ જ તાપમાને હલકા (Lighter) અણુઓની rms ઝડપ વધુ હોય છે.

ઉદાહરણ 13.5 એક બીકરમાં આર્ગન અને ક્લોરિન વાયુઓના દળ 2 : 1 પ્રમાણમાં રહેલા છે. આ મિશ્રણનું તાપમાન 27 °C છે. તો બંને વાયુના અણુઓ માટે (i) અણુ દીઠ સરેરાશ ગતિઊર્જા અને (ii) સરેરાશ વર્ગીત ઝડપનું વર્ગમૂળ υ_{rms} મેળવો.
આર્ગનનો પરમાણુભાર = 39.9 u,
ક્લોરિનનો અણુભાર = 70.9 u

ઉકેલ યાદ રાખવા જેવો મુદ્દો એ છે કે કોઈ પણ (આદર્શ) વાયુની (અણુ દીઠ) સરેરાશ ગતિઊર્જા (ભલે તે આર્ગનની જેમ એક પરમાણ્વિક, ક્લોરિનની જેમ દ્વિ-પરમાણ્વિક કે બહુ પરમાણ્વિક હોય) હંમેશાં $(3/2)\ k_B\ T$ જેટલી હોય છે. તે ફક્ત તાપમાન પર આધાર રાખે છે અને વાયુના પ્રકાર પર આધાર રાખતી નથી.

(i) વાયુપાત્રમાં રહેલા આર્ગન અને ક્લોરિન બંનેનું તાપમાન સમાન હોવાથી, બંને વાયુઓની (અણુ દીઠ) સરેરાશ ગતિઊર્જાનો ગુણોત્તર 1:1 છે.

(ii) હવે $(\frac{1}{2})\ m\ \upsilon_{rms}^2$ = અણુ દીઠ સરેરાશ ગતિઊર્જા = $(3/2)\ k_B\ T$, જ્યાં m એ વાયુના અણુનું દળ છે. આથી,

$$\frac{(\upsilon^2_{rms})_{Ar}}{(\upsilon^2_{rms})_{Cl}} = \frac{(m)_{Cl}}{(m)_{Ar}} = \frac{(M)_{Cl}}{(M)_{Ar}} = \frac{70.9}{39.9} = 1.77$$

જ્યાં, M વાયુનું આણ્વિક દળ દર્શાવે છે. (આર્ગન માટે, આર્ગન અણુ એ જ પરમાણુ છે.)

બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં,

$$\frac{(\upsilon_{rms})_{Ar}}{(\upsilon_{rms})_{Cl}} = 1.33$$

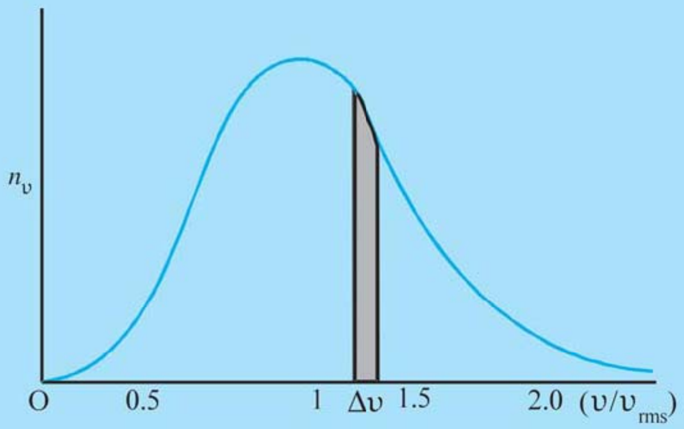
એ યાદ રાખો કે ઉપરની ગણતરીમાં દળના રૂપમાં મિશ્રણનો ઉપયોગ અપ્રસ્તુત છે. જો તાપમાન બદલાતું ન હોય તો દળના

* *E આંતરિક ઊર્જા Uનો રેખીય ભાગ દર્શાવે છે જેમાં બીજા પ્રકારના મુક્તતાના અંશો સાથે સંકળાયેલી ઊર્જા પણ હોઈ શકે. પરિચ્છેદ 13.5 જુઓ.*

મૅક્સવેલ વિતરણ વિધેય (Maxwell Distribution Function)

આપેલ દળના કોઈ વાયુમાં સ્થૂળ રાશિઓ જેવી કે દબાણ, કદ અને તાપમાન અચળ હોય તોપણ અણુઓના વેગ સમાન નથી હોતા. અથડામણોના કારણે અણુઓની દિશા અને ઝડપ બદલાય છે. આમ છતાં સંતુલન સ્થિતિમાં, ઝડપનું વિતરણ અચળ કે ચોક્કસ હોય છે.

જ્યારે ખૂબ મોટી સંખ્યામાં પદાર્થોને સમાવતાં તંત્રો સાથે કામ પાર પાડવામાં આવે ત્યારે આ વિતરણ ખૂબ અગત્યનું અને ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે, શહેરમાં વસતા જુદી જુદી ઉંમરના લોકો વિચારો. આપણે લોકોને જૂથમાં વહેંચી શકીએ : 20 વર્ષ સુધીનાં બાળકો, 20 થી 60 વર્ષની ઉંમરના વયસ્કો, 60થી ઉપરના વૃદ્ધો. જો આપણે વધારે ઊંડાણમાં માહિતી જોઈતી હોય, તો આપણે નાના અંતરાલો વિચારી શકીએ, 0-1, 1-2, ..., 99-100 ઉંમરના જૂથ. જ્યારે અંતરાલનું કદ નાનું થાય, ધારો કે અડધું વર્ષ, તો આ અંતરાલમાં માણસોની સંખ્યા પણ આશરે એક વર્ષના અંતરાલમાં મૂળ સંખ્યાના અડધા મૂલ્ય જેટલી ઘટશે. x અને $x + dx$ વર્ષના અંતરાલમાં માણસોની સંખ્યા $dN(x)$ એ dxના સમપ્રમાણમાં અથવા $dN(x) = n_x$ હોય છે. આપણે x પાસે માણસોની સંખ્યા દર્શાવવા n_xનો ઉપયોગ કર્યો છે.



અણુઓની ઝડપ માટે મૅક્સવેલનું વિતરણ

આ જ રીતે અણુઓની ઝડપનું વિતરણ, ઝડપ υ અને $\upsilon + d\upsilon$ની વચ્ચે અણુઓની સંખ્યા દર્શાવે છે. $dN(\upsilon) = 4p\text{N}\, a^3 e^{-b\upsilon 2}\, \upsilon^2\, d\upsilon = n_\upsilon\, d\upsilon$. આને મૅક્સવેલનું વિતરણ કહે છે. n_υ વિરુદ્ધ υનો આલેખ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે. υ અને $\upsilon + d\upsilon$ સુધીની ઝડપ ધરાવતા અણુઓની આંશિક સંખ્યા આપેલ પટ્ટી (Strip)ના ક્ષેત્રફળ જેટલી હોય છે. કોઈ પણ રાશિ જેવી કે υ^2નું સરેરાશ સંકલન $\langle\upsilon^2\rangle = (1 / N) \int \upsilon^2\, dN(\upsilon) = \sqrt{(3\, k_B T / m)}$ વડે વ્યાખ્યાયિત થાય છે, જે પ્રાથમિક ખ્યાલો સાથે વધુ મળતું આવે છે.

બીજા કોઈ પ્રમાણના આર્ગન અને ક્લોરિન માટે પણ (i) અને (ii)નો એ જ જવાબ મળશે. ◀

▶ ***ઉદાહરણ 13.6*** યુરેનિયમના બે સમસ્થાનિકો (Isotopes)ના દળ 235 અને 238 units (એકમ) છે. યુરેનિયમ હેક્ઝાફ્લોરાઇડ વાયુમાં જો બંને હાજર હોય તો કોની સરેરાશ ઝડપ વધારે હશે ? જો ફ્લોરિનનો પરમાણુભાર 19 units હોય, તો કોઈ પણ તાપમાને ઝડપના તફાવતની ટકાવારી શોધો.

ઉકેલ નિયત તાપમાને સરેરાશ ઊર્જા $= (\frac{1}{2})m \langle\upsilon^2\rangle$ અચળ હોય છે. અણુનું દળ જેટલું ઓછું, તેટલી ઝડપ વધારે. ઝડપનો ગુણોત્તર દળના ગુણોત્તરના વર્ગમૂળના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. આ દળો 349 અને 352 unit છે, આથી

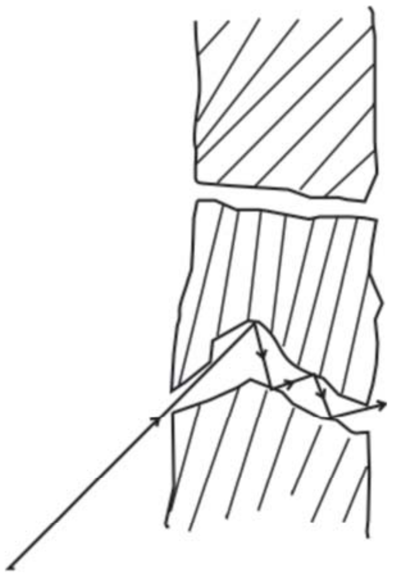
$$\upsilon_{349} / \upsilon_{352} = (352 / 349)^{1/2} = 1.0044$$

આથી, તફાવત $\frac{\Delta V}{V} = 0.44\ \%$

[^{235}U સમસ્થાનિક ન્યુક્લિઅર વિખંડન (Fission) માટે વપરાય છે. પુષ્કળ પ્રમાણમાં મળી આવતા સમસ્થાનિક ^{238}Uમાંથી તેને જુદો પાડવા માટે, આ મિશ્રણને છિદ્રાળું નળાકારની વચ્ચે રાખવામાં આવે છે. આ છિદ્રાળું નળાકાર જાડો અને સાંકડો હોવો જોઈએ કે જેથી અણુઓ આ લાંબાં છિદ્રોવાળી દીવાલ સાથે અથડાતા જઈને વારાફરતી પસાર થઈ

શકે. ધીમા અણુ કરતાં ઝડપી અણુ વધારે પ્રમાણમાં બહાર નીકળશે અને તેથી હલકા અણુઓ (નું પ્રમાણ) છિદ્રાળુ પાત્રની બહાર વધુ હશે (આકૃતિ 13.5). આ પદ્ધતિ બહુ કાર્યક્ષમ નથી અને પૂરતા પ્રમાણમાં મેળવવા માટે તેને વારંવાર કરવી પડે છે.]

જ્યારે વાયુઓ એકબીજામાં ભળતા (Diffuse) હોય, ત્યારે ભળવાનો દર તેમના દળના વર્ગમૂળના સમપ્રમાણમાં હોય છે (સ્વાધ્યાય 13.12 જુઓ). ઉપરના જવાબ પરથી તમે સમજૂતી વિચારી શકો ? ◀



આકૃતિ 13.5 છિદ્રાળુ દીવાલમાંથી પસાર થતા અણુઓ

▶ *ઉદાહરણ 13.7* (a) જ્યારે કોઈ અણુ (કે સ્થિતિસ્થાપક બોલ), (દળદાર) દીવાલ સાથે અથડાય ત્યારે એ જ ઝડપથી પાછો પડે (ફરે) છે. જ્યારે એક બૉલ મજબૂત રીતે પકડી રાખેલા ભારે બૅટ સાથે અથડાય ત્યારે પણ આમ જ થાય છે. આમ છતાં, જ્યારે બૅટ બૉલ તરફ ગતિ કરતું હોય, ત્યારે બૉલ જુદી ઝડપથી પાછો ફરે છે. બૉલ વધારે ઝડપથી કે ધીમેથી પાછો પડશે ? (પ્રકરણ 6 પરથી તમને સ્થિતિસ્થાપક અથડામણો યાદ આવશે.)

(b) જ્યારે પિસ્ટનને નળાકારમાં ધકેલીને તેમાં રહેલા વાયુને દબાવવામાં (સંકોચવામાં) આવે, ત્યારે તેનું તાપમાન વધે છે. ઉપર (a)માં આપેલ ગતિવાદના સંદર્ભમાં આની સમજૂતી આપો.

(c) જ્યારે સંકોચાયેલ વાયુ પિસ્ટનને બહાર ધકેલે અને પ્રસરણ પામે ત્યારે શું થાય છે ? તમે શું અવલોકન કરશો ?

(d) ક્રિકેટ રમતી વખતે સચિન તેંડુલકર ભારે બૅટનો ઉપયોગ કરે છે. શું તે એને કોઈ રીતે ઉપયોગી થશે ?

ઉકેલ (a) ધારો કે બૅટની પાછળના સ્ટંપની સાપેક્ષે બૉલની ઝડપ u છે. જો સ્ટંપની સાપેક્ષે બૅટ-બૉલ તરફ V ઝડપથી ગતિ કરતું હોય (આવતું હોય), તો બૅટની સાપેક્ષે બૅટ તરફ બૉલની ઝડપ $V + u$ હોય. જ્યારે (ભારે બૅટ સાથે અથડાઈને) બૉલ પાછો ફેંકાય ત્યારે તેની ઝડપ, બૅટની સાપેક્ષે, બૅટથી દૂર તરફ $V + u$ જેટલી હોય. આથી, સ્ટંપની સાપેક્ષે, સ્ટંપથી દૂર તરફ, પાછા ફેંકાયેલા બૉલની ઝડપ $V + (V + u) = 2V + u$ હોય.

આમ, બૅટ સાથે અથડામણ બાદ બૉલ ઝડપ પકડે છે. જો બૅટ ભારે ન હોય તો પાછા ફરવાની ઝડપ u કરતાં ઓછી હોઈ શકે. અણુ માટે આનો મતલબ એ કે તાપમાન વધશે.

(a)ના જવાબ પરથી તમે (b), (c) અને (d)નો જવાબ આપી શકશો.

(**સૂચના :** અનુરૂપ (બંધબેસતા) જોડકાં યાદ રાખો. પિસ્ટન → બૅટ, નળાકાર → સ્ટંપ, અણુ → બૉલ) ◀

13.5 ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ (LAW OF EQUIPARTITION OF ENERGY)

એક અણુની ગતિઊર્જા

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \qquad (13.22)$$

છે. T તાપમાને, ઉષ્મીય સંતુલનમાં રહેલા વાયુની સરેરાશ ઊર્જા $<\varepsilon_t>$ વડે દર્શાવીએ તો,

$$<\varepsilon_t> = \left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m v_y^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} m v_z^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T \qquad (13.23)$$

અહીં, કોઈ ઇચ્છિત (પસંદગીની) દિશા ન હોવાથી, સમીકરણ (13.23) પરથી,

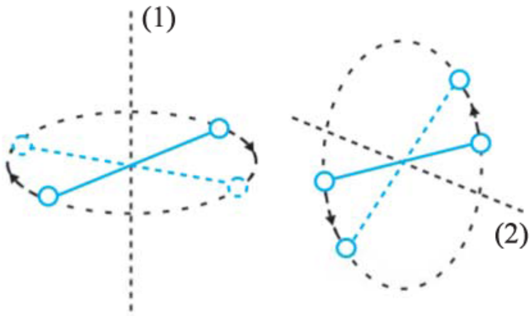
$$\left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T, \left\langle \frac{1}{2} m v_y^2 \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T,$$

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_z^2 \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T \qquad (13.24)$$

અવકાશમાં ગતિ કરી શકે તેવા મુક્ત અણુનું સ્થાન દર્શાવવા ત્રણ યામ જરૂરી હોય છે. જો તે ફક્ત કોઈ સમતલમાં ગતિ કરવા માટે બંધિત (Constrained) હોય તો તેને બે અને જો તે કોઈ રેખા પર ગતિ કરવા માટે બંધિત હોય તો તેનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે ફક્ત એક જ યામ જરૂરી છે. આને બીજી રીતે પણ સમજી શકાય. આપણે કહી શકીએ કે તેની મુક્તતાના અંશો રેખા પર (રેખીય) ગતિ કરવા માટે એક, સમતલમાં ગતિ કરવા માટે બે અને અવકાશમાં ગતિ કરવા માટે ત્રણ હોય છે. સમગ્ર પદાર્થની (as a whole), એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધીની ગતિને રેખીય ગતિ કહે છે. આમ, અવકાશમાં ગતિ કરવા માટે મુક્ત એવા કણને રેખીય ગતિની મુક્તતાના અંશો ત્રણ હોય છે. રેખીય ગતિની મુક્તતાનો દરેક અંશ ગતિના કોઈ એક ચલના વર્ગ દા.ત., $\frac{1}{2} m v_x^2$ અને તે જ રીતે v_y અને v_zનાં પદોનો ફાળો આપે છે. ઉષ્મીય સંતુલનના સમીકરણ (13.24)માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આવા દરેક પદનું સરેરાશ $\frac{1}{2} k_B T$ છે.

આર્ગન જેવા એક પરમાણ્વિક અણુઓને ફક્ત રેખીય ગતિની મુક્તતાના અંશો જ હોય છે. પરંતુ, O_2 અથવા N_2 જેવા દ્વિપરમાણ્વિક અણુઓ ધરાવતા વાયુનું શું ? O_2ના અણુને રેખીય ગતિની મુક્તતાના અંશો ત્રણ હોય છે. પણ આ ઉપરાંત તે પોતાના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની આસપાસ ચાકગતિ પણ કરી શકે છે. આકૃતિ (13.6)માં ઑક્સિજનના બે પરમાણુઓને જોડતી અક્ષને લંબ રૂપે રહેલી બે સ્વતંત્ર ચાકગતિની અક્ષો 1 અને 2 દર્શાવી છે. જેમની આસપાસ અણુ ચાકગતિ કરી શકે*. અણુને ચાકગતિની મુક્તતાના અંશો બે હોય છે. જેમનો ફાળો પણ કુલ ઊર્જાનાં પદો : રેખીય ઊર્જા ε_t અને ચાકગતિ ઊર્જા ε_rમાં હોય છે.

$$\varepsilon_t+\varepsilon_r=\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}mv_y^2+\frac{1}{2}mv_z^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \quad (13.25)$$



આકૃતિ 13.6 દ્વિપરમાણ્વિક અણુની ચાકગતિની બે સ્વતંત્ર અક્ષ

જ્યાં, ω_1 અને ω_2 અનુક્રમે અક્ષો 1 અને 2ની આસપાસ (સાપેક્ષે) કોણીય ઝડપ તથા I_1, I_2 જડત્વની ચાકમાત્રા છે. નોંધો કે, ચાકગતિની દરેક મુક્તતાનો અંશ ઊર્જાના પદમાં ફાળો આપે છે. જેમાં ચાકગતિના ચલનો વર્ગ આવેલ હોય છે.

આપણે ઉપર ધાર્યું હતું કે, O_2 અણુ એ 'દૃઢ અણુ' (Rigid Rotator) છે, એટલે કે અણુ કંપન કરતો નથી. O_2 માટે કરેલ આ ધારણા (નિયંત્રિત તાપમાને) સત્ય હોવા છતાં, હંમેશાં માન્ય નથી હોતી. CO જેવા અણુઓ સામાન્ય તાપમાને પણ કંપન ધરાવતા હોય છે એટલે કે, તેના પરમાણુઓ આંતર પરમાણ્વિક અક્ષ પર એક-દિશ દોલકની જેમ કંપન કરતા હોય છે, જે કુલ ઊર્જામાં, કંપન ઊર્જા (Vibration Energy)નું પદ ε_v પ્રદાન કરે છે.

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v \quad (13.26)$$

જ્યાં, k એ દોલકનો બળ-અચળાંક છે અને y તેનો કંપન યામ (ચલ) છે.

સમીકરણ (13.26)માં પણ કંપનઊર્જાનાં પદો, કંપન ગતિના ચલો y અને dy/dt ના વર્ગના પદ ધરાવે છે.

આ સ્થિતિમાં, સમીકરણ (13.26)નું એક અગત્યનું તારણ નોંધો. દરેક રેખીય અને ચક્રીય મુક્તતાના અંશ સમીકરણ (13.26)માં ફક્ત એક વર્ગીત પદ પ્રદાન કરે છે પણ કંપનનો એક પ્રકાર (Mode) બે 'વર્ગીત પદો' પ્રદાન કરે છે : ગતિ અને સ્થિતિઊર્જાઓ.

ઊર્જાના સમીકરણમાં આવતું દરેક દ્વિઘાત (Quadratic) પદ એ અણુની ઊર્જાના શોષણ (Absorption)નો પ્રકાર દર્શાવે છે. આપણે જોયું છે કે, T નિરપેક્ષ તાપમાને તાપીય સંતુલનમાં, દરેક રેખીય ગતિના પ્રકાર માટે સરેરાશ ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ છે. આંકડાકીય પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રનો ખૂબ અગત્યનો સિદ્ધાંત (જે પ્રથમ મૅક્સવેલે સાબિત કર્યો હતો) દર્શાવે છે કે આવું ઊર્જાના દરેક પ્રકાર માટે હોય છે, રેખીય, ચક્રીય અને કંપન. એટલે કે, સંતુલનની સ્થિતિમાં, કુલ ઊર્જા દરેક પ્રકારની ઊર્જાઓમાં સમાન રીતે વિતરીત હોય છે, જે દરેક પ્રકારની સરેરાશ ઊર્જા $\frac{1}{2}k_BT$ જેટલી હોય છે. આને **ઊર્જાના સમવિભાજનનો નિયમ (Law of Equipartition of Energy)** કહે છે. અણુની દરેક રેખીય અને ચક્રીય મુક્તતાનો અંશ ઊર્જામાં $\frac{1}{2}k_BT$ પદ પ્રદાન કરે છે, જ્યારે દરેક કંપન આવૃત્તિ $2 \times \frac{1}{2}k_BT = k_BT$ પદ પ્રદાન કરે છે, કારણ કે કંપન પ્રકારમાં ગતિ અને સ્થિતિ બંને પ્રકારની ઊર્જા હોય છે.

ઊર્જાના સમવિભાજનની સાબિતી આ પુસ્તકની મર્યાદાની બહાર છે. અહીં, આપણે આ નિયમનો ઉપયોગ કરીને સૈદ્ધાંતિક રીતે વાયુઓની વિશિષ્ટ ઊર્જા શોધવા પ્રયત્ન કરીશું.

આગળ જતાં આપણે ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્માઓના ઉપયોગો વિશે પણ ટૂંકમાં ચર્ચા કરીશું.

13.6 વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા (SPECIFIC HEAT CAPACITY)

13.6.1 એકપરમાણ્વિક વાયુઓ (Monoatomic Gases)

એકપરમાણ્વિક વાયુના અણુને રેખીય મુક્તતાના ફક્ત ત્રણ અંશ હોય છે. આથી, T તાપમાને આ અણુની સરેરાશ ઊર્જા $(3/2)k_BT$ હોય છે. આ વાયુના એક મોલની કુલ આંતરિક ઊર્જા,

* *પરમાણુઓને જોડતી રેખાની ઉપર, ચાકગતિની ચાકમાત્રા નહિવત હોય છે, જે ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ કોઈ કામમાં નથી આવતી. પરિચ્છેદ 13.6નો અંત ભાગ જુઓ.*

$$U = \frac{3}{2}k_B T \times N_A = \frac{3}{2}RT \qquad (13.27)$$

છે. અચળ કદે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા C_Vનું મૂલ્ય,

$$C_V \text{ (એક પરમાણ્વિક વાયુ)} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}R \qquad (13.28)$$

આદર્શ વાયુ માટે,

$$C_P - C_V = R \qquad (13.29)$$

જ્યાં, C_P એ અચળ દબાણે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા છે. આમ,

$$C_P = \frac{5}{2}R \qquad (13.30)$$

$$\text{વિશિષ્ટ ઉષ્માઓનો ગુણોત્તર } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \qquad (13.31)$$

13.6.2 દ્વિપરમાણ્વિક વાયુઓ (Diatomic Gases)

આગળ સમજાવ્યું તે મુજબ, ડમ્બેલ (Dumbbell)ની જેમ નિરૂપણ કરેલ Rigid Rotator (ચાકગતિ કરી શકે તેવા દૃઢ અણુ) દ્વિપરમાણ્વિક અણુને 5 મુક્તતાના અંશો હોય છે : 3 રેખીય અને 2 ચક્રીય. ઊર્જા સમવિભાજન નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, આવા એક મોલ વાયુની કુલ આંતરિક ઊર્જા,

$$U = \frac{5}{2}k_B T \times N_A = \frac{5}{2}RT \qquad (13.32)$$

આ પરથી મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ.

$$C_V \text{ (દૃઢ દ્વિપરમાણ્વિક)} = \frac{5}{2}R,\ C_P = \frac{7}{2}R \qquad (13.33)$$

$$\gamma \text{ (દૃઢ દ્વિપરમાણ્વિક)} = \frac{7}{5} \qquad (13.34)$$

જો દ્વિપરમાણ્વિક અણુ દૃઢ ન હોય પરંતુ તે વધારામાં કંપન પણ ધરાવતો હોય તો

$$U = \left(\frac{5}{2}k_B T + k_B T\right)N_A = \frac{7}{2}RT$$

$$C_V = \frac{7}{2}R,\ C_P = \frac{9}{2}R,\ \gamma = \frac{9}{7} \qquad (13.35)$$

13.6.3 બહુ પરમાણ્વિક વાયુઓ (Polyatomic Gases)

સામાન્ય રીતે બહુપરમાણ્વિક અણુને 3 રેખીય, 3 ચક્રીય મુક્તતાના અંશો અને અમુક સંખ્યા (f)ના કંપનના પ્રકારો (Modes) હોય છે. ઊર્જા સમવિભાજનના નિયમ પરથી સહેલાઈથી જોઈ શકીએ કે,

$$U = \left(\frac{3}{2}k_B T + \frac{3}{2}k_B T + f\,k_B T\right)N_A$$

તેથી, $C_V = (3 + f)\,R$, $C_P = (4 + f)\,R$,

$$\gamma = \frac{(4+f)}{(3+f)} \qquad (13.36)$$

નોંધો કે એક, દ્વિ કે બહુપરમાણ્વિક એવા કોઈ પણ આદર્શ વાયુ માટે $C_P - C_V = R$ સાચું છે.

વાયુઓના કંપન ગતિના પ્રકારો (Modes) અવગણીને સૈદ્ધાંતિક રીતે અનુમાનિત વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યોનો સારાંશ કોષ્ટક 13.1માં દર્શાવ્યો છે. પ્રાયોગિક રીતે કેટલાક વાયુઓ માટે મેળવેલ વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં મૂલ્યો કોષ્ટક 13.2માં દર્શાવેલ છે, જેમની સાથે આ મૂલ્યો મળતાં આવે છે. જોકે બીજા કેટલાક Cl_2, C_2H_6 અને અન્ય બહુપરમાણુક જેવા વાયુઓ માટે વિશિષ્ટ ઉષ્માના અનુમાનિત અને વાસ્તવિક મૂલ્યો વચ્ચે તફાવત છે (કોષ્ટકમાં બતાવેલ નથી). સામાન્યતઃ આ વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્માનાં પ્રાયોગિક મૂલ્યો કોષ્ટક 13.1માં દર્શાવેલ અનુમાનિત મૂલ્યો કરતાં મોટાં હોય છે, જે સૂચવે છે કે ગણતરીમાં ગતિના કંપન પ્રકારનો સમાવેશ કરીને તેમની વચ્ચેની સામ્યતા સુધારી શકાય છે.

આમ, સામાન્ય તાપમાને ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ પ્રાયોગિક રીતે ચકાસી શકાય છે.

કોષ્ટક 13.1 વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતાઓના અનુમાનિત મૂલ્યો (કંપન પ્રકારો અવગણીને)

વાયુનો પ્રકાર	C_V (J mol⁻¹ K⁻¹)	C_P (J mol⁻¹ K⁻¹)	$C_P - C_V$ (J mol⁻¹ K⁻¹)	γ
એકપરમાણ્વિક	12.5	20.8	8.31	1.67
દ્વિપરમાણ્વિક	20.8	29.1	8.31	1.40
ત્રિપરમાણ્વિક	24.93	33.24	8.31	1.33

કોષ્ટક 13.2 કેટલાક વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતાના માપેલ મૂલ્યો

વાયુનો પ્રકાર	વાયુ	C_V (J mol⁻¹ K⁻¹)	C_P (J mol⁻¹ K⁻¹)	$C_P - C_V$ (J mol⁻¹ K⁻¹)	γ
એકપરમાણ્વિક	He	12.5	20.8	8.30	1.66
એકપરમાણ્વિક	Ne	12.7	20.8	8.12	1.64
એકપરમાણ્વિક	Ar	12.5	20.8	8.30	1.67
દ્વિપરમાણ્વિક	H_2	20.4	28.8	8.45	1.41
દ્વિપરમાણ્વિક	O_2	21.0	29.3	8.32	1.40
દ્વિપરમાણ્વિક	N_2	20.8	29.1	8.32	1.40
ત્રિપરમાણ્વિક	H_2O	27.0	35.4	8.35	1.31
બહુપરમાણ્વિક	CH_4	27.1	35.4	8.36	1.31

ઉદાહરણ 13.8 ચોક્કસ કદનું એક નળાકાર (પાત્ર) પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે 44.8 litre હિલિયમ વાયુ ધરાવે છે. નળાકારમાં રહેલા વાયુનું તાપમાન 15.0° C જેટલું વધારવા માટે કેટલી ઉષ્મા જરૂરી છે ? ($R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1})

ઉકેલ વાયુના નિયમ $PV = \mu RT$નો ઉપયોગ કરીને તમે સહેલાઈથી દર્શાવી શકો કે નિરપેક્ષ તાપમાન (273 K) અને દબાણ (1 atm = 1.01×10^5 Pa)એ 1 મોલ જેટલો (આદર્શ) વાયુ 22.4 litre કદ રોકે છે. આ સાર્વત્રિક કદને મોલર કદ કહે છે. આ ઉદાહરણમાં આપેલ નળાકાર 2 મોલ હિલિયમ ધરાવે છે. આ ઉપરાંત, હિલિયમ એક-પરમાણ્વિક હોવાથી, અચળ કદે તેની સૈદ્ધાંતિક (અને પ્રાયોગિક) મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા, $C_V = (3/2)R$ અને અચળ દબાણે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા $C_P = (3/2)R + R = (5/2)R$ છે. નળાકારનું કદ અચળ હોવાથી, જરૂરી ઉષ્મા C_Vની મદદથી ગણી શકાય છે. આથી, જરૂરી ઉષ્મા = મોલની સંખ્યા × મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા × તાપમાનનો વધારો.

$= 2 \times 1.5\ R \times 15.0 = 45\ R$

$= 45 \times 8.31 = 374$ J ◀

13.6.4 ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા (Specific Heat Capacity of Solids)

આપણે ઊર્જા સમવિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા મેળવવા કરી શકીએ. N પરમાણુઓ ધરાવતો એક ઘન પદાર્થ વિચારો, કે જેઓ તેમના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ કંપન કરતા હોય. એક પરિમાણમાં આંદોલનની સરેરાશ ઊર્જા $2 \times \frac{1}{2}\ k_BT = k_BT$ હોય છે. ત્રિપરિમાણમાં, સરેરાશ ઊર્જા $3k_BT$. એક મોલ જેટલા ઘન પદાર્થ માટે, $N = N_A$, અને કુલ ઊર્જા

$U = 3\ k_BT \times N_A = 3\ RT$

પરંતુ, અચળ દબાણે $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V = \Delta U$, કારણ કે ઘન પદાર્થ માટે ΔV અવગણી શકાય તેવું હોય છે. આથી,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \qquad (13.37)$$

કોષ્ટક 13.3 ઓરડાના તાપમાન અને વાતાવરણના દબાણે કેટલાક ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા

પદાર્થ	વિશિષ્ટ ઉષ્મા (J kg^{-1} K^{-1})	મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા (J mol^{-1} K^{-1})
ઍલ્યુમિનિયમ	900.0	24.4
કાર્બન	506.5	6.1
તાંબું	386.4	24.5
સીસું	127.7	26.5
ચાંદી	236.1	25.5
ટંગસ્ટન	134.4	24.9

કોષ્ટક 13.3 દર્શાવે છે કે, સામાન્ય તાપમાને (કાર્બન સિવાય) અનુમાન કરેલ મૂલ્યો પ્રાયોગિક મૂલ્યો સાથે મળતાં આવે છે.

13.6.5 પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મા-ક્ષમતા (Specific Heat Capacity of Water)

આપણે પાણીને ઘન પદાર્થની જેમ ગણીએ (Treat) છીએ. દરેક પરમાણુ માટે સરેરાશ ઊર્જા $3k_BT$.

પાણીના અણુને ત્રણ પરમાણુ હોય છે, બે હાઇડ્રોજન અને એક ઑક્સિજન. આથી તેના માટે

$U = 3 \times 3\ k_BT \times N_A = 9\ RT$

અને $C = \Delta Q / \Delta T = \Delta U / \Delta T = 9R$

આ મૂલ્ય અવલોકન દ્વારા મેળવેલ છે અને તે ઘણું મળતું આવે છે. કૅલરી, ગ્રામ, ડિગ્રી એકમોમાં, પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્મા એક એકમ વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. જ્યારે 1 કૅલરી = 4.179 જૂલ અને એક મોલ પાણી 18 ગ્રામ જેટલું હોય, ત્યારે મોલ દીઠ વિશિષ્ટ ઉષ્મા ~ 75 J mol^{-1} K^{-1} ~ 9R જેટલી હોય છે. આમ છતાં આલ્કોહૉલ અથવા એસિટોન જેવા જટિલ (Complex) અણુઓ માટે, મુક્તતાના અંશો પર આધારિત દલીલો (Arguments) વધુ ગૂંચવાડા ભરી બને છે.

અંતમાં, ઊર્જા સમવિભાજનના પ્રચલિત નિયમના આધારે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ કેવી રીતે અનુમાનિત કરી શકાય તે મુદ્દો નોંધીએ. અનુમાન કરેલ વિશિષ્ટ ઉષ્માઓ તાપમાનથી સ્વતંત્ર છે. આપણે નીચા તાપમાન તરફ જઈએ, ત્યારે પણ, આ અનુમાનમાં થોડો તફાવત તો રહે છે. જેમ $T \to 0$ તેમ, બધા પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્મા શૂન્ય સુધી પહોંચે છે. જે એ હકીકત સાથે સંકળાયેલ છે કે નીચા તાપમાને મુક્તતાના અંશો શિથિલ (Frozen) બની જાય છે અને બિનઅસરકારક બને છે. પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ મુક્તતાના અંશો કોઈ પણ સમયે બદલાવા જોઈએ નહિ. વિશિષ્ટ ઉષ્માની આ વર્તણૂક, પ્રચલિત યંત્રશાસ્ત્રની મર્યાદા દર્શાવે છે અને તે ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્રની મદદથી સમજાવી શકાય, જે સૌપ્રથમ આઇનસ્ટાઇને દર્શાવ્યું હતું. ક્વૉન્ટમ યંત્રશાસ્ત્ર મુજબ, મુક્તતાના અંશો લાગુ પડે તે પહેલાં જરૂરી લઘુતમ ઊર્જા અશૂન્ય હોવી જોઈએ. કેટલાક કિસ્સાઓમાં જ કંપનની મુક્તતાના અંશો લાગુ પડવા માટેનું આ પણ એક કારણ છે.

13.7 સરેરાશ મુક્ત પથ (MEAN FREE PATH)

વાયુના અણુઓને ઘણી વાર અવાજની ઝડપના ક્રમ જેટલી વધારે ઝડપ હોય છે. છતાં, રસોડામાં બાટલામાંથી ચૂવાતો (Leaking) વાયુ (ગૅસ) ઓરડાના બીજા ખૂણાઓ સુધી પ્રસરતાં સારો એવો સમય લે છે. ધુમાડાના વાદળની ટોચ ઘણા કલાકો સુધી રહે છે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, વાયુના અણુઓને ચોક્કસ પણ નાનું કદ હોય છે, આથી તેઓ એકબીજા સાથે અથડામણ કરે જ છે. પરિણામે, તેઓ

દેખાય એ સમજીએ (Seeing is Believing)

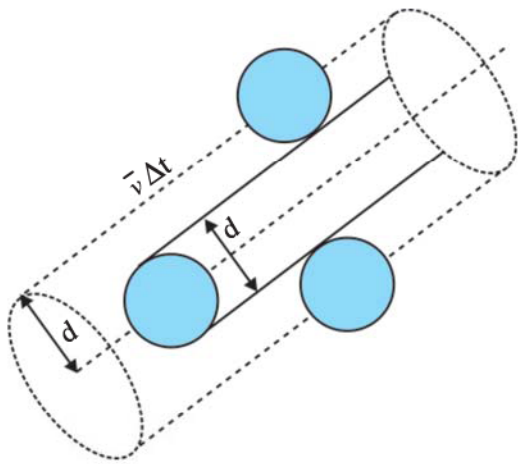
કોઈ આસપાસમાં ગતિ કરતા અણુઓ જોઈ શકે ? લગભગ નહિ જ. કોઈ પાણીના અણુઓ સાથે વહી જતી ફૂલોની પરાગરજ જોઈ શકે. આ અણુઓનું પરિમાણ ~10^{-5} m જેટલું હોય છે. 1827માં, સ્કોટલૅન્ડના વનસ્પતિશાસ્ત્રી (Botanist) રૉબર્ટ બ્રાઉને, માઇક્રોસ્કૉપમાંથી જોતાં નોંધ્યું કે, પાણીમાં તરતી (કલીલ) ફૂલોની પરાગરજ સતત, અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરે છે.

ગતિવાદ આ ઘટનાની સાદી સમજ આપે છે. પાણીમાં તરતા કોઈ પણ પદાર્થ સાથે પાણીના અણુઓ બધી બાજુથી સતત અથડાતા હોય છે. અણુઓની ગતિ અસ્તવ્યસ્ત હોવાથી કોઈ પણ પદાર્થને એક દિશામાંથી અથડાતા અણુઓની સંખ્યા, વિરુદ્ધ દિશામાંથી અથડાતા અણુઓની સંખ્યા જેટલી હોય છે. અણુઓની આ અથડામણોનો તફાવત સામાન્ય કદના પદાર્થને અથડાતા અણુઓની કુલ સંખ્યાની સરખામણીમાં નહિવત્ હોય છે અને આપણે આ પદાર્થની સામાન્ય હલનચલનને નોંધી શકતા નથી.

જ્યારે પદાર્થ પૂરતો નાનો હોય છતાં પણ માઇક્રોસ્કૉપમાંથી જોઈ શકાય એવો હોય ત્યારે, અલગ દિશાઓમાંથી અથડાતા અણુઓની સંખ્યાનો તફાવત અવગણી શકાય એવો હોતો નથી. એટલે કે, માધ્યમમાં તરતા પદાર્થ પર માધ્યમ (પાણી કે બીજા કોઈ પ્રવાહી)ના અણુઓ વડે થતા આઘાતના કારણે લાગતા ધક્કા કે ટૉર્કનો સરવાળો શૂન્ય થતો નથી. એમાં એક કે બીજી દિશામાં એક ચોખ્ખો ધક્કો કે ટૉર્ક લાગે છે. આથી, તરતા પદાર્થ અસ્તવ્યસ્ત હલનચલન કરે છે અને અનિયમિત રીતે ધ્રુજે છે. આ ગતિ જેને હવે 'બ્રાઉનિયન ગતિ' કહે છે તે અણુઓની વર્તણૂકનો દેખીતો પુરાવો છે. છેલ્લાં 50 વર્ષ કે તેની આસપાસથી અણુઓને સ્કેનિંગ ટનલિંગ અને બીજા વિશેષ પ્રકારના માઇક્રોસ્કૉપથી જોઈ શકાય છે.

1987માં અમેરિકામાં કાર્ય કરતા ઇજિપ્તના વિજ્ઞાની એહમદ ઝેવાઇલ (Ahmed Zewail)એ અણુઓ જ નહિ પરંતુ તેમની આંતરક્રિયાઓનું પણ અવલોકન કર્યું હતું. આ કાર્ય તેમણે લેસરના પ્રકાશના ટૂંકા સમયગાળા, દસ ફેમ્ટો સેકન્ડના ક્રમના ઝબકારા કરી અને તેમના ફોટા પાડીને કર્યું હતું. (1 ફેમ્ટો સેકન્ડ = 10^{-15} s). હવે તો કોઈ રાસાયણિક બંધના રચાવા કે તૂટવાની ઘટનાનો પણ અભ્યાસ કરી શકે છે. આ ખરેખર જોઈ શકાય છે !!

અથડાયા વગર સીધા જઈ શકતા નથી અને તેમનો માર્ગ સતત ફંટાતો હોય છે.



આકૃતિ 13.7 Δt સમયમાં અણુએ આંતરેલું કદ, જેમાં આવેલો કોઈ પણ અણુ તેની સાથે અથડાશે.

ધારો કે વાયુના અણુઓ d વ્યાસના ગોળાઓ છે. સરેરાશ ઝડપ $<v>$ ધરાવતા અણુ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. કોઈ પણ અણુ જે કેન્દ્રો વચ્ચેના અંતર d સુધીમાં આવેલ હોય તેની સાથે આ અણુ અથડાશે. Δt સમયમાં તે $\pi d^2 <v> \Delta t$ કદ આંતરે છે, જેમાં આવેલો કોઈ પણ અણુ તેની સાથે અથડાશે. (જુઓ આકૃતિ 13.7.) જો એકમ કદમાં આવેલ અણુઓની સંખ્યા n હોય, તો Δt સમયમાં અણુ $n\pi d^2 <v> \Delta t$ અથડામણો અનુભવશે. આથી, અથડામણોનો દર $n\pi d^2 <v>$ છે અથવા બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેનો સમય સરેરાશ રૂપે

$$\tau = 1/(n\pi <v> d^2) \qquad (13.38)$$

બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર, જે સરેરાશ મુક્તપથ l કહેવાય છે, તે :

$$l = <v>\tau = 1/(n\pi d^2) \qquad (13.39)$$

છે. આ ગણતરીમાં, આપણે બીજા અણુઓ સ્થિર છે તેમ માન્યું હતું. પરંતુ ખરેખર તો બધા જ અણુઓ ગતિમાં હોય છે અને અથડામણનો દર અણુઓના સરેરાશ સાપેક્ષ વેગ પરથી મેળવી શકાય. આમ, આપણે સમીકરણ (13.38)માં $\langle v \rangle$ની જગ્યાએ $\langle v_r \rangle$ લખવું જોઈએ. વધુ ચોક્કસ ગણતરી (Treatment) પરથી,

$$l = 1/(\sqrt{2}\ n\pi d^2) \qquad (13.40)$$

મળે છે. ચાલો હવે આપણે સરેરાશ ઝડપ $<v> = (485 m/s)$ ધરાવતા અણુઓ માટે l અને T શોધીએ. STP એ

$$n = \frac{(6.02\times10^{23})}{(22.4\times10^{-3})}$$

$= 2.7 \times 10^{25}\ m^{-3}$

$d = 2 \times 10^{-10}$ m, લેતાં

$\tau = 6.1 \times 10^{-10}$ s

અને $l = 2.9 \times 10^{-7}\ m \approx 1500\ d$ (13.41)

અપેક્ષા મુજબ, સમીકરણ (13.40)વડે મળતો સરેરાશ મુક્તપથ, અણુઓની સંખ્યા ઘનતા અને પરિમાણના વ્યસ્તપ્રમાણમાં છે. ખૂબ નીચા દબાણવાળી (highly evacuated) નળીમાં બેશક n નાનો હોય છે અને સરેરાશ મુક્ત પથ નળીની લંબાઈ જેટલો મોટો પણ હોઈ શકે.

> ▶ *ઉદાહરણ 13.9* 373 K તાપમાને પાણીની બાષ્પ માટે પાણીના અણુનો સરેરાશ મુક્તપથ શોધો. અગાઉ આપેલ ઉદાહરણ 13.1 અને સમીકરણ (13.41)માં આપેલ માહિતીનો ઉપયોગ કરો.

ઉકેલ પાણીની બાષ્પ માટે dનું મૂલ્ય હવા જેટલું જ હોય છે. સંખ્યા ઘનતા નિરપેક્ષ તાપમાનના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. આથી 373 K તાપમાને,

$$n = 2.7 \times 10^{25} \times \frac{273}{373} = 2 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

આથી, સરેરાશ મુક્તપથ $l = 4 \times 10^{-7}$ m.

નોંધો કે સરેરાશ મુક્તપથ, અગાઉ ગણેલ આંતરઆણ્વિક અંતર ~ 40 Å = 4 × 10^{-9} m કરતાં 100 ગણો છે. સરેરાશ મુક્તપથની આટલી મોટી કિંમત વાયુની ચોક્કસ પ્રકારની વર્તણૂક માટે જવાબદાર છે. કોઈ પાત્ર વગર વાયુઓને સિમિત (Confine) કરી શકાતા નથી.

વાયુના ગતિવાદનો ઉપયોગ કરીને, માપી શકાય તેવી સ્થૂળ રાશિઓ જેવી કે શ્યાનતા, ઉષ્મા વહન અને પ્રસરવું (Diffusion)ને અણુના કદ (પરિમાણ) જેવી સૂક્ષ્મ રાશિઓ સાથે સાંકળી શકાય છે. આવાં સમીકરણો પરથી સૌપ્રથમ અણુઓના પરિમાણ અંદાજવામાં આવ્યા હતા.

સારાંશ

1. દબાણ (P), કદ (V) અને નિરપેક્ષ તાપમાન (T)ને સાંકળતું આદર્શ વાયુ સમીકરણ

   $$PV = \mu RT = k_B NT \text{ છે.}$$

   જ્યાં, μ એ મોલની સંખ્યા અને N એ અણુઓની સંખ્યા છે. R અને k_B સાર્વત્રિક અચળાંકો છે.

   $$R = 8.314\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}, \qquad k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1}$$

   વાસ્તવિક વાયુઓ આદર્શ વાયુ સમીકરણને લગભગ જ અનુસરે છે, જ્યારે નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાને વધુ અનુસરે છે.

2. વાયુના ગતિવાદ પરથી,

   $$P = \frac{1}{3} n\, m\overline{v^2}$$

   સમીકરણ મળે છે, જ્યાં n એ અણુઓની સંખ્યા ઘનતા m અણુનું દળ અને $\overline{v^2}$ એ વર્ગીત ઝડપનું સરેરાશ છે. આદર્શ વાયુ સમીકરણ સાથે મળીને તે તાપમાનનું ગતિક અર્થઘટન આપે છે.

   $$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T, \quad v_{rms} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

   આ દર્શાવે છે કે વાયુનું તાપમાન, તેના અણુની સરેરાશ ગતિઊર્જાનું માપ દર્શાવે છે, જે વાયુ કે અણુના પ્રકારથી સ્વતંત્ર હોય છે. નિયત તાપમાને વાયુઓના મિશ્રણમાં ભારે અણુની સરેરાશ ઝડપ ઓછી હોય છે.

3. રેખીય ગતિઊર્જા,

   $$E = \frac{3}{2} k_B N\, T$$

   આ પરથી,

   $$PV = \frac{2}{3} E$$

   સમીકરણ મળે.

4. ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ દર્શાવે છે કે, નિરપેક્ષ તાપમાન T એ જ્યારે તંત્ર સંતુલનમાં હોય, ત્યારે કુલ ઊર્જા એ શોષણ (Absorption) ઊર્જાના જુદા જુદા પ્રકારોમાં સમાન રીતે વહેંચાયેલી હોય છે, જેમાં

દરેક પ્રકારની ઊર્જા $\frac{1}{2}k_B T$ જેટલી હોય છે. દરેક રેખીય અને ચક્રીય મુક્તતાનો અંશ શોષણ ઊર્જાના એક પ્રકાર (Mode) સાથે સંકળાયેલ છે અને તેની ઊર્જા $\frac{1}{2}k_B T$ હોય છે. દરેક કંપન આવૃત્તિને બે પ્રકારની ઊર્જા હોય છે (ગતિ અને સ્થિતિ). જેની ઊર્જા, $2 \times \frac{1}{2}k_B T = k_B T$ હોય છે.

5. ઊર્જાના સમવિભાજનના નિયમ પરથી, વાયુઓની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા ગણી શકાય છે અને આ કિંમતો ઘણા વાયુઓની પ્રાયોગિક રીતે મેળવેલ વિશિષ્ટ ઉષ્મા સાથે મળતી આવે છે. આ સમાનતા વધારવા માટે ગતિના કંપન પ્રકારો પણ ઉમેરવા જોઈએ.
6. સરેરાશ મુક્તપથ l એ અણુની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચે અણુએ કાપેલ સરેરાશ અંતર છે.

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

જ્યાં, n એ અણુઓની સંખ્યા ઘનતા અને d એ વ્યાસ છે.

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ (POINTS TO PONDER)

1. પ્રવાહી (Fluid)નું દબાણ ફક્ત દીવાલ પર નથી લાગતું. દબાણ પ્રવાહીમાં દરેક જગ્યાએ લાગે છે. પાત્રમાં રહેલા વાયુનું કોઈ પણ સ્તર સમતોલન સ્થિતિમાં હોય છે કારણ કે, આ સ્તરની બંને બાજુ સમાન દબાણ હોય છે.
2. વાયુમાં આંતરઆણ્વિક અંતરો માટે આપણે અતિરેક પૂર્વક ના વિચારવું જોઈએ. સામાન્ય દબાણ અને તાપમાને, ઘન અને પ્રવાહીના આંતર આણ્વિકઅંતરો કરતાં તે લગભગ 10 ગણું કે તેની આસપાસનું હોય છે. તફાવત એ છે કે, વાયુમાં સરેરાશ મુક્તપથ આંતરઆણ્વિક અંતર કરતાં 100 ગણો છે અને અણુના પરિમાણ કરતાં 1000 ગણો છે.
3. ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ આ રીતે દર્શાવી શકાય :

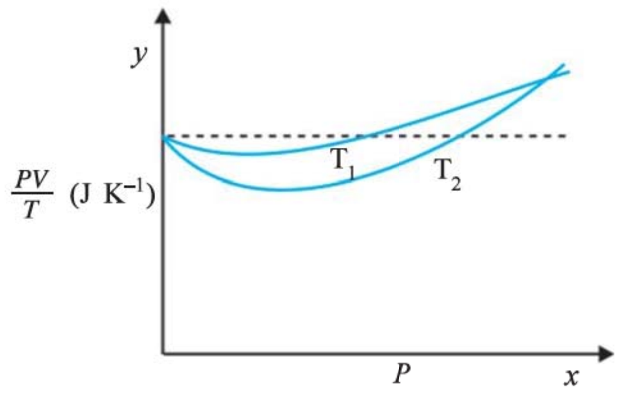
   તાપીય સંતુલનમાં રહેલ દરેક મુક્તતાના અંશની ઊર્જા $\frac{1}{2}k_B T$ છે. અણુની કુલ ઊર્જા દર્શાવતા સમીકરણમાં આવતું દરેક દ્વિઘાત (Quadratic) પદ મુક્તતાના અંશ તરીકે ગણવું જોઈએ. આમ, દરેક કંપન પ્રકાર, $2 \times \frac{1}{2}k_B T = k_B T$ ઊર્જાને અનુરૂપ 2 (1 નહીં) મુક્તતાના અંશો (ગતિ અને સ્થિતિઊર્જા પ્રકારના) આપે.
4. ઓરડામાં રહેલી હવાના અણુઓ તેમની વધુ (ઊંચી) ઝડપ અને સતત અથડામણોના કારણે નીચે પડીને જમીન પર (ગુરુત્વાકર્ષણના કારણે) બેસી જતા નથી. સંતુલનની પરિસ્થિતિમાં ઓછી ઊંચાઈએ ઘનતામાં ખૂબ સામાન્ય વધારો (વાતાવરણમાં હોય છે તેમ) હોય છે. આ અસર ઓછી હોય છે કારણ કે સામાન્ય ઊંચાઈઓએ અણુઓની સ્થિતિઊર્જા (mgh), સરેરાશ ગતિ ઊર્જા $\frac{1}{2}mv^2$ કરતાં ઘણી ઓછી હોય છે.
5. $\langle v^2 \rangle$ હંમેશ $(\langle v \rangle)^2$ જેટલું નથી હોતું. વર્ગીત મૂલ્યનું સરેરાશ હંમેશાં સરેરાશના વર્ગ જેટલું હોય એ જરૂરી નથી. આ વિધાન માટે તમે ઉદાહરણો શોધી શકો.

સ્વાધ્યાય

13.1 STP એ ઑક્સિજન વાયુ દ્વારા મોલર કદ અને ઘેરાયેલ વાસ્તવિક કદનો ગુણોત્તર શોધો. ઑક્સિજનના અણુનો વ્યાસ 3 Å લો.

13.2 પ્રમાણભૂત તાપમાન અને દબાણે (STP : 1 વાતાવરણનું દબાણ, 0 °C) 1 મોલ જેટલા કોઈ પણ (આદર્શ) વાયુ દ્વારા ઘેરાયેલ કદને મોલર કદ કહે છે. દર્શાવો કે તે 22.4 લિટર છે.

13.3 બે અલગ તાપમાને 1.00×10^{-3} kg ઑક્સિજન વાયુ માટે PV/T વિરુદ્ધ Pનો આલેખ આકૃતિ 13.8માં દર્શાવ્યો છે.



આકૃતિ 13.8

(a) ત્રુટક વક્ર શું દર્શાવે છે ?
(b) શું સાચું છે : $T_1 > T_2$ કે $T_1 < T_2$?
(c) વક્રો y-અક્ષને જ્યાં મળે છે ત્યાં PV/Tનું મૂલ્ય શું છે ?
(d) જો આપણે 1.00×10^{-3} kg હાઇડ્રોજન માટે આવા વક્રો મેળવ્યા હોત, તો આ વક્રો y-અક્ષને જ્યાં મળે છે ત્યાં આપણને શું આ જ મૂલ્ય મળત ? જો ના, તો હાઇડ્રોજનના કયા દળ માટે આપણને (આલેખના નીચા દબાણ અને ઊંચા તાપમાનવાળા વિસ્તારમાં) PV/Tનું એ જ મૂલ્ય મળે ? (H_2નું મોલર દળ = 2.02 u, O_2 નું મોલર દળ = 32.0 u, R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1})

13.4 30 લિટર કદના ઑક્સિજનના બાટલાનું 27 °C તાપમાને પ્રારંભિક ગેજ દબાણ (Guage Pressure) 15 atm છે. બાટલામાંથી થોડો ઑક્સિજન કાઢ્યા પછી, માપનનું ગેજ દબાણ ઘટીને 11 atm અને તાપમાન ઘટીને 17 °C થાય છે. બાટલામાંથી બહાર કાઢેલા ઑક્સિજનનું દળ શોધો. (R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1}, O_2નું મોલર દળ = 32 u)

13.5 એક તળાવની 40 m ઊંડાઈએથી 12 °C તાપમાને 1.0 cm^3 કદનો હવાનો એક પરપોટો ઉપર તરફ આવે છે. જ્યારે તે સપાટી પર આવે, કે જેનું તાપમાન 35 °C છે, ત્યારે તેનું કદ કેટલું હશે ?

13.6 27 °C તાપમાન અને 1 atm દબાણે 25.0 m^{3}ની ક્ષમતાવાળા ઓરડામાં રહેલા (ઑક્સિજન, નાઇટ્રોજન, હવાની બાષ્પ અને બંધારણના બીજા વાયુઓ પણ સમાવીને) હવાના અણુઓની સંખ્યા ગણો.

13.7 હિલિયમ પરમાણુ માટે (i) ઓરડાના તાપમાન (27 °C), (ii) સૂર્યની સપાટી પરના તાપમાન (6000 K) (iii) 10 મિલિયન કૅલ્વિન (તારાના કેન્દ્રનું લાક્ષણિક તાપમાન) માટે સરેરાશ ઉષ્મીય ઊર્જા ગણો.

13.8 સમાન ક્ષમતાનાં ત્રણ વાયુ પાત્રોમાં વાયુ સમાન તાપમાન અને દબાણે રહેલા છે. પહેલું પાત્ર નિયૉન (એક પરમાણ્વિક) ધરાવે છે, બીજું પાત્ર ક્લોરિન (દ્વિપરમાણ્વિક) અને ત્રીજું યુરેનિયમ હેક્ઝાફ્લોરાઇડ (બહુ પરમાણ્વિક) ધરાવે છે. શું દરેક પાત્રમાં તદનુરૂપ સમાન સંખ્યાના અણુઓ હશે ? શું ત્રણે કિસ્સામાં સરેરાશ વર્ગિત ઝડપનું વર્ગમૂળ સમાન હશે ? જો ના, તો કયા વિસ્તારમાં v_{rms} મહત્તમ હશે ?

13.9 કયા તાપમાને વાયુપાત્રમાં રહેલા આર્ગનની સરેરાશ વર્ગિત ઝડપનું વર્ગમૂળ –20 °C એ રહેલા હિલિયમ વાયુના અણુની *rms* ઝડપ જેટલું હશે ? (Arનું પરમાણુ દળ = 39.9 u, Heનું પરમાણુદળ = 4.0 u)

13.10 2.0 atm અને 17 °C તાપમાને નાઇટ્રોજન ધરાવતા વાયુપાત્રમાં નાઇટ્રોજનના અણુ માટે સરેરાશ મુક્તપથ અને અથડામણનો દર (આવૃત્તિ) શોધો. નાઇટ્રોજન અણુની ત્રિજ્યા આશરે 1.0 Å લો. અથડામણના સમયને અણુની બે ક્રમિક અથડામણો વચ્ચેના સમય સાથે સરખાવો. (N_2ના અણુનું દળ = 28.0 u).

વધારાનું સ્વાધ્યાય

13.11 એક મીટર લાંબો પાઈપ (નળી) (Bore) સમક્ષિતિજ રાખેલો છે, (તેનો બીજો છેડો બંધ કરેલો છે) જે 76 cm લાંબો પારાનો આડો સ્તંભ (Thread) ધરાવે છે અને તે 15 cm જેટલો હવાના સ્તંભ રચે (Traps) છે. જો નળીને તેનો ખુલ્લો છેડો તળિયા તરફ રહે તેમ શિરોલંબ રાખીએ તો શું થશે ?

13.12 કોઈ ચોક્કસ સાધનમાંથી હાઇડ્રોજનના ભળવા (પ્રસરવા) (Diffusion)નો સરેરાશ દર 28.7 $cm^3\ s^{-1}$ છે. આ જ પરિસ્થિતિઓમાં બીજા વાયુ માટે ભળવાનો સરેરાશ દર 7.2 $cm^3\ s^{-1}$ માપવામાં આવે છે. આ વાયુ કયો હશે તે શોધો.

(**સૂચન :** ગ્રેહામના પ્રસરણના નિયમનો ઉપયોગ કરો : $R_1 / R_2 = (M_2 / M_1)^{1/2}$, જ્યાં R_1, R_2 એ વાયુઓ 1 અને 2ના પ્રસરવાનો દર છે, તથા M_1 અને M_2 અનુક્રમે તેમના મોલર દળ છે. આ નિયમ ગતિવાદ પરથી સીધો તરી આવે છે.)

13.13 સંતુલનમાં રહેલા એક વાયુની ઘનતા અને દબાણ તેના કદમાં સમાન રીતે વહેંચાયેલા છે. આ ફક્ત તો જ શક્ય છે કે જ્યારે બહારની પરિસ્થિતિઓ અસર ન કરતી હોય. દા.ત., ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ વાયુના સ્તંભની ઘનતા (અને દબાણ) એક ધાર્યા (સમાન) હોતા નથી. તમે અપેક્ષા રાખતા હશો તેમ, તેની ઘનતા ઊંચાઈ સાથે ઘટે છે. ચોક્કસ અવલંબન એ જાણીતા વાતાવરણના નિયમ પરથી આપી શકાય છે,

$$n_2 = n_1 \exp\left[-mg\,(h_2 - h_1) / k_B T \right]$$

જ્યાં n_2, n_1 અનુક્રમે ઊંચાઈઓ h_2 અને h_1 માટે સંખ્યા ઘનતા છે. આ સમીકરણનો ઉપયોગ કરીને સંતુલનમાં રહેલા કલીલ દ્રાવણ (Suspension)ના નળાકારિય સ્તંભના ઠારણ (Sedimentation) સંતુલન માટેનું સમીકરણ,

$$n_2 = n_1 \exp\left[-mg\,N_A(\rho - \rho')\,(h_2 - h_1) / (\rho R T) \right]$$

મેળવો. જ્યાં, ρ એ કલીલ કણની અને ρ' તેની આસપાસના માધ્યમની ઘનતા છે. (N_A ઍવોગેડ્રો આંક છે અને R એ સાર્વત્રિક વાયુ-અચળાંક છે.)

(**સૂચન :** આર્કિમિડિઝના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને કલીલ કણ (Suspended Particle)નું આભાસી (Apparent) વજન શોધો.)

13.14 કેટલાક ઘન અને પ્રવાહીઓની ઘનતા નીચે આપેલી છે. તેમના પરમાણુઓના કદ વિશે અંદાજ આપો :

પદાર્થ	પરમાણ્વિક દળ (u)	ઘનતા (10^3 kg m^{-3})
કાર્બન (હીરો)	12.01	2.22
સોનું	197.00	19.32
નાઇટ્રોજન (પ્રવાહી)	14.01	1.00
લિથિયમ	6.94	0.53
ફ્લોરીન (પ્રવાહી)	19.00	1.14

(**સૂચન :** ઘન અથવા પ્રવાહી અવસ્થામાં અણુઓ 'ખીચોખીચ ગોઠવાયેલા' છે, તેમ માનો અને ઍવોગેડ્રો અંકના જાણીતા મૂલ્યનો ઉપયોગ કરો. જોકે તમારા વિવિધ પરમાણુના પરિમાણ માટે તમને મળતી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ બહુ અક્ષરશઃ (Literally) લેવી જોઈએ નહિ. 'ગીચોગીચ ભરાયેલા'-એવી અપરિપક્વ સન્નિકટતાને લીધે પરિણામો માત્ર એટલું જ સૂચવે છે કે પરમાણુનાં પરિમાણો કેટલાંક Åના ક્રમનાં હોય છે.)

પ્રકરણ 14

દોલનો (OSCILLATIONS)

14.1 પ્રસ્તાવના

14.2 આવર્ત અને દોલિત ગતિઓ

14.3 સરળ આવર્તગતિ

14.4 સરળ આવર્તગતિ અને નિયમિત વર્તુળમય ગતિ

14.5 સરળ આવર્તગતિમાં વેગ અને પ્રવેગ

14.6 સરળ આવર્તગતિ માટે બળનો નિયમ

14.7 સરળ આવર્તગતિમાં ઊર્જા

14.8 સરળ આવર્તગતિ કરતાં કેટલાંક તંત્રો

14.9 અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ

14.10 પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો અને અનુનાદ

સારાંશ

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

સ્વાધ્યાય

વધારાના સ્વાધ્યાય

14.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે જુદા જુદા પ્રકારની ગતિઓનો અનુભવ કરીએ છીએ. તમે તેમાંની કેટલીક ગતિઓ વિશે પહેલેથી જ શીખ્યાં છો. દા. ત., સુરેખ ગતિ અને પ્રક્ષિપ્ત ગતિ. આ બંને ગતિઓ અપુનરાવર્તિત છે. આપણે સૂર્ય મંડળના ગ્રહોની નિયમિત વર્તુળમય ગતિ અને કક્ષીય ગતિ વિશે પણ શીખ્યાં છીએ. આ કિસ્સાઓમાં, ગતિનું એક ચોક્કસ સમયગાળા પછી પુનરાવર્તન થાય છે, એટલે કે તે આવર્ત (periodic) છે. તમારા બાળપણમાં તમે પારણામાં અથવા હીંચકા પર ઝૂલતા આનંદ માણ્યો જ હશે. આ બંને ગતિઓ પુનરાવર્તિત પ્રકારની છે, પરંતુ તે કોઈ ગ્રહની આવર્તગતિથી અલગ છે. અહીં પદાર્થ એ નિશ્ચિત (મધ્યમાન) સ્થાનને અનુલક્ષીને આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે. આગળ-પાછળની આવી આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો છે : નદીમાં ઉપર-નીચે (હાલક-ડોલક) થતી બોટ, વરાળયંત્રમાં આગળ-પાછળ થતો પિસ્ટન વગેરે. (આ તમામ પદાર્થો આગળ-પાછળ આવર્તગતિ કરે છે.) આવી ગતિને દોલિત ગતિ (oscillatory motion) કહેવામાં આવે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ ગતિનો અભ્યાસ કરીશું.

ભૌતિકશાસ્ત્ર માટે દોલિત ગતિનો અભ્યાસ એ પાયાનો છે; ઘણી ભૌતિક ઘટનાઓની સમજ માટે તેની વિભાવના જરૂરી છે. સિતાર, ગિટાર અથવા વાયોલિન જેવાં સંગીતનાં સાધનોમાં, આપણને કંપન કરતાં તાર જણાય છે, જે આનંદદાયક ધ્વનિ ઉત્પન્ન કરે છે. ટેલિફોન અને સ્પીકર સિસ્ટમ્સમાં ડ્રમ્સ અને ડાયફ્રામમાંના પડદા (મેમ્બ્રેન) તેમના નિશ્ચિત સ્થાનને અનુલક્ષીને કંપન કરે છે. હવાના અણુઓનાં કંપનો ધ્વનિના પ્રસરણને શક્ય બનાવે છે. તેવી જ રીતે, ઘન પદાર્થમાં અણુઓ તેમના સંતુલન (નિશ્ચિત) સ્થાનને અનુલક્ષીને દોલનો કરે છે. તેમના દોલનની સરેરાશ ઊર્જા એ તાપમાનના સમપ્રમાણમાં હોય છે. AC પાવર સપ્લાયમાંથી મળતો વૉલ્ટેજ એ પણ દોલન કરે છે અને તે તેના સરેરાશ મૂલ્ય (શૂન્ય)ની આસપાસ એકાંતરે ધન અને ઋણ થાય છે.

સામાન્ય રીતે આવર્તગતિ અને ખાસ કરીને દોલિત ગતિના વર્ણનમાં, આવર્તકાળ (periodic time/period), આવૃત્તિ (frequency), સ્થાનાંતર (displacement), કંપવિસ્તાર (amplitude) અને કળા (phase) જેવી કેટલીક મૂળભૂત વિભાવનાઓની જરૂર પડે છે. આ ખ્યાલોને (વિભાવનાઓને) હવે પછીના પરિચ્છેદમાં રજૂ કરવામાં આવ્યા છે.

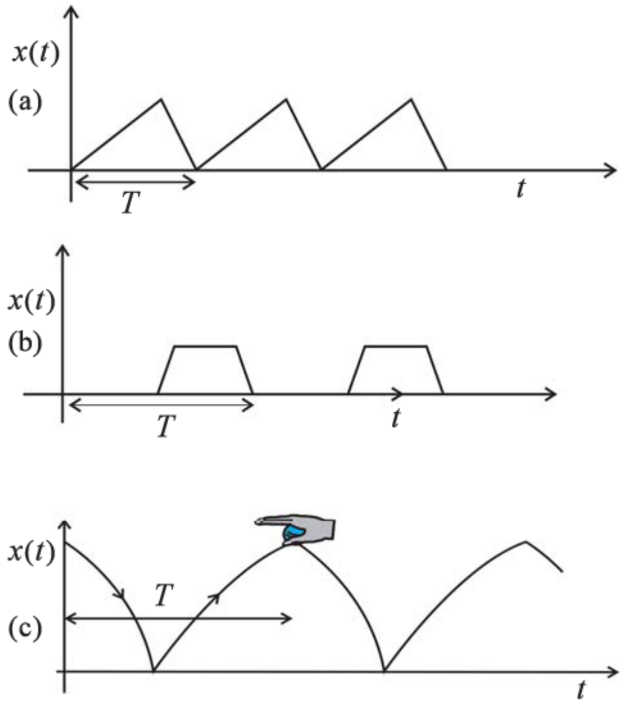
14.2 આવર્ત અને દોલિત ગતિઓ (PERIODIC AND OSCILLATORY MOTIONS)

આકૃતિ 14.1 કેટલીક આવર્ત ગતિઓ દર્શાવે છે. ધારો કે કોઈ એક જંતુ એક ઢોળાવવાળા માર્ગ પર ઉપર ચઢે છે અને નીચે પડે છે અને તે પ્રારંભિક બિંદુ પર પાછું આવે છે. આ ક્રિયાનું તે સમાનરૂપે પુનરાવર્તન કરે છે. જો તમે જમીનથી તેની ઊંચાઈ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ દોરશો તો તે આકૃતિ 14.1 (a) જેવો દેખાશે. જો કોઈ બાળક એક પગથિયું ઉપર ચઢે અને નીચે આવે, અને આ ક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરે, તો જમીન ઉપરની તેની ઊંચાઈ એ આકૃતિ 14.1(b)માં દર્શાવ્યા જેવી દેખાશે. જ્યારે તમે જમીન પરથી બૉલને તમારી હથેળી અને જમીન વચ્ચે ઉછાળવાની રમત રમો છો ત્યારે, તેની ઊંચાઈ વિરુદ્ધ સમયનો આલેખ એ આકૃતિ 14.1 (c) જેવો દેખાશે. નોંધો કે આકૃતિ 14.1 (c)માંના બંને વક્ર ભાગો એ એક પરવલયના ભાગો છે જે ન્યૂટનના ગતિના સમીકરણ દ્વારા આપવામાં આવે છે (જુઓ પરિચ્છેદ 3.6).

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ નીચે તરફની ગતિ માટે, અને

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ ઉપર તરફની ગતિ માટે

જે દરેક કિસ્સામાં પ્રારંભિક વેગ uનાં જુદાં મૂલ્યો માટે છે. આ આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો છે. આમ, જે ગતિ પોતે સમયનાં નિયમિત અંતરાલો પર પુનરાવર્તન કરે છે તેને **આવર્તગતિ (Periodic Motion)** કહેવામાં આવે છે.



આકૃતિ 14.1 આવર્તગતિનાં ઉદાહરણો. દરેક કિસ્સામાં આવર્તકાળ T દર્શાવેલ છે.

ઘણી વખત આવર્તગતિ કરતાં પદાર્થને તેના પથમાં ક્યાંક એક સંતુલન સ્થિતિ હોય છે. જ્યારે પદાર્થ આ સ્થિતિમાં હોય ત્યારે તેના પર કુલ ચોખ્ખું (Net) બાહ્ય બળ લાગતું નથી. તેથી, જો તેને ત્યાં સ્થિર છોડી દેવામાં આવે તો તે કાયમ માટે ત્યાં જ રહે છે. જો પદાર્થને આ સ્થાનથી નાનું સ્થાનાંતર આપવામાં આવે, તો એક એવું બળ કાર્યરત થાય છે જે પદાર્થને સંતુલન બિંદુ તરફ લાવવાનો પ્રયાસ કરે છે, જે **દોલનો** (oscillations) કે **કંપનો** (vibrations) ઉત્પન્ન કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, વાટકા (બાઉલ)માં મૂકવામાં આવેલ બૉલ તેના તળિયે સંતુલનમાં હશે. જો આ બિંદુથી તેને થોડું સ્થાનાંતરિત કરવામાં આવે, તો તે વાટકામાં દોલનો કરશે. દરેક દોલિત ગતિ આવર્ત હોય છે, પરંતુ દરેક આવર્તગતિએ દોલિત હોય તે જરૂરી નથી. વર્તુળમય (ચક્રીય-Circular Motion) ગતિ આવર્તગતિ છે, પરંતુ તે દોલિત નથી.

દોલનો અને કંપનો વચ્ચે કોઈ નોંધપાત્ર તફાવત નથી. જ્યારે આવૃત્તિ ઓછી હોય છે (એક વૃક્ષની શાખાનાં દોલનો જેવી), ત્યારે આપણે તેને દોલન કહીએ છીએ, જ્યારે આવૃત્તિ વધુ હોય છે (સંગીતનાં સાધનના તારનાં કંપનો જેવી), ત્યારે આપણે તેને કંપન કહીએ છીએ.

સરળ આવર્ત (પ્રસંવાદી / harmonic) ગતિ દોલિત ગતિનું સૌથી સાદું સ્વરૂપ છે. જ્યારે દોલિત પદાર્થ પરનું બળ તેના મધ્યમાન સ્થાન (જે સંતુલન સ્થાન પણ છે) થી સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોય, ત્યારે આ ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે. વધુમાં, તેના દોલનના કોઈ પણ તબક્કે, આ બળ સંતુલન સ્થિતિ તરફ દિશાન્વિત હોય છે.

વ્યવહારમાં, ઘર્ષણ અને અન્ય દ્વારા ઉદ્‌ભવતાં અવમંદનના કારણોને લીધે દોલન કરતાં પદાર્થો આખરે તેમની સંતુલન સ્થિતિ પર સ્થિર સ્થિતિમાં આવે છે. જોકે, કેટલાક બાહ્ય આવર્ત પરિબળ દ્વારા તેઓને દોલનમાં રાખવા માટે ફરજ પાડી શકાય છે. આપણે અવમંદિત (Damped) અને પ્રણોદિત (Forced) દોલનોની ઘટનાઓની ચર્ચા આ પ્રકરણના અંતમાં કરીશું.

કોઈ પણ દ્રવ્ય માધ્યમને મોટી સંખ્યામાં યુગ્મ દોલકો (coupled oscillators)ના સમૂહ તરીકે જોઈ શકાય છે. કોઈ માધ્યમનાં ઘટકોનાં સામૂહિક આવર્તનો પોતાને તરંગો સ્વરૂપે પ્રગટ કરે છે. તરંગોનાં ઉદાહરણોમાં પાણીના તરંગો, ધરતીકંપના તરંગો, વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોનો સમાવેશ થાય છે. તરંગની ઘટનાઓનો આપણે આગામી પ્રકરણમાં અભ્યાસ કરીશું.

14.2.1 આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ (Period and frequency)

આપણે જોયું છે કે કોઈ પણ ગતિ જે સમયનાં નિયમિત અંતરાલો પર પોતે પુનરાવર્તન કરે છે તેને **આવર્તગતિ** કહેવામાં આવે છે. **સમયનો લઘુતમ અંતરાલ કે જે પછી આ ગતિનું પુનરાવર્તન થાય છે તેને તેનો આવર્તકાળ (periodic time / period) કહેવાય છે.** ચાલો આ આવર્તકાળને (લઘુતમ સમયગાળાને) સંજ્ઞા T દ્વારા દર્શાવીએ. તેનો S.I. એકમ

સેકન્ડ (second) છે. આવર્તગતિ કે જે સેકન્ડના સ્કેલ પર ખૂબ ઝડપી અથવા ખૂબ ધીમી હોય, તો તેના માટે સમયના અન્ય અનુકૂળ એકમોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ક્વાર્ટ્ઝ સ્ફટિકનાં કંપનોનો સમયગાળો માઈક્રોસેકન્ડ્સ (10^{-6} s)ના એકમોમાં દર્શાવવામાં આવે છે જેને સંક્ષિપ્તમાં μs વડે દર્શાવાય છે. બીજી તરફ, બુધ (Mercury) ગ્રહનો કક્ષીય આવર્તકાળ 88 પૃથ્વી દિવસ છે. હેલીનો ધૂમકેતુ દર 76 વર્ષ પછી દેખાય છે.

Tનું વ્યસ્ત એ, એકમ સમયમાં થતાં પુનરાવર્તનોની સંખ્યા આપે છે. આ રાશિને **આવર્તગતિની આવૃત્તિ** કહેવામાં આવે છે. તેને પ્રતીક ν દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. આમ, ν અને T વચ્ચેનો સંબંધ

$$\nu = 1/T \tag{14.1}$$

છે. આમ, νનો એકમ s^{-1} છે. હેઈનરિચ રુડોલ્ફ હર્ટ્ઝ (1857-1894)ના રેડિયો તરંગોના સંશોધન બાદ, આવૃત્તિના એકમને વિશેષ નામ આપવામાં આવ્યું છે. તેને હર્ટ્ઝ (hertz) (સંક્ષેપમાં Hz) કહેવામાં આવે છે. આમ,

$$1 \text{ હર્ટ્ઝ(hertz)} = 1\ \text{Hz} = 1 \text{ દોલન પ્રતિ સેકન્ડ} = 1\ s^{-1} \tag{14.2}$$

નોંધ કરો કે આવૃત્તિ ν, એ પૂર્ણાંક જ હોય તે જરૂરી નથી.

▶ *ઉદાહરણ 14.1* સામાન્ય રીતે માનવહૃદય એક મિનિટમાં 75 વખત ધબકતું જણાય છે. તેની આવૃત્તિ અને આવર્તકાળની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

હૃદયના ધબકારની આવૃત્તિ $= 75/(1\ \text{min})$

$= 75/(60\ \text{s})$

$= 1.25\ s^{-1}$

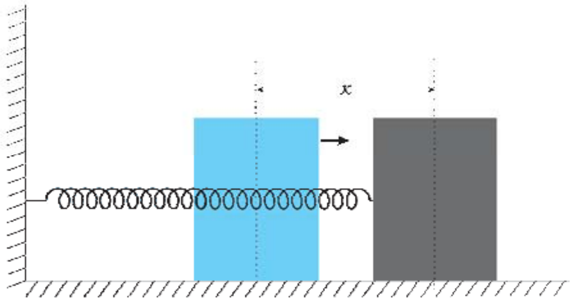
$= 1.25\ \text{Hz}$

આવર્તકાળ $T = 1/(1.25\ s^{-1})$

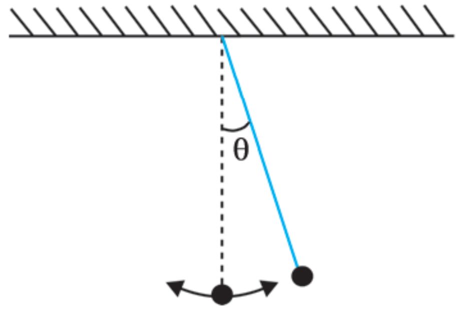
$= 0.8\ \text{s}$ ◀

14.2.2 સ્થાનાંતર (Displacement)

પરિચ્છેદ 4.2માં, આપણે કણના સ્થાનાંતરને તેના સ્થાનસદિશના ફેરફાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે. આ પ્રકરણમાં આપણે સ્થાનાંતર શબ્દનો ઉપયોગ વધુ વ્યાપક અર્થમાં કરીશું. સ્થાનાંતર એ આપણે ધ્યાનમાં લીધેલ કોઈ પણ ભૌતિક ગુણધર્મના સમય સાથેના બદલાવ માટે ઉલ્લેખાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ સપાટી પર સ્ટીલના એક બૉલની સુરેખ ગતિના કિસ્સામાં, પ્રારંભ બિંદુથી સમયના વિધેય તરીકે તેનું અંતર એ સ્થાન-સ્થાનાંતર છે. ઉદ્ગમબિંદુની પસંદગી એ સગવડતાની બાબત છે. એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ બ્લૉકનો વિચાર કરો કે, જેનો બીજો છેડો દૃઢ દીવાલ પર જડેલ હોય [જુઓ આકૃતિ 14.2 (a)]. સામાન્ય રીતે, તેની સંતુલન સ્થિતિમાંથી પદાર્થનું સ્થાનાંતર માપવું અનુકૂળ છે. એક દોલન કરતા સાદા લોલક માટે, સમયના વિધેય તરીકે શિરોલંબ (ઊર્ધ્વ)થી તેના કોણને સ્થાનાંતર ચલ તરીકે લઈ શકાય છે. [જુઓ આકૃતિ 14.2(b)]. સ્થાનાંતર પદને હંમેશાં સ્થાનના સંદર્ભમાં જ લેવું જોઈએ એવું નથી. ઘણા અન્ય પ્રકારના સ્થાનાંતર ચલો પણ હોઈ શકે છે.



આકૃતિ **14.2 (a)** *એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ બ્લૉક, જેનો બીજો છેડો એક દૃઢ દીવાલ પર જડવામાં આવેલ છે. આ બ્લૉક એક ઘર્ષણરહિત સપાટી પર ગતિ કરે છે. આ બ્લૉકની ગતિને સંતુલન સ્થિતિથી તેનું અંતર અથવા સ્થાનાંતર xના પદમાં વર્ણવી શકાય છે.*



આકૃતિ **14.2 (b)** *દોલન કરતું સાદું લોલક; તેની ગતિને ઊર્ધ્વથી કોણીય સ્થાનાંતર θના પદમાં વર્ણવી શકાય છે.*

એક કૅપેસિટર પરનો વૉલ્ટેજ, એ.સી. સર્કિટમાં સમય સાથે બદલાય છે, આમ વૉલ્ટેજ સ્થાનાંતર ચલ પણ છે. એ જ રીતે, ધ્વનિતરંગના પ્રસરણમાં દબાણનું સમય સાથે બદલાવવું, પ્રકાશના તરંગમાં બદલાતા વિદ્યુત અને ચુંબકીયક્ષેત્રો અલગ અલગ સંદર્ભોમાં સ્થાનાંતરનાં ઉદાહરણો છે. સ્થાનાંતર ચલ ધન અને ઋણ એમ બંને મૂલ્યો લઈ શકે છે. દોલનો પરના પ્રયોગોમાં, સ્થાનાંતરને અલગ અલગ સમયે માપવામાં આવે છે.

સ્થાનાંતરને સમયના ગાણિતિક વિધેય દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે. આવર્તગતિના કિસ્સામાં, આ વિધેય સમય પર આવર્ત છે. અતિસરળ આવર્ત વિધેયોમાંથી એકને

$$f(t) = A \cos \omega t \tag{14.3a}$$

તરીકે રજૂ કરાય છે.

જો આ વિધેયનો કોણાંક (argument), ωt એ 2π રેડિયનના પૂર્ણાંક ગુણાંકમાં વધે, તો આ વિધેયનું મૂલ્ય એનું એ જ રહે છે. આમ, આ વિધેય $f(t)$ એ આવર્ત છે અને તેનો

આવર્તકાળ T નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14.3b)$$

આમ, વિધેય $f(t)$એ આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત છે,

$f(t) = f(t + T)$

જો આપણે sine વિધેય, $f(t) = A\sin \omega t$ લઈએ તોપણ આ પરિણામ દેખીતી રીતે સાચું છે. વધુમાં sine અને cosine વિધેયોનું રેખીય સંયોજન જેમકે,

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (14.3c)$$

એ પણ તે જ આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત વિધેય છે.

$A = D \cos \phi$ અને $B = D \sin \phi$

લેતાં સમીકરણ (14.3c)ને

$$f(t) = D \sin (\omega t + \phi) \quad (14.3d)$$

તરીકે લખી શકાય છે,

અહીં D અને ϕ અચળાંકોને

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ અને } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

દ્વારા આપવામાં આવે છે.

sine અને cosine આવર્ત વિધેયોનું મહત્ત્વ ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી, જીન બાપ્ટિસ્ટ જોસેફ ફોરિયર (1768-1830) દ્વારા સાબિત થયેલ નોંધપાત્ર પરિણામને લીધે છે; **કોઈ પણ આવર્ત વિધેયને યોગ્ય સહગુણાંકો સાથેના વિવિધ આવર્તકાળના sine અને cosine વિધેયોના સંપાતપણા તરીકે વ્યક્ત કરી શકાય છે.**

▶ *ઉદાહરણ 14.2* નીચે આપેલ સમયનાં વિધેયોમાંથી કયું (a) આવર્તગતિ અને (b) બિનઆવર્તગતિ દર્શાવે છે ? આવર્તગતિના દરેક કિસ્સા માટે આવર્તકાળ આપો [ω એ કોઈ ધન અચળાંક છે].

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$

(ii) $\sin \omega t + \cos 2 \omega t + \sin 4 \omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log (\omega t)$

ઉકેલ

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$ એ આવર્ત વિધેય છે.

તેને $\sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4)$ વડે પણ લખી શકાય.

હવે $\sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4) = \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$= \sqrt{2} \sin [\omega (t + 2\pi/\omega) + \pi/4]$

આ વિધેયનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega$ છે.

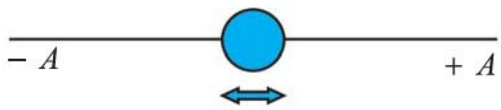
(ii) આ આવર્તગતિનું એક ઉદાહરણ છે. એ નોંધવામાં આવે કે દરેક પદ વિવિધ કોણીય આવૃત્તિ સાથે આવર્ત વિધેય રજૂ કરે છે. સમયના જે નાનામાં નાના અંતરાલ બાદ વિધેય તેના મૂલ્યનું પુનરાવર્તન કરે છે તે આવર્તકાળ છે. તેથી $\sin \omega t$ નો આવર્તકાળ $T_0 = 2\pi/\omega$ છે; $\cos 2\omega t$ નો આવર્તકાળ $\pi/\omega = T_0/2$ છે અને $\sin 4\omega t$ નો આવર્તકાળ $2\pi/4\omega = T_0/4$ છે. પ્રથમ પદનો આવર્તકાળ છેલ્લાં બે પદના આવર્તકાળના ગુણાંકમાં છે. તેથી T_0 એ સમયનો એ લઘુતમ અંતરાલ છે કે જે પછી ત્રણેય પદોનો સરવાળો પુનરાવર્તિત થાય છે અને આમ સરવાળો એક આવર્ત વિધેય છે જેનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega$ છે.

(iii) વિધેય $e^{-\omega t}$ આવર્ત નથી તે સમયના વધારા સાથે એકપક્ષીય રીતે ઘટે છે અને $t \to \infty$ માટે શૂન્ય તરફ દોરાઈ જાય છે અને આમ, તેના મૂલ્યનું ક્યારેય પુનરાવર્તન થતું નથી.

(iv) વિધેય $\log (\omega t)$ સમય t સાથે એકપક્ષીય રીતે વધે છે. તેથી, તેના મૂલ્યનું ક્યારેય પુનરાવર્તન થતું નથી અને તે બિનઆવર્ત વિધેય છે. તે નોંધવામાં આવે કે જેમ $t \to \infty$, તેમ $\log (\omega t)$ અપસારિત થઈ ∞ સુધી પહોંચે છે. તેથી, તે કોઈ પણ પ્રકારનું ભૌતિક સ્થાનાંતર રજૂ કરી શકતું નથી. ◀

14.3 સરળ આવર્તગતિ (SIMPLE HARMONIC MOTION)

ચાલો, આપણે આકૃતિ 14.3માં બતાવ્યા પ્રમાણે X-અક્ષના ઊગમબિંદુથી ચરમસીમાઓ $+A$ અને $-A$ ની વચ્ચે આગળ-પાછળની બાજુએ દોલન કરતાં એક કણનો વિચાર કરીએ.



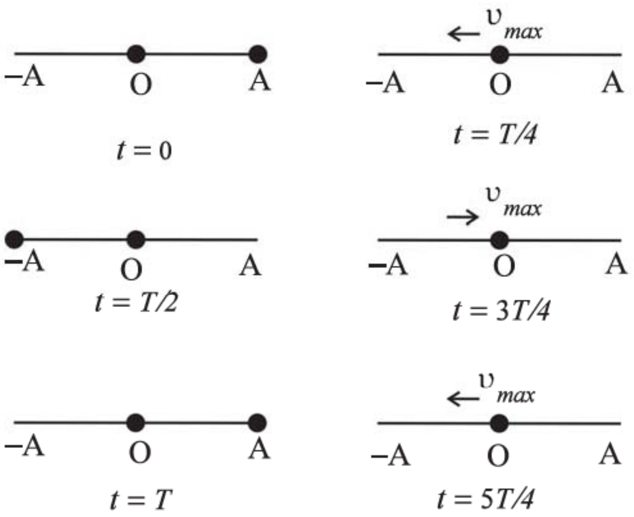
આકૃતિ **14.3** *X-અક્ષના ઊગમબિંદુને અનુલક્ષીને* $+A$ *અને* $-A$ *સીમાઓ* વચ્ચે આગળ-પાછળ કંપન કરતો કણ

આવી દોલિત ગતિ ત્યારે જ આવર્ત (પ્રસંવાદી) કહી શકાય કે જ્યારે આ કણનું ઊગમબિંદુથી સ્થાનાંતર સમય સાથે નીચે આપેલ સંબંધ પ્રમાણે બદલાતું હોય :

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \quad (14.4)$$

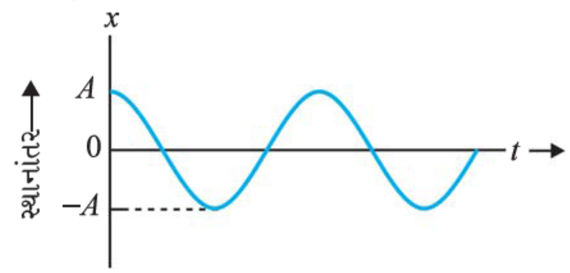
જ્યાં A, ω અને ϕ એ અચળાંકો છે.

આમ, કોઈ પણ આવર્તગતિ એ સરળ આવર્તગતિ નથી પરંતુ તે ગતિ કે જેમાં સ્થાનાંતર એ સમયનું સાઈન્યુસોઈડલ (એટલે કે sine પ્રકારનું જયાવર્તી) વિધેય છે. તે સ.આ.ગ. છે. આકૃતિ 14.4 એ, સમયનો દરેક અંતરાલ $T/4$ હોય તેવા જુદા જુદા સમયે સ.આ.ગ. કરતા કણનું સ્થાન દર્શાવે છે, જ્યાં T એ ગતિનો આવર્તકાળ છે.



આકૃતિ 14.4 *સમયનાં અલગ અલગ મૂલ્યો $t = 0, T/4, T/2, 3T/4, T, 5T/4$ માટે સ.આ.ગ. કરતાં કણના સ્થાન. જે સમય બાદ આ ગતિ તેનું પુનઃઆવર્તન કરે છે તે T છે. T એ અચળ રહે છે અને તે તમે પ્રારંભિક સ્થિતિ ($t = 0$) કઈ સ્થિતિ લો છો તેના પર આધારિત નથી. શૂન્ય સ્થાનાંતર ($x = 0$ પર) માટે ઝડપ મહત્તમ અને ગતિના અંત્ય બિંદુઓ પર ઝડપ શૂન્ય છે.*

આકૃતિ 14.5માં x વિરુદ્ધ tનો આલેખ રેખાંકિત કરેલ છે કે જે સ્થાનાંતરના સમય સાથેના સતત વિધેયનાં મૂલ્યો આપે છે. એ રાશિઓ A, ω અને ϕ કે જે આ સ.આ.ગ.ની લાક્ષણિકતાઓ નક્કી કરે છે તેને આકૃતિ *14.6*માં તેનાં પ્રમાણભૂત નામો સાથે દર્શાવેલ છે.

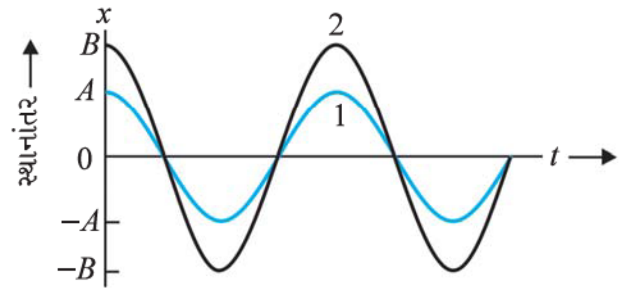


આકૃતિ 14.5 *સમયના સતત વિધેય તરીકે સરળ આવર્તગતિ માટે સ્થાનાંતર*

$x(t)$	: સ્થાનાંતર x એ સમય t નાં વિધેય તરીકે
A	: કંપવિસ્તાર (Amplitude)
ω	: કોણીય આવૃત્તિ (Angular Frequency)
$\omega t + \phi$	: કળા (સમય આધારિત) [Phase (Time-Dependent)]
ϕ	: કળા-અચળાંક (Phase Constant)

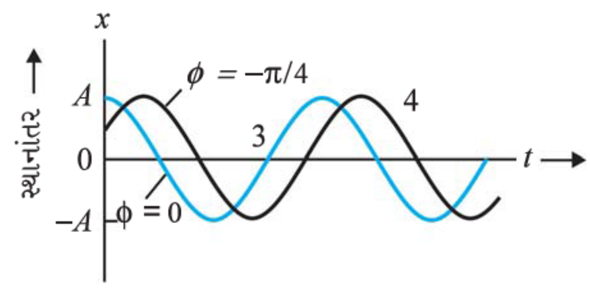
આકૃતિ 14.6 *સમીકરણ (14.4)માંની પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓનો અર્થ*

સ.આ.ગ.નો કંપવિસ્તાર A એ આ કણના મહત્તમ સ્થાનાંતરનું માન છે. [નોંધો, વ્યાપકતાના કોઈ પણ નુકસાન વગર, A ને ધન લઈ શકાય.] જેમ સમયનું cosine વિધેય એ $+1$ અને -1 ની વચ્ચે બદલાય છે, તેમ સ્થાનાંતર એ બે ચરમસીમાઓ (સીમાંત બિંદુઓ) $+A$ અને $-A$ ની વચ્ચે બદલાય છે. ω અને ϕ સમાન હોય તેવી પરંતુ જુદા કંપવિસ્તાર A અને B ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.7(a) માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.7 (a) *સમયના એક વિધેય તરીકે સ્થાનાંતરનો $\phi = 0$ માટે સમીકરણ (14.4) પરથી મેળવેલ આલેખ. વક્રો 1 અને 2 એ બે જુદા જુદા કંપવિસ્તારો A અને B માટેના છે.*

જ્યારે આપેલ સ.આ.ગ. માટે કંપવિસ્તાર A અચળ હોય ત્યારે, કોઈ પણ t સમયે આ કણની ગતિ-અવસ્થા (સ્થાન અને વેગ)ને cosine વિધેયના કોણાંક ($\omega t + \phi$) વડે શોધવામાં આવે છે. આ સમય આધારિત રાશિ, ($\omega t + \phi$) ને ગતિની **કળા (Phase)** કહેવામાં આવે છે. $t = 0$ સમયે કળાનું મૂલ્ય ϕ છે અને તેને **કળા-અચળાંક (Phase Constant)** કે **કળા-કોણ (Phase Angle)** કહેવાય છે. જો કંપવિસ્તાર જાણતા હોઈએ, તો કણનાં $t = 0$ પરના સ્થાનાંતર પરથી ϕ શોધી શકાય છે. સમાન A અને ω હોય તેવી પરંતુ જુદી કળાઓ ϕ ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.7(b)માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.7 (b) સમીકરણ 14.4 પરથી મેળવેલ આલેખ વક્રો 3 અને 4 અનુક્રમે $\phi = 0$ અને $-\pi/4$ માટેના છે. આ બંને વક્રો માટે કંપવિસ્તાર સમાન છે.

અંતમાં, રાશિ ω એ ગતિના આવર્તકાળ T સાથે સંબંધિત છે તેમ જોઈ શકાય છે. સરળતા માટે, સમીકરણ (14.4)માં $\phi = 0$ લેતાં, આપણને

$$x(t) = A \cos \omega t \qquad (14.5)$$

મળે છે. આ ગતિ, આવર્તકાળ T સાથે આવર્ત હોવાનાં કારણે $x(t)$ એ $x(t + T)$ છે. એટલે કે,

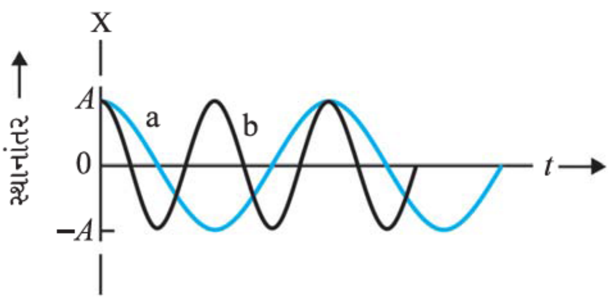
$$A \cos \omega t = A \cos \omega (t + T) \qquad (14.6)$$

હવે cosine વિધેય એ આવર્તકાળ 2π સાથે આવર્ત છે, એટલે કે જ્યારે તેની કળામાં 2π વધારો થાય ત્યારે તે પોતાનું પોતે પુનરાવર્તન કરે છે. આમ,

$$\omega (t + T) = \omega t + 2\pi$$

આમ, $\omega = 2\pi/T$ (14.7)

ω ને સ.આ.ગ.ની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે. કોણીય આવૃત્તિનો SI એકમ રેડિયન / સેકન્ડ (radian per second) છે. દોલનોની આવૃત્તિ એ $1/T$ છે. તેથી ω એ દોલનની આ આવૃત્તિથી 2π ગણી છે. સમાન A અને ϕ હોઈ શકે તેવી પરંતુ જુદી ω ધરાવતી બે સરળ આવર્તગતિઓને આકૃતિ 14.8માં દર્શાવેલ છે. આ આલેખમાં વક્ર a કરતાં વક્ર b નો આવર્તકાળ અડધો છે અને આવૃત્તિ બમણી છે.



આકૃતિ 14.8 સમીકરણ (14.4)ના $\phi = 0$ માટે બે જુદા આવર્તકાળ માટેના આલેખો

▶ **ઉદાહરણ 14.3** નીચેનામાંથી સમયનાં કયા વિધેયો (a) સરળ આવર્તગતિ અને (b) આવર્ત પરંતુ સરળ આવર્ત નથી તેમ રજૂ કરે છે. દરેક કિસ્સા માટે આવર્તકાળ આપો.

(1) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(2) $\sin^2 \omega t$

ઉકેલ

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin (\pi/2 - \omega t)$

$= 2 \cos (\pi/4) \sin (\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/4)$

આ વિધેય આવર્તકાળ $T = 2\pi/\omega$ અને કળા-કોણ $(-\pi/4)$ અથવા $(7\pi/4)$ ધરાવતી સરળ આવર્તગતિ દર્શાવે છે.

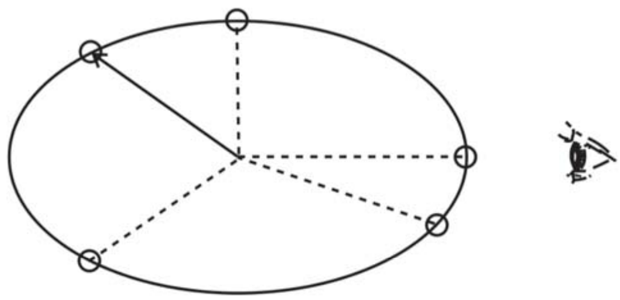
(b) $\sin^2 \omega t$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \omega t$

આ વિધેય આવર્ત છે જેનો આવર્તકાળ $T = \pi/\omega$ છે. તે એવી આવર્તગતિ પણ રજૂ કરે છે કે જેનું સંતુલન બિંદુ શૂન્યને બદલે $\frac{1}{2}$ પર આવેલ હોય. ◀

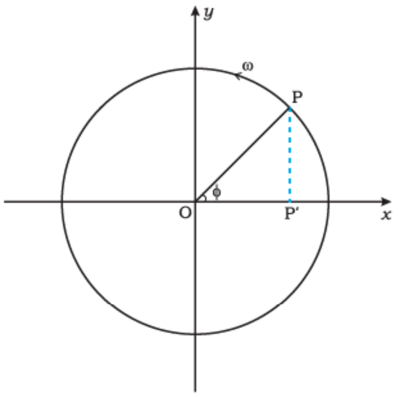
14.4 સરળ આવર્તગતિ અને નિયમિત વર્તુળમય ગતિ (SIMPLE HARMONIC MOTION AND UNIFORM CIRCULAR MOTION)

આ પરિચ્છેદમાં આપણે બતાવીશું કે વર્તુળના વ્યાસ પર નિયમિત વર્તુળમય ગતિનો પ્રક્ષેપ સરળ આવર્તગતિ કરે છે. આ કથનને દ્રશ્યમાન કરવા એક સરળ પ્રયોગ આપણને મદદરૂપ થશે (આકૃતિ 14.9). કોઈ દોરીના એક છેડે એક દડાને બાંધો અને તેને નિયત બિંદુને અનુલક્ષીને સમક્ષિતિજ સમતલમાં અચળ કોણીય ઝડપ સાથે ગતિ કરાવો. આ દડો પછી સમક્ષિતિજ સમતલમાં નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરશે. ગતિના સમતલમાં તમારું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીને દડાનું બાજુ પરથી અથવા સામેથી અવલોકન કરો. આ દડો સમક્ષિતિજ રેખા પર પરિભ્રમણ બિંદુને મધ્યબિંદુ તરીકે લેતા આગળ-પાછળ ગતિ કરતો દેખાશે. તમે વૈકલ્પિક રીતે એક દીવાલ પર પણ આ દડાના પડછાયાનું અવલોકન કરી શકો છો, જે વર્તુળના સમતલને લંબ છે. આ ક્રિયામાં આપણે જે અવલોકન કરી રહ્યાં છીએ તે આપણી જોવાની દિશાને લંબ, વર્તુળના વ્યાસ પર બૉલની ગતિ છે.



આકૃતિ 14.9 એક સમતલમાં દડાની વર્તુળમય ગતિને ધાર પરથી જોતાં તે સ.આ.ગ. દેખાશે.

આકૃતિ 14.10 એ આ જ પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક સ્વરૂપ દર્શાવે છે. કોઈ A ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર નિયમિત કોણીય ઝડપ ω સાથે ગતિ કરતો કોઈ એક કણ P ધારો. આ પરિભ્રમણની દિશા ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ કણનો પ્રારંભિક સ્થાનસદિશ એટલે કે **OP** X-અક્ષની ધન દિશા



આકૃતિ 14.10

સાથે $t = 0$ સમયે ϕ ખૂણો આંતરે છે. t સમયમાં કણનો સ્થાનસદિશ, ωt જેટલો વધુ કોણ આંતરશે અને હવે તેનો સ્થાનસદિશ ધન x-અક્ષ સાથે $\omega t + \phi$નો કોણ બનાવશે. સ્થાનસદિશ OP નો x-અક્ષ પરનો પ્રક્ષેપ વિચારો. તે OP'_2 હશે. કણ P જેમ જેમ વર્તુળ પર ગતિ કરે છે, તેમ તેમ P'નું x-અક્ષ પરનું સ્થાન

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે, જે સ.આ.ગ.ને વ્યાખ્યાયિત કરતું સમીકરણ છે. આ દર્શાવે છે કે જો કણ P એ નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરે, તો તેનો પ્રક્ષેપ P' એ વર્તુળના વ્યાસ પર સ.આ.ગ. કરે છે. આ કણ Pઅને આ વર્તુળ કે જેના પર તે ગતિ કરે છે તેને ઘણી વાર અનુક્રમે **સંદર્ભકણ (reference particle)** અને **સંદર્ભવર્તુળ (reference circle)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

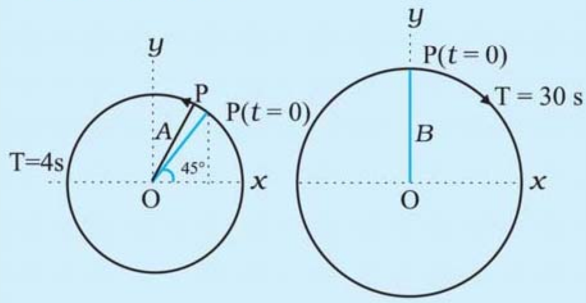
આપણે Pની ગતિનો પ્રક્ષેપ કોઈ પણ વ્યાસ પર લઈ શકીએ છીએ, જેમકે y-અક્ષ પર. આ કિસ્સામાં P'નું y-અક્ષ પરનું સ્થાનાંતર

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે, તે પણ x-અક્ષ પરના પ્રક્ષેપના સમાન કંપવિસ્તારની પરંતુ $\pi/2$ કળાથી ભિન્ન એવી એક સ.આ.ગ. છે.

વર્તુળમય અને સ.આ.ગ. વચ્ચે આવો સંબંધ હોવા છતાં, રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણ પર લાગતું બળ એ કણને નિયમિત વર્તુળમય ગતિમાં રાખવા જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ કરતાં સદંતર ભિન્ન પ્રકારનું હોય છે.

ઉદાહરણ 14.4 આકૃતિ 14.10 એ બે વર્તુળમય ગતિ દર્શાવે છે. આ આકૃતિમાં વર્તુળની ત્રિજ્યા, ભ્રમણનો આવર્તકાળ, પ્રારંભિક સ્થિતિ અને ભ્રમણની દિશા દર્શાવવામાં આવેલ છે. પ્રત્યેક કિસ્સામાં ભ્રમણ કરતાં કણ P ના ત્રિજ્યા-સદિશના X-પ્રક્ષેપની સરળ આવર્તગતિ મેળવો.



ઉકેલ

(a) $t = 0$ પર, OP એ X-અક્ષની (ધન દિશા) સાથે $45° = \pi/4$ radનો એક ખૂણો બનાવે છે. t સમય પછી, તે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં ખૂણો $\frac{2\pi}{T}t$ને આવરી લે છે અને X-અક્ષ સાથે $\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ ખૂણો બનાવે છે.

t સમયે X-અક્ષ પર OP ના પ્રક્ષેપને

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

$T = 4$ s માટે,

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

જે કંપવિસ્તાર A, આવર્તકાળ 4 s અને પ્રારંભિક કળા* $= \frac{\pi}{4}$ની સ.આ.ગ. (SHM) છે.

* *કોણનો પ્રાકૃતિક એકમ રેડિયન (Radian) છે, જે ચાપ (arc) અને ત્રિજ્યા (Radius)ના ગુણોત્તર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે. કોણ એ પરિમાણરહિત રાશિ છે. આથી જ્યારે આપણે π, કે તેના ગુણાંક કે ઉપગુણાંકમાં તેનો ઉપયોગ કરીએ ત્યારે હમેશાં એ જરૂરી નથી કે આપણે Radian એકમ દર્શાવવો પડે. Radian અને Degree વચ્ચેનું રૂપાંતરણ Meter અને Centimetre કે Mileના સમરૂપ નથી. જો કોઈ ત્રિકોણમિતીય વિધેયમાં કોણને એકમ વગર દર્શાવેલ હોય, તો તેનો એકમ Radian છે તેમ સમજવાનું. બીજી તરફ, જો ખૂણાનો એકમ Degree તરીકે ઉપયોગ કરવો હોય, તો તે સ્પષ્ટપણે દર્શાવવો જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે, sin (15°) એટલે કે 15 Degreeનો sine થાય છે, પરંતુ sine (15) એટલે કે 15 Radiansનો sin. હવે પછી આપણે ઘણી વાર 'rad' ને એકમ તરીકે નહિ લખીએ અને તે સમજી લઈશું કે જ્યારે કોઈ એકમ વગર કોણને કોઈક સંખ્યાત્મક મૂલ્ય તરીકે ઉલ્લેખ કરવામાં આવેલ હોય, તો તેને radian તરીકે ગણવામાં આવેલ છે.*

(b) $t = 0$ના આ કિસ્સામાં, OP એ X-અક્ષ સાથે $90° = \frac{\pi}{2}$નો કોણ બનાવે છે. t સમય બાદ, તે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની દિશામાં $\frac{2\pi}{T}t$નો કોણ આવરે છે અને તે X-અક્ષ સાથે $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$ ખૂણો બનાવે છે. t સમયે OPનો X-અક્ષ પરના પ્રક્ષેપને

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$T = 30$ s માટે,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

આને $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right)$ લખતાં, અને સમીકરણ (14.4) સાથે સરખાવતા, આપણને જાણવા મળે છે કે, આ કંપવિસ્તાર B, આવર્તકાળ 30 s અને પ્રારંભિક કળા $-\frac{\pi}{2}$ની સ.આ.ગ (SHM) છે. ◀

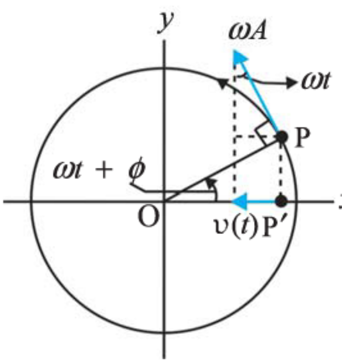
14.5 સરળ આવર્તગતિમાં વેગ અને પ્રવેગ (VELOCITY AND ACCELERATION IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતા કોઈ એક કણની ઝડપ υ એ આ વર્તુળની ત્રિજ્યા A ના તેની ω કોણીય ઝડપ ગણી હોય છે.

$$\upsilon = \omega A \quad (14.8)$$

કોઈ પણ t સમયે વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ ની દિશા એ આ સમયે કણ જે સ્થાને છે તે વર્તુળ પરના બિંદુના સ્પર્શકની દિશામાં હોય છે. આકૃતિ 14.11ની ભૂમિતિ પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે, પ્રક્ષેપ કણ P'નો t સમયે વેગ

$$\upsilon(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \text{ છે.} \quad (14.9)$$



આકૃતિ 14.11 *કણ P' નો વેગ $\upsilon(t)$, એ સંદર્ભ કણ Pના વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$ નો પ્રક્ષેપ છે.*

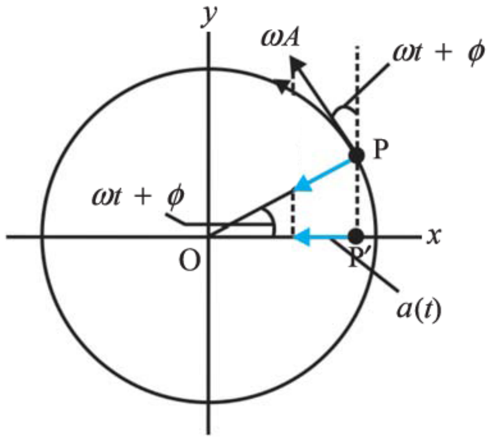
જ્યાં ઋણ ચિહ્ન દર્શાવે છે કે $\upsilon(t)$ની દિશા એ ધન X-અક્ષની વિરુદ્ધ દિશા છે. સમીકરણ (14.9) સ.આ.ગ. કરતાં કોઈ એક કણનો તાત્ક્ષણિક વેગ આપે છે, જ્યાં સ્થાનાંતરને સમીકરણ (14.4) વડે આપવામાં આવે છે. સમીકરણ (14.4)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં, આપણે કોઈ પણ ભૌમિતિક દલીલ વગર પણ આ સમીકરણ મેળવી શકીએ છીએ.

$$\upsilon(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (14.10)$$

સ.આ.ગ. કરતાં કોઈ કણનો તત્કાલિન પ્રવેગ મેળવવા માટે પણ આપણે આ જ રીતે સંદર્ભ વર્તુળની રીતનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે નિયમિત વર્તુળમય ગતિ કરતાં P કણના કેન્દ્રગામી પ્રવેગનું માન υ^2/A કે $\omega^2 A$ છે તથા તે કેન્દ્ર તરફ દિશામાન છે, એટલે કે દિશા PO તરફ છે. આમ પ્રક્ષેપ કણ P'નો તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ (આકૃતિ 14.12 જુઓ).

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \text{ છે.} \quad (14.11)$$



આકૃતિ 14.12 *કણ P'નો પ્રવેગ $a(t)$એ સંદર્ભ કણ Pના પ્રવેગ $\boldsymbol{a}$નો પ્રક્ષેપ છે.*

સમીકરણ (14.11) એ સ.આ.ગ. કરતાં કણનો પ્રવેગ દર્શાવે છે. સમીકરણ (14.9) દ્વારા આપવામાં આવતા વેગ $\upsilon(t)$ નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં સીધું જ ફરીથી આ સમીકરણ મેળવી શકાય છે :

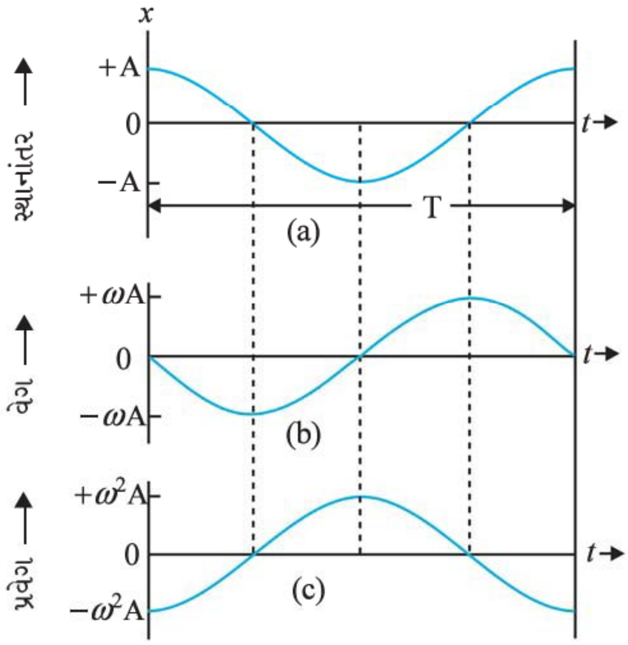
$$a(t) = \frac{d}{dt}\upsilon(t) \quad (14.12)$$

આપણે સમીકરણ (14.11) પરથી એક મહત્ત્વપૂર્ણ પરિણામ નોંધીએ કે સ.આ.ગ.માં પ્રવેગ એ સ્થાનાંતરને સમપ્રમાણ હોય છે. $x(t) > 0$ માટે $a(t) < 0$ અને $x(t) < 0$ માટે

$a(t) > 0$. આમ, $-A$ અને Aની વચ્ચેના x નાં કોઈ પણ મૂલ્ય માટે પ્રવેગ $a(t)$ એ હંમેશાં કેન્દ્ર તરફ જ દિશામાન હોય છે.

સરળતા માટે, $\phi = 0$ મૂકો અને $x(t)$, $\upsilon(t)$ અને $a(t)$નાં સમીકરણો લખો.

$x(t) = A \cos \omega t$, $\upsilon(t) = -\omega A \sin \omega t$ અને $a(t) = -\omega^2 A \cos \omega t$. આને અનુરૂપ આલેખો આકૃતિ 14.13માં દર્શાવેલ છે. આ બધી જ રાશિઓ સમય સાથે sine પ્રકારે (જ્યાવર્તિય - sinusoidally) બદલાય છે; ફક્ત તેઓના મહત્તમોમાં ફેરફાર છે અને આ અલગઅલગ આલેખોની કળા જુદી-જુદી છે. x એ $-A$ થી Aની વચ્ચે; $\upsilon(t)$ એ $-\omega A$ થી ωAની વચ્ચે અને $a(t)$ એ $-\omega^2 A$થી $\omega^2 A$ની વચ્ચે બદલાય છે. સ્થાનાંતરના આલેખની સાપેક્ષે, વેગના આલેખમાં કળા-તફાવત $\pi/2$ છે અને પ્રવેગના આલેખમાં કળા-તફાવત π છે.



આકૃતિ 14.13 *સરળ આવર્તગતિ કરતા કોઈ એક કણના સ્થાનાંતર વેગ અને પ્રવેગ સમાન આવર્તકાળનાં છે પણ કળામાં ભિન્ન છે.*

> **ઉદાહરણ 14.5** એક પદાર્થ
>
> $$x = 5 \cos [2\pi t + \pi/4]$$
>
> સમીકરણ (SI એકમોમાં) અનુસાર સ.આ.ગ. કરે છે. $t = 1.5$ s માટે આ પદાર્થના (a) સ્થાનાંતર (b) ઝડપ અને (c) પ્રવેગની ગણતરી કરો.

ઉકેલ આ પદાર્થની કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ અને તેનો આવર્તકાળ T = 1 s છે.

$t = 1.5$ s માટે

(a) સ્થાનાંતર $= (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$
$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \pi/4)]$
$= -5.0 \times 0.707$ m
$= -3.535$ m

(b) સમીકરણ (14.9)નો ઉપયોગ કરતાં આ પદાર્થની ઝડપ
$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$
$= -(5.0 \text{ m}) (2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(3\pi + \pi/4)]$
$= 10\pi \times 0.707 \text{ m s}^{-1}$
$= 22 \text{ m s}^{-1}$

(c) સમીકરણ (14.11)નો ઉપયોગ કરતાં આ પદાર્થનો પ્રવેગ
$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times$ સ્થાનાંતર
$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$
$= 140 \text{ m s}^{-2}$ ◀

14.6 સરળ આવર્તગતિ માટે બળનો નિયમ (FORCE LAW FOR SIMPLE HARMONIC MOTION)

ન્યૂટનના ગતિના બીજા નિયમ અને સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણના પ્રવેગના સમીકરણ (14.11)નો ઉપયોગ કરતાં સ.આ.ગ. કરતાં m દ્રવ્યમાનના કણ પર લાગતું બળ

$$F(t) = ma$$
$$= -m\omega^2 x(t)$$

છે. એટલે કે $F(t) = -k\, x(t)$ (14.13)

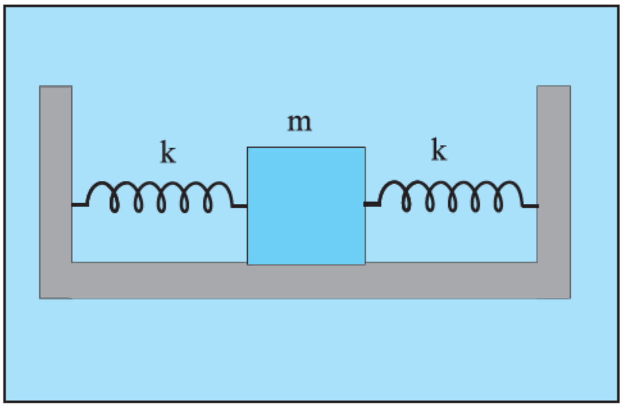
જ્યાં $k = m\omega^2$ (14.14a)

અથવા $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (14.14b)

પ્રવેગની જેમ, આ બળ પણ હંમેશાં મધ્યમાન સ્થાનની દિશા તરફનું હોય છે. તેથી તેને સ.આ.ગ.માં ક્યારેક પુનઃસ્થાપક બળ (Restoring Force) પણ કહેવામાં આવે છે. અત્યાર સુધીની ચર્ચાની સમીક્ષા કરીએ તો સરળ આવર્તગતિને બે સમતુલ્ય રીતે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય. સ્થાનાંતર માટેના સમીકરણ (14.4) વડે કે તેના બળના નિયમ કે જે સમીકરણ (14.13) વડે આપવામાં આવે છે. સમીકરણ (14.4)થી સમીકરણ (14.13) તરફ જવા તેનું બે વખત વિકલન કરવું પડે. તેવી જ રીતે, સમીકરણ (14.13)નું બે વખત સંકલન કરતાં આપણને પાછું સમીકરણ (14.4) મળે.

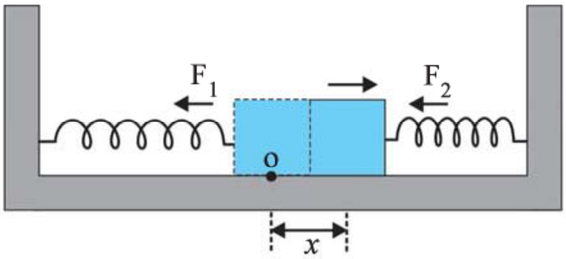
નોંધો કે સમીકરણ (14.13)માનું બળ $x(t)$ને (રેખીય) સમપ્રમાણમાં ચલે છે. કોઈ કણ કે જે આવા બળની અસરમાં દોલન કરતો હોય, તો તેને રેખીય આવર્ત દોલક કહેવામાં આવે છે. વાસ્તવિક જગતમાં, આ બળ x^2, x^3 વગેરે સાથે ચલિત નાની વધારાની પદાવલિઓ પણ ધરાવે છે. ત્યારે આવાં દોલકોને અરેખીય દોલકો (NonLinear Oscilliators) કહેવાય છે.

> **ઉદાહરણ 14.6** આકૃતિ 14.14માં બતાવ્યા પ્રમાણે k સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી બે સમાન સ્પ્રિંગો m દ્રવ્યમાન ના બ્લૉક સાથે અને સ્થિર આધાર સાથે જોડાયેલ છે. બતાવો કે જ્યારે આ દ્રવ્યમાન તેની સંતુલન સ્થિતિથી કોઈ પણ બાજુ સ્થાનાંતરિત (વિસ્થાપિત) થાય, ત્યારે તે એક સરળ આવર્તગતિ કરે છે. આ દોલનોનો આવર્તકાળ શોધો.



આકૃતિ 14.14

ઉકેલ આકૃતિ 14.15માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંતુલન સ્થિતિની જમણી બાજુએ ધારો કે, આ દ્રવ્યમાનનું નાના અંતર x જેટલું સ્થાનાંતર થાય છે.



આકૃતિ 14.15

આ પરિસ્થિતિમાં ડાબી બાજુની સ્પ્રિંગ x લંબાઈથી વિસ્તરશે (ખેંચાશે) અને જમણી બાજુની સ્પ્રિંગ એ આ જ લંબાઈથી સંકુચિત થાય છે. આ દ્રવ્યમાન પર લાગતા બળો છે.

$F_1 = -kx$ (ડાબી બાજુ પર સ્પ્રિંગ દ્વારા લગાડવામાં આવતું બળ, જે દ્રવ્યમાનને મધ્યમાન સ્થાન તરફ ખેંચવાનો પ્રયાસ કરે છે.)

$F_2 = -kx$ (જમણી બાજુ પર સ્પ્રિંગ દ્વારા લગાડવામાં આવતું બળ, જે દ્રવ્યમાનને મધ્યમાન સ્થાન તરફ ધકેલવાનો પ્રયાસ કરે છે.)

આમ, દ્રવ્યમાન પર લાગતું ચોખ્ખું બળ F છે,

$F = -2\ kx$

આમ, દ્રવ્યમાન પર લાગતું આ બળ તેના સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં અને મધ્યમાન સ્થાન તરફ દિશામાન છે, માટે આ કણની ગતિએ સરળ આવર્તગતિ છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ છે,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$ ◀

14.7 સરળ આવર્તગતિમાં ઊર્જા (ENERGY IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

સરળ આવર્તગતિ કરતા કોઈ પણ કણની ગતિઊર્જા (kinetic energy) અને સ્થિતિઊર્જા (potential energy) શૂન્ય અને તેમનાં મહત્તમ મૂલ્યો વચ્ચે બદલાતી રહે છે.

પરિચ્છેદ 14.5માં આપણે જોયું છે કે સ.આ.ગ. કરતા કણનો વેગ એ સમયનું આવર્ત વિધેય છે. તે સ્થાનાંતરના અંતિમ સ્થાનોએ શૂન્ય છે. તેથી આવા કણની ગતિઊર્જા (K)ને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

જે સમયનું આવર્ત વિધેય પણ છે, જ્યારે સ્થાનાંતર મહત્તમ હોય છે ત્યારે તે શૂન્ય હોય છે અને જ્યારે કણ મધ્યમાન સ્થાન પર હોય છે ત્યારે તે મહત્તમ હોય છે. નોંધો કે Kમાં υની નિશાનીનો કોઈ અર્થ નથી, તેથી Kનો આવર્તકાળ T/2 છે.

સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની સ્થિતિઊર્જા (PE) શું છે ? પ્રકરણ 6માં, આપણે જોયું છે કે સ્થિતિઊર્જાની સંકલ્પના ફક્ત સંરક્ષી બળો (Conservative Forces) માટે જ શક્ય છે. સ્પ્રિંગ બળ $F = -kx$ એ સંરક્ષી બળ છે, જેની સાથે સંકળાયેલ સ્થિતિઊર્જા

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (14.16)$$

છે. તેથી સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની સ્થિતિઊર્જા

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

આમ સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણની સ્થિતિઊર્જા પણ આવર્ત છે, જેનો આવર્તકાળ T/2 છે, જે મધ્યમાન સ્થાને શૂન્ય છે અને મહત્તમ સ્થાનાંતરો માટે મહત્તમ છે.

સમીકરણ (14.15) અને (14.17) પરથી તંત્રની કુલ ઊર્જા E છે :

$$E = U + K$$

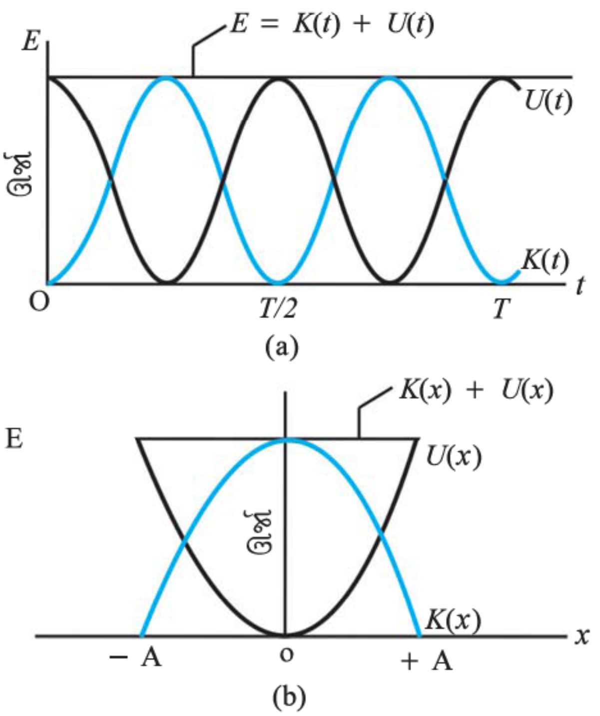
$$= \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} kA^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)]$$

ત્રિકોણમિતિના જાણીતા સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં કૌંસમાં રહેલ રાશિનું માન એક છે. આમ,

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (14.18)$$

આમ, કોઈ પણ દોલકની કુલ યાંત્રિકઊર્જા એ સમયથી સ્વતંત્ર છે જે કોઈ પણ સંરક્ષી બળોને આધીન ગતિ માટે અપેક્ષિત છે. રેખીય સરળ આવર્ત દોલકની સ્થિતિ અને ગતિઊર્જા, સમય અને સ્થાનાંતર પર આધારિત છે એ આકૃતિ 14.16માં બતાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ 14.16 *(a) સ.આ.ગ. કરતા કોઈ એક કણ માટે ગતિઊર્જા, સ્થિતિઊર્જા અને કુલ ઊર્જાને સમયના વિધેય તરીકે [(a)માં દર્શાવેલ છે] અને સ્થાનાંતરના વિધેય તરીકે [(b)માં દર્શાવેલ છે]. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા બંનેનું T/2 સમય બાદ પુનરાવર્તન થાય છે. કુલ ઊર્જા દરેક t કે x માટે અચળ રહે છે.*

આકૃતિ 14.16માં એ નિરીક્ષણ કરો કે સ.આ.ગ.માં ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા એ બંને હમેશાં ધન છે. ગતિઊર્જા ખરેખર ક્યારે પણ ઋણ હોતી નથી કારણ કે તે ઝડપના વર્ગના પ્રમાણમાં ચલે છે. સ્થિતિઊર્જાના અજ્ઞાત અચળાંકની પસંદગીના કારણે સ્થિતિઊર્જા ધન હોય છે. ગતિઊર્જા અને સ્થિતિઊર્જા એ બંને પ્રત્યેક આવર્તકાળ દરમિયાન બે વખત અંતિમ મહત્તમ બને છે. $x = 0$ માટે, બધી જ ઊર્જા ગતિઊર્જા છે અને સીમાઓ $x = \pm A$ માટે તે બધી જ સ્થિતિઊર્જા છે. ગતિ દરમિયાન, આ અંતિમ સ્થાનો વચ્ચે, સ્થિતિઊર્જાના ઘટવાથી ગતિઊર્જામાં વધારો થાય છે અથવા આનાથી ઊલટું થતું હોય છે.

> *ઉદાહરણ 14.7 એક બ્લૉક જેનું દ્રવ્યમાન 1 kg છે તેને સ્પ્રિંગ સાથે બાંધેલ છે. આ સ્પ્રિંગનો સ્પ્રિંગ અચળાંક 50 N m^{-1} છે. આ બ્લૉકને ઘર્ષણરહિત સપાટી પર $t = 0$ સમયે તેના સંતુલન સ્થાન $x = 0$ આગળ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ખેંચીને $x = 10$ cm અંતરે લાવવામાં આવે છે. જ્યારે તે મધ્યમાન સ્થિતિથી 5 સેમી દૂર છે ત્યારે આ બ્લૉકની ગતિઊર્જા, સ્થિતિઊર્જા અને કુલ ઊર્જાની ગણતરી કરો.*

ઉકેલ આ બ્લૉક સ.આ.ગ. કરે છે, સમીકરણ (14.14b) પ્રમાણે, તેની કોણીય આવૃત્તિ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

$$\omega = \sqrt{\frac{50 \text{ N m}^{\;1}}{1 \text{ kg}}}$$

$$= 7.07 \text{ rad s}^{-1}$$

તેથી કોઈ પણ t સમયે, તેના સ્થાનાંતરને

$$x(t) = 0.1 \cos (7.07t)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જ્યારે બ્લૉક તેના મધ્યમાન સ્થળેથી 5 cm દૂર હશે ત્યારે આપણી પાસે

$$0.05 = 0.1 \cos (7.07t)$$

અથવા $\cos (7.07t) = 0.5$ અને તેથી

$$\sin (7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

આ બ્લૉકનો $x = 5$ cm પરનો વેગ

$= 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{ m s}^{-1}$

$= 0.61 \text{ m s}^{-1}$

તેથી આ બ્લૉકની ગ.ઊ.

$= \frac{1}{2} m \upsilon^2$

$= \frac{1}{2} [1 \text{ kg} \times (0.6123 \text{ m s}^{-1})^2]$

$= 0.19$ J

આ બ્લૉકની સ્થિતિઊર્જા

$= \frac{1}{2} k x^2$

$= \frac{1}{2} (50 \text{ N m}^{-1} \times 0.05 \text{ m} \times 0.05 \text{ m})$

$= 0.0625$ J

$x = 5$ cm પર બ્લૉકની કુલ ઊર્જા

$=$ K. E. + P. E.

$= 0.25$ J

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, મહત્તમ સ્થાનાંતર પર ગતિઊર્જા શૂન્ય છે અને તેથી પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા એ સ્થિતિઊર્જા બરાબર હોય છે. તેથી, પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા

$= \frac{1}{2} (50 \text{ N m}^{-1} \times 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m})$

$= 0.25$ J

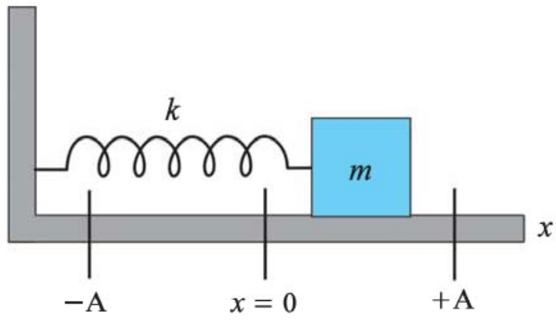
આ ઊર્જા 5 cmના સ્થાનાંતર પર બંને ઊર્જાના સરવાળા જેટલી છે. આ ઊર્જા-સંરક્ષણ સિદ્ધાંતનું સમર્થન કરનારું છે. ◀

14.8 સરળ આવર્તગતિ કરતાં કેટલાંક તંત્રો (SOME SYSTEMS EXECUTING SIMPLE HARMONIC MOTION)

સંપૂર્ણ શુદ્ધ **સરળ આવર્તગતિ**નાં કોઈ ભૌતિક ઉદાહરણો નથી. વ્યવહારમાં આપણે ચોક્કસ શરતોને આધિન લગભગ સરળ આવર્તગતિ કરતાં તંત્રોને જોયાં છે. આ વિભાગના અનુગામી ભાગમાં, આપણે આવાં કેટલાંક તંત્રો દ્વારા કરવામાં આવતી ગતિની ચર્ચા કરીશું.

14.8.1 એક સ્પ્રિંગને લીધે દોલનો (Oscillations due to a Spring)

સરળ આવર્તગતિનું સરળ દેખીતું ઉદાહરણ એ આકૃતિ 14.17માં બતાવ્યા પ્રમાણે કોઈ દૃઢ દીવાલ સાથે જોડેલ સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ m દળના કોઈ એક બ્લૉકનાં નાનાં દોલનો છે. આ બ્લૉકને ઘર્ષણરહિત સમક્ષિતિજ સપાટી પર મૂકવામાં આવેલ છે. જો બ્લૉકને એક બાજુએ ખેંચીને છોડવામાં આવે તો તે પછી મધ્યમાન સ્થાનને અનુલક્ષીને આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે. અહીં $x = 0$ એ જ્યારે સ્પ્રિંગ સંતુલનમાં હોય ત્યારે બ્લૉકના કેન્દ્રની સ્થિતિ દર્શાવે છે. $-A$ અને $+A$ વડે દર્શાવેલ



આકૃતિ 14.17 એક રેખીય સરળ આવર્ત દોલક જે સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ m દ્રવ્યમાનનો એક બ્લૉક ધરાવે છે. આ બ્લૉક ઘર્ષણરહિત સપાટી પર ગતિ કરે છે. આ બ્લૉકને જ્યારે ખેંચીને કે ધકેલીને છોડી દેતાં, તે સરળ આવર્તગતિ કરે છે.

સ્થાનો, મધ્યસ્થાન સ્થાનેથી ડાબી અને જમણી તરફના મહત્તમ સ્થાનાંતરો દર્શાવે છે. આપણે પહેલાં શીખ્યાં જ છીએ કે સ્પ્રિંગને વિશિષ્ટ ગુણધર્મો છે, જેને સૌ પ્રથમ અંગ્રેજી ભૌતિકશાસ્ત્રી રોબર્ટ હૂક દ્વારા શોધવામાં આવ્યા હતા. તેમણે બતાવ્યું હતું કે આવી પ્રણાલીને જ્યારે વિરૂપિત કરવામાં આવે છે ત્યારે તેના પર પુનઃસ્થાપક બળ લાગે છે, જેનું માન, વિરૂપણ અથવા સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં છે અને તે વિરુદ્ધ દિશામાં કાર્ય કરે છે. તેને હૂકના નિયમ (પ્રકરણ 9) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સ્પ્રિંગની લંબાઈની તુલનામાં નાના સ્થાનાંતર માટે તે સાચો જળવાય છે. કોઈ પણ t સમયે, જો મધ્યમાન સ્થાનેથી બ્લૉકનું સ્થાનાંતર x હોય, તો બ્લૉક પર કાર્યરત પુનઃસ્થાપક બળ F

$$F(x) = -kx \tag{14.19}$$

છે. સપ્રમાણતાના અચળાંક, kને સ્પ્રિંગ અચળાંક કહેવાય છે, જેનું મૂલ્ય સ્પ્રિંગની સ્થિતિસ્થાપકતાના ગુણધર્મો વડે અંકુશિત થાય છે. કડક સ્પ્રિંગ માટે kનું મૂલ્ય મોટું અને કોઈ મૃદુ (નરમ) સ્પ્રિંગ માટે kનું મૂલ્ય નાનું હોય છે. સમીકરણ (14.19) એ સ.આ.ગ.ના બળના નિયમ જેવું જ છે અને તેથી આ પ્રણાલી સરળ આવર્તગતિ કરે છે. સમીકરણ (14.14) પરથી આપણને

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.20}$$

મળે છે અને દોલકના આવર્તકાળ, Tને

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{14.21}$$

દ્વારા આપવામાં આવે છે.

સખત સ્પ્રિંગ મોટા મૂલ્યનો k (સ્પ્રિંગ અચળાંક) ધરાવે છે. સમીકરણ (14.20) અનુસાર, નાના દ્રવ્યમાન mનો કોઈ એક બ્લૉક કોઈ કડક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ હોય, તો તે મોટી દોલન આવૃત્તિ ધરાવશે, જે ભૌતિકીય ધારણા પ્રમાણે છે.

▶ *ઉદાહરણ 14.8* એક 500 N m^{-1} સ્પ્રિંગ અચળાંક ધરાવતી સ્પ્રિંગની સાથે 5 kg નો કૉલર (પટ્ટો) જોડાયેલ છે. તે ઘર્ષણ વગર સમક્ષિતિજ સળિયા પર સરકે છે. આ કૉલર તેના સંતુલન સ્થાનેથી 10.0 cm સ્થાનાંતરિત થઈ અને મુક્ત થાય છે. આ કૉલર માટે
(a) દોલનોનો આવર્તકાળ
(b) મહત્તમ ઝડપ અને
(c) મહત્તમ પ્રવેગની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) સમીકરણ (14.21) વડે આ દોલનનો આવર્તકાળ આપવામાં આવે છે,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\text{kg}}{500\,\text{N m}^{-1}}}$$

$$= (2\pi/10)\ \text{s}$$

$$= 0.63\ \text{s}$$

(b) સ.આ.ગ. કરતા આ કૉલરનો વેગ

$$\upsilon(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

વડે આપવામાં આવે છે

તથા મહત્તમ ઝડપ

$$\upsilon_m = A\omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\,\text{N m}^{-1}}{5\,\text{kg}}}$$

$$= 1\ \text{m s}^{-1}$$

અને તે $x = 0$ પર પ્રાપ્ત થાય છે.

(c) સંતુલન સ્થિતિમાંથી થયેલ સ્થાનાંતર $x(t)$ પર આ કૉલરનો પ્રવેગ $a(t) = -\omega^2 x(t)$ વડે અપાય છે.

$$a(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

તેથી મહત્તમ પ્રવેગ

$$a_{max} = \omega^2 A \text{ છે,}$$

$$a_{max} = \frac{500\,\text{N m}^{1}}{5\,\text{kg}} \times 0.1\ \text{m}$$

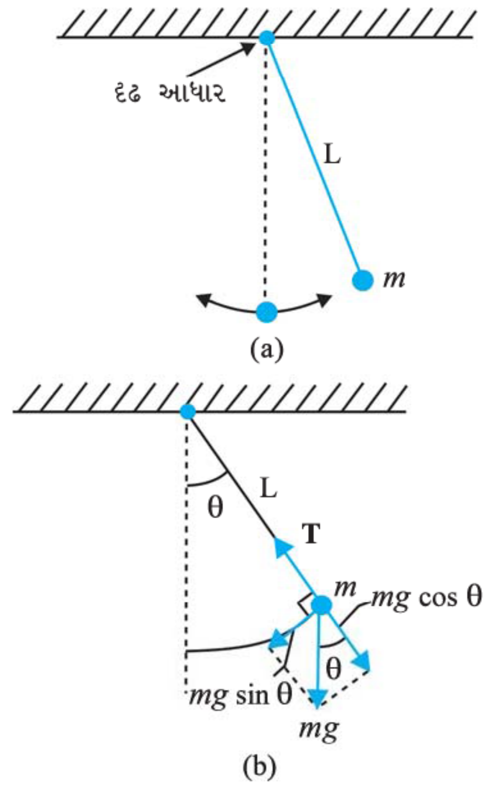
$$= 10\ \text{m s}^{-2}$$

અને તે સીમાંત બિંદુઓએ જોવા મળે છે. ◀

14.8.2 સાદું લોલક (Simple Pendulum)

એવું કહેવાય છે કે ગૅલેલિયોએ તેના નાડીના ધબકાર દ્વારા ચર્ચમાં ઝૂલતાં ઝૂમરના આવર્તકાળનું માપન કર્યું હતું. તેમણે જોયું કે ઝૂમરની ગતિ આવર્ત હતી. આ પ્રણાલી એ એક પ્રકારના લોલક જેવી છે. આશરે 100 cm લાંબી ખેંચી ન શકાય તેવી એક દોરી પર પથ્થરના એક ટુકડાને બાંધીને તમે પણ તમારું પોતાનું લોલક બનાવી શકો છો. તમારા લોલકને યોગ્ય આધારથી લટકાવો જેથી તે મુક્ત રીતે દોલન કરી શકે. પથ્થરને એક બાજુ એક નાના અંતરનું સ્થાનાંતર આપી અને તેને છોડી દો. આ પથ્થર આગળ-પાછળ ગતિ કરે છે, જે આવર્તિ છે જેનો આવર્તકાળ લગભગ 2 s છે.

આપણે હવે એમ દર્શાવીશું કે આ આવર્તગતિ એ મધ્યમાન સ્થાનેથી નાનાં સ્થાનાંતરો માટે સરળ આવર્તગતિ છે. એક સાદું લોલક લો, જેમાં m દ્રવ્યમાનના એક નાના ગોળાને ખેંચી ન શકાય તેવી, વજનરહિત, L લંબાઈની દોરી સાથે બાંધવામાં આવેલ છે. એ દોરીનો બીજો છેડો છતના આધાર સાથે બાંધેલ છે. આ ગોળો એક સમતલમાં, આધાર બિંદુમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ રેખાને અનુલક્ષીને દોલનો કરે છે. આકૃતિ 14.18(a) આ પ્રણાલી દર્શાવે છે. આકૃતિ 14.18(b) એ સાદા લોલકનો આ ગોળા પર કાર્ય કરતાં બળોને દર્શાવતો free body diagram (મુક્ત પદાર્થ રેખાચિત્ર) છે.



આકૃતિ 14.18 *(a) પોતાનાં મધ્યસ્થાન સ્થાનને અનુલક્ષીને દોલન કરતો એક ગોળો. (b) ત્રિજ્યાવર્તી બળ T- mg cos θ એ કેન્દ્રગામી બળ પૂરું પાડે છે પણ આધારને અનુલક્ષીને કોઈ ટૉર્ક નથી. સ્પર્શીય બળ mg sin θ એ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક પૂરું પાડે છે.*

દોરીનો ઊર્ધ્વ સાથે બનતો કોણ θ છે. જ્યારે આ ગોળો સંતુલન સ્થાનમાં હોય ત્યારે $\theta = 0$.

આ ગોળા પર ફક્ત બે બળો લાગે છે : દોરીમાંનું તણાવ બળ (Tension) **T** અને ગુરુત્વાકર્ષણ બળ (= $m\,g$). આ બળ $m\,g$ને દોરીની દિશામાં m g cos θ [ત્રિજ્યાવર્તી ઘટક (રેડિયલ કમ્પોનન્ટ)] અને તેને લંબ $m\,g$ sin θ [સ્પર્શીય ઘટક (ટેંજેન્શિયલ કમ્પોનન્ટ)]માં વિભાજિત કરી શકાય છે. આ ગોળાની ગતિ જેનું કેન્દ્ર આધારબિંદુ હોય તેવા L ત્રિજ્યાના વર્તુળ પરની ગતિ છે, તેથી આ ગોળો ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ ($\omega^2 L$) ધરાવે છે અને તેને એક સ્પર્શીય પ્રવેગ પણ છે. આ સ્પર્શીય પ્રવેગ એ વર્તુળના ચાપ પરની અનિયમિત ગતિને કારણે છે. આ ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ એ પરિણામી ત્રિજ્યાવર્તી બળ T-mg cos θ દ્વારા આપવામાં આવે છે, જ્યારે સ્પર્શીય પ્રવેગને mg sin θ વડે આપવામાં આવે છે. આધારને અનુલક્ષીને ટૉર્ક સાથે કામ કરવું વધુ સગવડતાંભર્યું છે, કારણ કે ત્રિજ્યાવર્તી બળ શૂન્ય ટૉર્ક આપે છે. આધારને અનુલક્ષીને ટૉર્ક τ એ સંપૂર્ણપણે બળના સ્પર્શીય ઘટક દ્વારા આપવામાં આવે છે.

$$\tau = -L\,(mg \sin \theta) \qquad (14.22)$$

આ પુનઃસ્થાપક ટૉર્ક છે જે કોણીય સ્થાનાંતર ઘટાડવા માટે કાર્ય કરે છે અને તેથી ઋણ સંજ્ઞા છે. ન્યૂટનના ચાકગતિના નિયમ અનુસાર

$$\tau = I\,\alpha \qquad (14.23)$$

જ્યાં I એ આધારબિંદુને અનુલક્ષીને પ્રણાલીની જડત્વની ચાકમાત્રા છે અને α એ તેનો કોણીય પ્રવેગ છે. આમ,

$$I\,\alpha = -mg \sin \theta\, L \qquad (14.24)$$

અથવા

$$\alpha = -\frac{m\,g\,L}{I} \sin \theta \qquad (14.25)$$

જો આપણે ધારીએ કે સ્થાનાંતર θ એ નાનું છે, તો આપણે આ સમીકરણ (14.25)ને સરળ કરી શકીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે sin θ ને નીચે પ્રમાણે વ્યક્ત કરી શકાય છે :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \mp \ldots \qquad (14.26)$$

અહીં, θ radianમાં છે.

હવે જો θ નાનો હોય તો, sin θ નું સન્નિકટ θ દ્વારા અંદાજી શકાય છે અને પછી સમીકરણ (14.25)ને

$$\alpha = -\frac{m\,g\,L}{I}\,\theta \qquad (14.27)$$

તરીકે લખી શકાય.

કોષ્ટક 14.1માં, આપણે કોણ θને ડિગ્રીમાં, તેને સમતુલ્ય readiansમાં અને sin θ વિધેયના મૂલ્યની યાદી આપેલ છે.

સ.આ.ગ. SHM કંપવિસ્તાર કેટલો નાનો હોવો જોઈએ ?

જ્યારે તમે સાદા લોલકનો આવર્તકાળ નિર્ધારિત કરવા પ્રયોગ કરો છો, ત્યારે તમારા શિક્ષક તમને કંપવિસ્તાર નાનો રાખવા કહે છે. પરંતુ શું તમે ક્યારેય પૂછ્યું છે કે નાનો એટલે કેટલો નાનો ? 5^o, 2^o, 1^o અથવા 0.5^o જેટલો કંપવિસ્તાર જોઈએ ? અથવા તે 10^o, 20^o અથવા 30^o હોઈ શકે ?

આની અગત્યતા સમજવા માટે, એ વધુ યોગ્ય રહશે કે જુદા જુદા કંપવિસ્તાર માટે તેનો આવર્તકાળ માપવામાં આવે. અલબત્ત, મોટા કંપવિસ્તાર માટે, તમારે એ કાળજી લેવી પડશે કે લોલક એક ઊર્ધ્વ સમતલમાં દોલન કરે. ચાલો આપણે નાના-કંપવિસ્તારના દોલનના આવર્તકાળને $T(0)$ વડે દર્શાવીએ અને θ_0 કંપવિસ્તાર માટેના આવર્તકાળને $T(\theta_0) = cT(0)$ લખીએ, જ્યાં c એ ગુણાંક પરિબળ છે. જો તમે c વિરુદ્ધ θ_0નો આલેખ દોરો, તો તમને કંઈક અંશે નીચે દર્શાવેલ મૂલ્યો મળશે :

θ_0	:	20^o	45^o	50^o	70^o	90^o
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

આનો અર્થ એ થયો કે 20^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 2 % જેટલી, 50^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 5 %, 70^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 10 % અને 90^o કંપવિસ્તારના આવર્તકાળમાં 18 % ત્રુટિ છે.

આ પ્રયોગમાં, તમે ક્યારેય પણ $T(0)$નું માપન કરી શકશો નહિ કારણ કે આનો અર્થ એ છે કે ત્યાં કોઈ આવર્તનો નથી. સૈદ્ધાંતિક રીતે, ફક્ત $\theta = 0$ માટે જ sin θ એ θ ની બરાબર હોય છે. θ નાં અન્ય તમામ મૂલ્યો માટે કેટલીક અચોક્કસતા હશે જ. θ ના વધવા સાથે આ તફાવત વધે છે. તેથી આપણે નક્કી કરવું જોઈએ કે આપણે કેટલી ત્રુટિ ચલાવી શકીએ છીએ. કોઈ માપ ક્યારેય સંપૂર્ણ સચોટ નથી. તમારે આના જેવા અન્ય પ્રશ્નો પર પણ વિચારવું જોઈએ : જેમકે સ્ટૉપવૉચની ચોકસાઈ શું છે ? સ્ટૉપવૉચ શરૂ કરવામાં અને રોકવામાં તમારી પોતાની ચોકસાઈ શું છે ? તમને ખ્યાલ આવશે કે આ સ્તરે તમારા માપનની સચોટતા ક્યારેય 5 % અથવા 10 % કરતાં વધુ સારી નથી હોતી. ઉપર્યુક્ત કોષ્ટક બતાવે છે કે લોલકના આવર્તકાળ 50^o કંપવિસ્તારના મૂલ્યની તેના નાના કંપવિસ્તારના મૂલ્યની સરખામણીએ ભાગ્યે જ 5 % વધે છે. તમે તમારા પ્રયોગોમાં 50^o જેટલો કંપવિસ્તાર રાખી શકો છો.

આ કોષ્ટકમાંથી એ જોઈ શકાય છે કે 20 ડિગ્રી જેટલા મોટા મૂલ્ય માટે પણ sin θ એ લગભગ એ જ રહે છે જે θ ને **રેડિયનમાં રજૂ કરતાં** થાય.

કોષ્ટક 14.1 sin θ એ કોણ θ ના વિધેય તરીકે

θ (degrees)	θ (radians)	sin θ
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.259
20	0.349	0.342

સમીકરણ (14.27) એ ગાણિતિક રીતે સમીકરણ (14.11)ને સમતુલ્ય છે. ફરક એટલો જ છે કે ચલ તરીકે કોણીય સ્થાનાંતર છે. આમ, આપણે સાબિત કર્યું કે નાના θ માટે આ બૉબની ગતિ એ સરળ આવર્ત છે.

સમીકરણો (14.27) અને (14.11) પરથી,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

અને

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (14.28)$$

હવે, સાદા લોલકની દોરી દ્રવ્યમાનરહિત છે, તેથી જડત્વની ચાકમાત્રા I એ mL^2 છે. સમીકરણ (14.28) એ ત્યાર બાદ સાદા લોલકના આવર્તકાળ માટેનું પ્રચલિત સૂત્ર આપે છે.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (14.29)$$

ઉદાહરણ 14.9 જે દર સેકન્ડ ટીક કરે છે તેવા સાદા લોલકની લંબાઈ કેટલી થશે ?

ઉકેલ સમીકરણ (14.29) પરથી સાદા લોલકનો આવર્તકાળ નીચે પ્રમાણે આપવામાં આવે છે :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

આ સંબંધ પરથી આપણને મળશે.

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

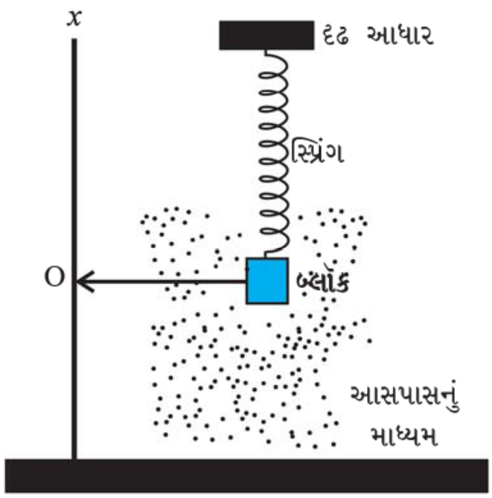
જે દર સેકન્ડ ટીક કરે તેવા સાદા લોલકનો આવર્તકાળ 2 s છે. આમ, $g = 9.8$ m s^{-2} અને $T = 2$ s માટે,

$$L = \frac{9.8(\text{m s}^{-2})\times 4(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1 \text{ m}$$

14.9 અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ (DAMPED SIMPLE HARMONIC MOTION)

આપણે જાણીએ છીએ કે હવામાં ઝૂલતાં એક સાદા લોલકની ગતિ, ધીરે ધીરે અંતમાં નષ્ટ થઈ જાય છે. આમ કેમ થાય છે ? આનું કારણ એ છે કે, હવાનું ખેંચાણ (Drag) અને આધાર પરનું ઘર્ષણ (Friction) એ લોલકની ગતિને અવરોધે છે અને તેથી તેની ઊર્જાનો ધીમે ધીમે વ્યય થાય છે. આ લોલકને **અવમંદિત દોલનો (damped oscillations)** કરતું કહેવામાં આવે છે. અવમંદિત દોલનોમાં, જોકે પ્રણાલીની ઊર્જા સતત વ્યય થતી રહે છે. આમ છતાં નાના અવમંદન માટે તે દોલનો દેખીતી રીતે આવર્ત જ રહે છે. આ અવમંદિત બળો સામાન્યપણે ઘર્ષણ બળો છે. દોલકની ગતિ પર આવાં બાહ્ય બળોની અસરને સમજવા માટે, ચાલો આપણે આકૃતિ 14.19માં બતાવ્યા પ્રમાણેનું એક ઉદાહરણ જોઈએ. અહીં k સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડેલ m દ્રવ્યમાનનો એક બ્લૉક એ ઊર્ધ્વતલમાં (શિરોલંબ) દોલન કરે છે. આ બ્લૉકને નીચેની તરફ થોડુંક ખેંચીને મુક્ત કરતાં, તેનાં દોલનની કોણીય આવૃત્તિ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ થશે જે સમીકરણ (14.20)માં જોઈ શકાય છે. જોકે વ્યવહારમાં, આસપાસનું માધ્યમ (હવા) એ આ બ્લૉકની ગતિ પર અવમંદિત બળ લગાડે છે અને આ બ્લૉક-સ્પ્રિંગ પ્રણાલીની યાંત્રિકઊર્જામાં ઘટાડો થશે. ઊર્જાનો આ ઘટાડો એ આસપાસના માધ્યમની (અને બ્લૉકની પણ) ઉષ્મા તરીકે દેખાય છે. [આકૃતિ 14.19]



આકૃતિ 14.19 આસપાસનું શ્યાન માધ્યમ એ દોલિત સ્પ્રિંગ પર એક અવમંદિત બળ લગાડે છે જે અંતમાં તેને સ્થિર કરે છે.

આ અવમંદિત બળો એ આસપાસના માધ્યમની પ્રકૃતિ પર આધારિત હોય છે. જો આ બ્લૉકને પ્રવાહીમાં ડૂબાડવામાં આવે, તો અવમંદન ખૂબ વધારે હશે અને ઊર્જાનો વ્યય ઘણો ઝડપી થશે. સામાન્યતઃ, અવમંદન એ બ્લૉકના (કે બૉબ)ના વેગનાં સમપ્રમાણમાં હોય છે [સ્ટૉકનો નિયમ યાદ કરો, સમીકરણ (10.19)] અને વેગની વિરુદ્ધ દિશામાં લાગે છે. જો અવમંદન બળને $\mathbf{F}_d$ વડે દર્શાવવામાં આવે, તો આપણને

$$\mathbf{F}_d = -b\,\boldsymbol{\upsilon} \tag{14.30}$$

મળે છે. જ્યાં ધન અચળાંક b એ માધ્યમની લાક્ષણિકતાઓ (ઉદાહરણ તરીકે સ્નિગ્ધતા) અને બ્લૉકના આકાર અને પરિમાણ વગેરે પર આધારિત છે. સમીકરણ (14.30) એ મહદંશે નાના વેગ માટે યથાર્થ છે.

જ્યારે m દ્રવ્યમાનને (આકૃતિ 14.19 માં દર્શાવ્યા મુજબ ઉર્ધ્વ લટકાવેલી) સ્પ્રિંગ સાથે જોડીને છોડવામાં આવે છે, ત્યારે સ્પ્રિંગ થોડી ખેંચાશે અને આ દ્રવ્યમાન અમુક ઊંચાઈ પર સ્થિર થશે. આકૃતિ 14.19માં આ સ્થિતિને O દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ છે, તે આ દ્રવ્યમાનની સંતુલન સ્થિતિ છે. જો દ્રવ્યમાનને થોડુંક નીચે ખેંચવામાં આવે કે ઉપર ધકેલવામાં આવે, તો સ્પ્રિંગને કારણે બ્લૉક પર પુનઃસ્થાપક બળ $\mathbf{F}_s = -k\mathbf{x}$ લાગે છે, જ્યાં $\mathbf{x}$ એ તેના સંતુલન સ્થાનથી દ્રવ્યમાનનું સ્થાનાંતર છે. આમ, કોઈ પણ t સમયે દ્રવ્યમાન પર લાગતું કુલ બળ $\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\boldsymbol{\upsilon}$ છે. જો t સમયે દ્રવ્યમાનનો પ્રવેગ $\mathbf{a}(t)$ હોય, તો ન્યૂટનના ગતિના દ્વિતીય નિયમ દ્વારા ગતિની દિશાને અનુલક્ષીને, આપણને

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\,\upsilon(t) \tag{14.31}$$

મળે. અહીં આપણે સદિશ સંકેત નથી લીધાં કારણ કે આપણે એકપરિમાણીય ગતિ પર ચર્ચા કરી રહ્યા છીએ. વેગ $v(t)$ અને પ્રવેગ $\mathbf{a}(t)$ માટે અનુક્રમે $x(t)$ના પ્રથમ અને દ્વિતીય વિકલનનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \tag{14.32}$$

મળે છે. સમીકરણ (14.32)નો ઉકેલ એ અવમંદિત બળ (જે વેગના સમપ્રમાણમાં છે)ની હાજરીમાં ગતિ કરતાં બ્લૉકની ગતિનું વર્ણન કરે છે. ઉકેલ એ નીચેના સ્વરૂપમાં જોવા મળે છે.

$$x(t) = \mathrm{A}\,e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \tag{14.33}$$

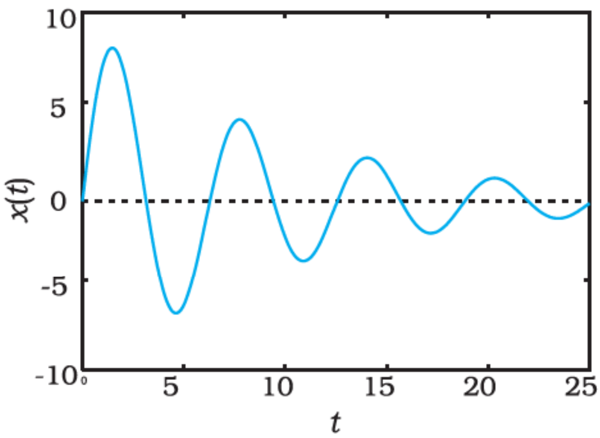
જ્યાં $\mathrm{A}\,e^{-bt/2m}$ અવમંદિત દોલકનો કંપવિસ્તાર અને ω' તેની કોણીય આવૃત્તિ છે. જેને,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{14.34}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

આ વિધેયમાં, cosine વિધેયનો આવર્તકાળ $2\pi/\omega'$ છે આમ છતાં વિધેય $x(t)$ એ શુદ્ધ આવર્ત નથી કારણ કે $e^{-bt/2m}$ અવયવ લીધે તે સમય સાથે સતત ઘટતો જાય છે. જોકે, એક આવર્તકાળ T દરમિયાન થતો આ ઘટાડો જો નાનો હોય, તો સમીકરણ (14.33) દ્વારા પ્રસ્તુત આ ગતિ લગભગ આવર્ત છે.

આ ઉકેલ, સમીકરણ (14.33), આકૃતિ 14.20માં બતાવ્યા પ્રમાણે આલેખના રૂપમાં રજૂ કરી શકાય છે. આપણે તેને cosine વિધેય તરીકે ગણી શકીએ કે જેનો કંપવિસ્તાર $\mathrm{A}\,e^{-bt/2m}$ છે, તે ધીમે ધીમે સમય સાથે ઘટે છે.



આકૃતિ **14.20** *એક અવમંદિત દોલક એ દોલનના ઘટતાં કંપવિસ્તારવાળું લગભગ આવર્ત છે. વધુ અવમંદન સાથે તેનાં દોલનો ઝડપથી નાશ પામે છે.*

હવે, અવમંદિત (આદર્શ) દોલકની યાંત્રિકઊર્જા $E = 1/2\ k\mathrm{A}^2$ છે. અવમંદિત દોલક માટે, તેની યાંત્રિકઊર્જા અચળ નથી પરંતુ તે સમય સાથે ઘટે છે. જો અવમંદન નાનું હોય, તો આપણે કંપવિસ્તાર $\mathrm{A}\,e^{-bt/2m}$ મૂકીને તે જ સમીકરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

$$E(t) = \frac{1}{2}k\mathrm{A}^2\,e^{-bt/m} \tag{14.35}$$

સમીકરણ (14.35) દર્શાવે છે કે આ પ્રણાલીની કુલ ઊર્જા સમય સાથે ચર-ઘાતાંકીય રીતે ઘટે છે. નોંધ કરો કે નાના અવમંદનનો અર્થ છે કે $\left(\frac{b}{\sqrt{k\,m}}\right)$ પરિમાણરહિત ગુણોત્તર 1 થી બહુ નાનો છે.

* ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ આ બ્લૉક એ સ્પ્રિંગ પર સ્થિર સમતુલન સ્થિતિ O પર હશે; અહીં x તે બિંદુથી સ્થાનાંતર રજૂ કરે છે.

અલબત્ત, જો આપણે $b = 0$ મૂકીએ, તો અવમંદિત દોલકનાં આ પરિચ્છેદનાં બધાં જ સમીકરણો એ, અપેક્ષા મુજબ, અવમંદન વિનાના (આદર્શ) દોલકનાં અનુરૂપ સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત થશે.

▶ *ઉદાહરણ 14.10* આકૃતિ 14.19 માં બતાવ્યા પ્રમાણે અવમંદિત દોલક માટે, બ્લૉકનું દ્રવ્યમાન 200 g, k = 90 N m^{-1} અને અવમંદન અચળાંક b, 40 g s^{-1} છે તો (a) દોલનનો આવર્તકાળ (b) તેના દોલનના કંપવિસ્તારનું મૂલ્ય પ્રારંભિક મૂલ્ય કરતાં અડધું થવા માટે લાગતો સમય અને (c) તેની યાંત્રિકઊર્જાનું મૂલ્ય પ્રારંભિક મૂલ્ય કરતાં અડધું થવા માટે લાગતા સમયની ગણતરી કરો.

ઉકેલ

(a) આપણે જોઈએ છીએ કે $km = 90 \times 0.2 = 18$ kg N m^{-1} = 18 kg^2 s^{-2}; આથી $\sqrt{km}$ = 4.243 kg s^{-1} અને b = 0.04 kg s^{-1}. આથી b એ $\sqrt{km}$ થી ખૂબ જ નાનો છે. આથી સમીકરણ (14.34) દ્વારા આવર્તકાળ T આપી શકાય,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.2\ kg}{90\ \text{N}\ m^{-1}}}$$

$$= 0.3\ \text{s}$$

(b) હવે, સમીકરણ (14.33) પરથી, કંપવિસ્તારને તેના પ્રારંભિક મૂલ્યથી અડધો થવા માટે લાગતો સમય, $T_{1/2}$ વડે આપવામાં આવે છે,

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200\ \text{s}$$

$$= 6.93\ \text{s}$$

(c) તેની યાંત્રિક ઊર્જાના પ્રારંભિક મૂલ્યને અડધી થવા માટે લેવામાં આવતો સમય $t_{1/2}$ની ગણતરી કરવા માટે આપણે સમીકરણ (14.35)નો ઉપયોગ કરીશું. આ સમીકરણ પરથી આપણને મળશે.

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

અથવા $$\tfrac{1}{2} = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

અથવા $$t_{1/2} = \frac{0.693}{40\text{g s}^{-1}} \times 200\text{g}$$

$$= 3.46\ \text{s}$$

આ કંપવિસ્તારના ક્ષયકાળથી માત્ર અડધો છે. આ આશ્ચર્યજનક નથી, કારણ કે સમીકરણ (14.33) અને (14.35) અનુસાર, ઊર્જા એ કંપવિસ્તારના વર્ગ પર આધાર રાખે છે. નોંધ લો કે ઘાતમાં 2નો અંક એ બંને ચર-ઘાતાંકીય પદોમાં છે. ◀

14.10 પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનો અને અનુનાદ (FORCED OSCILLATIONS AND RESONANCE)

જ્યારે કોઈ એક પ્રણાલી (જેવી કે સાદું લોલક અથવા સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ એક બ્લૉક)ને તેની સંતુલિત અવસ્થામાંથી સ્થાનાંતરિત કરીને મુક્ત કરવામાં આવે, તો તે તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે દોલનો કરશે અને આ દોલનોને **મુક્ત દોલનો (free oscillations)** કહેવાય છે. કાયમ હાજર એવાં અવમંદન બળોનાં કારણે બધાં જ મુક્ત દોલનો સમય જતાં ક્ષય પામે છે. આમ છતાં, કોઈ બાહ્ય પરિબળ આ દોલનો ટકાવી રાખી શકે છે. આવાં દોલનોને **બળપ્રેરિત (Forced)** અથવા **પ્રણોદિત (driven) દોલનો (Oscillations)** કહેવાય છે. આપણે એક આવર્ત બાહ્ય બળનો કિસ્સો લઈશું કે જેની આવૃત્તિ ω_d છે કે જેને પ્રણોદિત આવૃત્તિ કહેવાય છે. કોઈ બળ પ્રેરિત આવર્ત દોલનો માટે એ અતિ મહત્ત્વનું સત્ય છે કે આ પ્રણાલી તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે નહિ પણ બાહ્ય પરિબળની આવૃત્તિ ω_dથી દોલનો કરશે અને તેનાં મુક્ત દોલનો અવમંદનના કારણે અટકી જશે. બળપ્રેરિત દોલનનું સૌથી વધુ પ્રચલિત ઉદાહરણ એ, બગીચામાં હીંચકામાં ઝૂલતો કોઈ એક બાળક આ દોલનો જાળવી રાખવા તેના પગથી સમયાંતરે જમીનને ધક્કો લગાવે છે (અથવા બીજું કોઈ આ બાળકને સમયાંતરે ધક્કો લગાવતું હોય.) તે છે.

ધારો કે કોઈ એક અવમંદિત દોલક પર F_0 જેટલા કંપવિસ્તારનું સમયાંતરે બદલાતું કોઈ આવર્ત બાહ્ય બળ $F(t)$ લાગુ પડે છે. આવા બળને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય છે :

$$F(t) = F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

રેખીય પુનઃસ્થાપક બળ (restoring force), અવમંદન બળ (damping force) અને સમીકરણ (14.36) દ્વારા રજૂ કરાયેલ સમય આધારિત પ્રણોદિત (ચાલક) બળ (driving force)ની સંયુક્ત અસર નીચે કણની ગતિને

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\upsilon(t) + F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

આ સમીકરણ (14.37a)માં પ્રવેગ માટે d^2x/dt^2 મૂકતાં અને તેની પુનઃગોઠવણી કરતાં,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_d t \quad (14.37b)$$

મળે છે. આ m દ્રવ્યમાનના દોલકનું સમીકરણ છે જેના પર (કોણીય) આવૃત્તિ ω_dનું આવર્ત બળ લગાડવામાં આવેલ છે. આ દોલક શરૂઆતમાં તેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω સાથે દોલનો કરે છે. જ્યારે આપણે બાહ્ય આવર્ત બળ લાગુ કરીએ છીએ, ત્યારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિનાં દોલનો ક્ષીણ થાય છે અને પછી આ પદાર્થ બાહ્ય આવર્ત બળની (કોણીય) આવૃત્તિ સાથે દોલનો કરે છે. તેનાં પ્રાકૃતિક આવર્તનો સંપૂર્ણ ક્ષય પામે ત્યાર બાદ તેના સ્થાનાંતરને

$$x(t) = A \cos (\omega_d t + \phi) \quad (14.38)$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જ્યાં, સમય tને જ્યારથી આપણે આવર્ત બળ લાગુ પાડીએ તે ક્ષણથી માપવામાં આવે છે.

કંપવિસ્તાર A એ બળપ્રેરિત આવૃત્તિ ω_d અને પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ωનું વિધેય છે. વિશ્લેષણ દર્શાવે છે કે તેને નિમ્ન સ્વરૂપે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$A = \frac{F_0}{\{m^2(\omega^2 - \omega_d^2)^2 + \omega_d^2 b^2\}^{1/2}} \quad (14.39a)$$

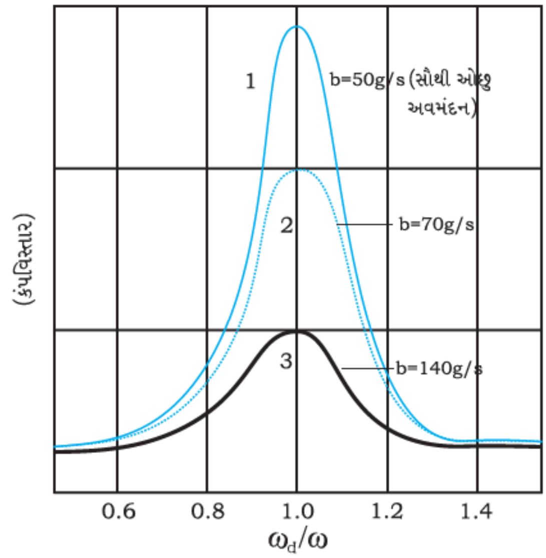
$$\text{અને} \quad \tan\phi = \frac{-\upsilon_0}{\omega_d x_0} \quad (14.39b)$$

જ્યાં m એ કણનું દ્રવ્યમાન છે અને υ_0 અને x_0 એ $t = 0$ સમયે કણનો વેગ અને કણનું સ્થાનાંતર છે. આ એ સમય છે કે જ્યારે આપણે આવર્ત બળ લાગુ પાડીએ છીએ. સમીકરણ (14.39a) બતાવે છે કે બળપ્રેરિત દોલકનો આવર્તકાળ ચાલક બળની (કોણીય) આવૃત્તિ પર આધારિત છે. જ્યારે ω_d એ ωથી સદંતર ભિન્ન હોય ત્યારે, તથા જ્યારે તે ω ની નજીક હોય ત્યારે, આપણને દોલકનાં જુદાં જુદાં વર્તન જોવા મળે છે. આપણે આ બે કિસ્સાઓની વિચારણા કરીશું.

(a) નાનું અવમંદન અને ચાલક આવૃત્તિ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિથી ખૂબ જુદી હોય (Small Damping, Driving Frequency Far from Natural Frequency) : આ કિસ્સામાં $\omega_d b$ એ $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ કરતાં ઘણી ઓછી હશે અને આપણે તે પદને અવગણી શકીએ છીએ. આથી સમીકરણ (14.39) થશે,

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_d^2)} \quad (14.40)$$

તંત્રમાં વિભિન્ન માત્રાના અવમંદનની હાજરીમાં દોલકનો સ્થાનાંતર કંપવિસ્તાર, ચાલક બળ (driving force)ની કોણીય આવૃત્તિ પર કેવી રીતે આધાર રાખે છે તે આકૃતિ (14.21)માં દર્શાવ્યું છે. તે નોંધવું રહ્યું કે જ્યારે $\omega_d / \omega = 1$ ત્યારે તમામ કિસ્સાઓમાં કંપવિસ્તાર સૌથી મોટો હોય છે. આ આકૃતિના વક્રો દર્શાવે છે કે જેમ અવમંદન નાનું તેમ અનુનાદ (resonance) શિખરો ઊંચાં અને સાંકડા હોય છે.



આકૃતિ 14.21 ચાલક બળની કોણીય આવૃત્તિના વિધેય તરીકે પ્રણોદિત દોલકનો સ્થાનાંતર કંપવિસ્તાર અનુનાદ શરત $\omega_d / \omega = 1$ આગળ કંપવિસ્તાર મહત્તમ છે. ત્રણ વક્રો તંત્રમાં પ્રવર્તતા જુદા જુદા અવમંદનને અનુરૂપ છે. વક્ર 1 અને 3 તંત્રમાં અનુક્રમે લઘુત્તમ અને મહત્તમ અવમંદનને અનુરૂપ છે.

જો આપણે ચાલક બળની આવૃત્તિને બદલતાં જઈએ તો જ્યારે તે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ બરાબર થાય ત્યારે કંપવિસ્તાર અનંત તરફ જાય છે. પરંતુ આ શૂન્ય અવમંદનનો આદર્શ કિસ્સો છે, જે એક વાસ્તવિક પ્રણાલીમાં ક્યારેય શક્ય નથી કારણ કે અવમંદન સંપૂર્ણપણે શૂન્ય ક્યારેય ના હોઈ શકે. તમે હીંચકામાં અનુભવ કર્યો હોવો જોઈએ કે જ્યારે તમારા ધક્કાનો સમય હીંચકાના આવર્તકાળ સાથે સુમેળ સાધે છે ત્યારે તમારો હિંચકો મહત્તમ કંપવિસ્તારને પ્રાપ્ત કરે છે. આ કંપવિસ્તાર મોટો હોય છે, પરંતુ અનંત નથી, કારણ કે હંમેશાં તમારા હીંચકામાં કંઈક અંશે અવમંદન હોય જ છે જે હવે પછી (b)માં સ્પષ્ટ થશે.

(b) ચાલક આવૃત્તિ એ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીક હોય : (Driving Frequency Close to Natural Frequency) : જો ω_d એ ωની ખૂબ જ નજીકની હોય તો, $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ એ $\omega_d b$ કરતાં ઘણું ઓછું હશે, bના કોઈ પણ વાજબી મૂલ્ય માટે પછી સમીકરણ (14.39a)

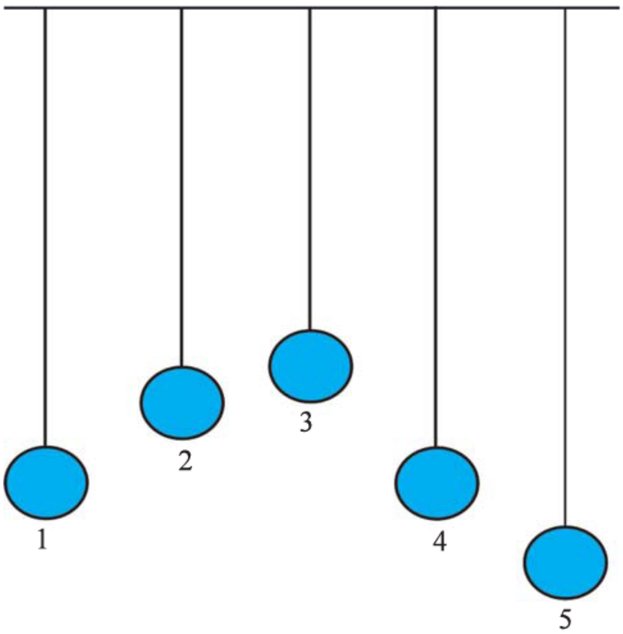
$$A = \frac{F_0}{\omega_d b} \quad (14.41)$$

થશે. આ સ્પષ્ટ કરે છે કે આપેલ ચાલક બળની આવૃત્તિ માટે મહત્તમ શક્ય કંપવિસ્તાર એ ચાલક આવૃત્તિ અને અવમંદન દ્વારા અંકુશિત છે અને તે ક્યારેય અનંત થતો નથી. જ્યારે ચાલક બળની આવૃત્તિ એ દોલકની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીક હોય ત્યારે કંપવિસ્તારમાં થતાં વધારાની ઘટનાને **અનુનાદ (Resonance)** કહેવામાં આવે છે.

આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણે કેટલીયે ઘટના અનુભવીએ છીએ જેમાં અનુનાદ સામેલ છે. હીંચકાનો અનુભવ એ અનુનાદનું

સારું ઉદાહરણ છે. તમને કદાચ સમજાયું હશે કે હીંચકાને વધુ ઊંચાઈ પર ઝૂલવવાનું કૌશલ્ય એ હીંચકાની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ સાથે જમીન પર જોર લગાડવાના લયના સુમેળમાં રહેલું છે.

આ મુદ્દાને વધુ સમજાવવા માટે ચાલો આકૃતિ 14.22માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક જ દોરડાથી લટકાવેલ જુદી-જુદી પાંચ લંબાઈના સાદા લોલકોના સમૂહને ધ્યાનમાં લઈએ. લોલક 1 અને 4 સમાન લંબાઈના છે અને અન્યની લંબાઈ અલગ અલગ છે. હવે ચાલો લોલક 1ને ગતિમાં લાવીએ. આ લોલકની ઊર્જાએ સંબંધિત-(કનેક્ટીંગ)-દોરી મારફતે અન્ય લોલકોમાં તબદીલ થશે અને તેઓ દોલન શરૂ કરે છે. આ સંબંધિત-દોરી દ્વારા ચાલક બળ પ્રદાન કરવામાં આવે છે. આ બળની આવૃત્તિ એવી આવૃત્તિ છે કે જેની સાથે લોલક-1 દોલન કરે છે. જો આપણે લોલકો 2, 3 અને 5ની પ્રતિક્રિયાનું અવલોકન કરીએ, તો સૌપ્રથમ તેઓ તેમના દોલનની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ અને વિવિધ કંપવિસ્તાર સાથે દોલનો શરૂ કરે છે. પરંતુ આ ગતિ ધીમે ધીમે ક્ષય પામે છે અને કાયમ રહેતી નથી. દોલનની તેમની આવૃત્તિઓ



આકૃતિ 14.22 *એક જ આધાર પરથી લટકાવેલા જુદી જુદી લંબાઈનાં પાંચ સાદાં લોલકો*

ધીમે ધીમે બદલાય છે અને છેવટે તેઓ લોલક 1ની આવૃત્તિ એટલે કે ચાલક બળની આવૃત્તિ સાથે પણ વિવિધ કંપવિસ્તારો સાથે દોલન કરે છે, તેઓ નાના કંપવિસ્તાર સાથે દોલન કરે છે. લોલક 4ની પ્રતિક્રિયા લોલકોના આ જૂથથી વિરુદ્ધ છે. તે લોલક 1ની સમાન આવૃત્તિ સાથે દોલન કરે છે અને તેનો કંપવિસ્તાર ધીમે ધીમે વધે છે અને તે ખૂબ જ મોટો બને છે. આ એક અનુનાદ જેવો પ્રતિભાવ જોવા મળે છે. કારણ કે આમાં અનુનાદ માટેની શરત સંતોષાય છે, એટલે કે પ્રણાલીની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ એ ચાલક બળની આવૃત્તિ સાથે એકરૂપ થાય છે. તેથી આમ બને છે.

આપણે અત્યાર સુધી એવી જ દોલિત પ્રણાલીઓ લીધી હતી કે જેમને એક જ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ હોય. સામાન્ય રીતે, પ્રણાલી એક કરતાં વધુ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ ધરાવતી હોય છે. આવી પ્રણાલીઓનાં ઉદાહરણો (કંપન કરતા તાર, હવાનો સ્તંભ વગેરે) તમે હવે પછીના પ્રકરણમાં જોશો. કોઈ પણ યાંત્રિક માળખું, જેમકે એક બિલ્ડિંગ, એક બ્રિજ, કે એક હવાઈ જહાજને એક કરતાં વધારે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ હોવાની શક્યતા છે. કોઈ એક બાહ્ય આવર્ત બળ અથવા વિક્ષેપ એ આ પ્રણાલીને પ્રણોદિત દોલનમાં મૂકશે. જો આકસ્મિક રીતે, પ્રણોદિત આવૃત્તિ ω_d એ આ પ્રણાલીની કોઈ એક પ્રાકૃતિક આવૃત્તિની નજીકની હશે, તો દોલનોનો કંપવિસ્તાર વધારે વધશે (અનુનાદ - resonance) અને શક્ય નુકસાનમાં પરિણમે. આ જ કારણથી પુલ પસાર કરતી વખતે સૈનિકો કૂચભંગ કરે છે. આ જ કારણોસર, ભૂકંપમાં એ અસરગ્રસ્ત વિસ્તારના દરેક મકાનો કે જે સમાન મજબૂતાઈ અને માલસામાનનાં બનેલા હોય તોપણ તેને સમાન ક્ષતિ પહોંચતી નથી. મકાનની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ એ તેની ઊંચાઈ અને અન્ય પરિબળો અને બિલ્ડિંગ મટિરિયલ્સની પ્રકૃતિ પર આધારિત છે. જેની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ સેસમીક (ભૂકંપનાં) તરંગોની આવૃત્તિની નજીકની હોય તેને વધુ નુકસાન થવાની શક્યતા છે.

સારાંશ

1. પોતાને પુનરાવર્તન કરવાની ગતિને આવર્તગતિ કહેવાય છે.
2. આવર્તકાળ T એ એક સંપૂર્ણ કંપન અથવા એક ચક્ર માટે જરૂરી સમય છે. તે આવૃત્તિ સાથે

$$T = \frac{1}{\upsilon}$$

વડે સંબંધિત છે.

આવર્ત અથવા દોલન ગતિની આવૃત્તિ એ એકમ સમય દીઠ દોલનોની સંખ્યા છે. SI માં તે heartzમાં માપવામાં આવે છે.

$$1 \text{ heartz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ દોલન પ્રતિ સેકન્ડ} = 1 \text{ s}^{-1}$$

3. સરળ આવર્તગતિ (સ.આ.ગ./SHM)માં તેના સંતુલન સ્થાનથી કણનું સ્થાનાંતર $x(t)$ને નીચેનાં સ્વરૂપે આપવામાં આવે છે.

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \text{ (સ્થાનાંતર)}$$

જેમાં A એ સ્થાનાંતરનો કંપવિસ્તાર છે. રાશિ $(\omega t + \phi)$ એ ગતિની કળા છે અને ϕ એ કળા-અચળાંક છે. કોણીય આવૃત્તિ ω, એ આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ સાથે

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \text{ (કોણીય આવૃત્તિ)}$$

વડે સંબંધિત છે.

4. સરળ આવર્તગતિને નિયમિત વર્તુળમય ગતિની તે વર્તુળના વ્યાસ પરના પ્રક્ષેપ તરીકે જોઇ શકાય છે.

5. સમયના વિધેય તરીકે સ.આ.ગ. દરમ્યાન કણનો વેગ અને પ્રવેગ નીચે મુજબ છે :

$$\upsilon(t) = -\omega A \sin (\omega t + \phi) \text{ (વેગ)}$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi)$$
$$= -\omega^2 x(t) \text{ (પ્રવેગ)}$$

આ રીતે આપણે કહી શકીએ છીએ કે, સરળ આવર્તગતિ કરતાં પદાર્થનો વેગ અને પ્રવેગ બંને આવર્ત વિધેયો છે, કે જેમનો અનુક્રમે વેગ કંપવિસ્તાર $\upsilon_m = \omega A$ અને પ્રવેગ કંપવિસ્તાર $a_m = \omega^2 A$ છે.

6. સરળ આવર્તગતિ દરમ્યાન લાગતું બળ એ સ્થાનાંતરના સમપ્રમાણમાં હોય છે અને હંમેશાં ગતિના મધ્યમાન સ્થાન તરફ હોય છે.

7. સરળ આવર્તગતિ કરતાં કણને કોઈ પણ સમયે ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ અને સ્થિતિઊર્જા $U = \frac{1}{2} kx^2$ હોય છે. જો કોઈ પણ ઘર્ષણ હાજર ન હોય, તો K અને U સમય સાથે બદલાતાં હોવા છતાં પ્રણાલીની યાંત્રિકઊર્જા $E = K + U$ હંમેશાં અચળ રહે છે.

8. $F = -k\,x$ દ્વારા આપવામાં આવેલા હૂકના નિયમ મુજબ પુનઃસ્થાપક બળની અસર હેઠળ m દ્રવ્યમાનનું કણ એ સરળ આવર્તગતિ કરે છે જેના માટે,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (કોણીય આવૃત્તિ)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ (આવર્તકાળ)}$$

આવી પ્રણાલીને રેખીય દોલક પણ કહેવાય છે.

9. નાના ખૂણાઓ સુધી ઝૂલતાં સાદા લોલકની ગતિ લગભગ સરળ આવર્ત છે. આ દોલનનો આવર્તકાળ છે :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

10. વાસ્તવિક દોલિત તંત્રમાં યાંત્રિકઊર્જા દોલનો દરમિયાન ઘટે છે કારણ કે બાહ્ય બળો, જેમકે ઘર્ષણ, દોલનોને અવરોધે છે અને યાંત્રિકઊર્જાનું ઉષ્માઊર્જામાં રૂપાંતર કરે છે. ત્યારે વાસ્તવિક દોલક અને તેની ગતિને અવમંદિત હોવાનું કહેવાય છે. જો અવમંદન બળ $F_d = -b\upsilon$ દ્વારા આપવામાં આવે, જ્યાં υ એ દોલકનો વેગ છે અને b એ અવમંદન અચળાંક હોય, તો દોલકનું સ્થાનાંતર

$x(t) = A\ e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$ હશે.

જ્યાં ω' અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ જેને

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

જો અવમંદન અચળાંક નાનો હોય તો $\omega' \approx \omega$ જ્યાં ω એ અવમંદિત દોલકની કોણીય આવૃત્તિ છે. અવમંદિત દોલકની યાંત્રિકઊર્જા Eને

$$E(t) = \frac{1}{2} kA^2 e^{-bt/m}$$

વડે આપવામાં આવે છે.

11. ω પ્રાકૃતિક કોણીય આવૃત્તિવાળી દોલન પ્રણાલી પર ω_d કોણીય આવૃત્તિવાળું કોઈ બાહ્ય બળ લગાડવામાં આવે, તો આ પ્રણાલી કોણીય આવૃત્તિ ω_dથી દોલન કરશે. આ દોલનોનો કંપવિસ્તાર સૌથી મહત્તમ હશે જ્યારે $\omega_d = \omega$ હોય તે અનુનાદની શરત છે.

ભૌતિકરાશિ (Physical Quantity)	પ્રતિક (Symbol)	પરિમાણ (Dimensions)	એકમ (Unit)	નોંધ (Remarks)
આવર્તકાળ (Period)	T	$[T]$	s	પોતાને પુનરાવર્તન કરવાનો ગતિનો લઘુતમ સમય
આવૃત્તિ (Frequency)	ν (અથવા f)	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
કોણીય આવૃત્તિ (Angular Frequency)	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\omega = 2\pi\nu$
કળા-અચળાંક (Phase Constant)	ϕ	પરિમાણરહિત (Dimensionless)	rad	સ.આ.ગ.માં સ્થાનાંતરની કળાનું પ્રારંભિક મૂલ્ય
બળ-અચળાંક (Force Constant)	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	સરળ આવર્તગતિ $F = -k\ x$

વિચારવા લાયક મુદ્દાઓ (POINTS TO PONDER)

1. આવર્તકાળ T તે એવો લઘુતમ સમય છે કે ત્યાર બાદ ગતિ પોતે પુનરાવર્તન કરે છે. આમ, ગતિ nT પછી જ પુનરાવર્તન કરે છે જ્યાં, n એક પૂર્ણાંક છે.

2. દરેક આવર્તગતિ સરળ આવર્તગતિ નથી. જે આવર્તગતિ બળના નિયમ $F = -k\ x$ દ્વારા સંચાલિત હોય તે જ માત્ર સરળ આવર્ત ગતિ છે.

3. વ્યસ્ત-વર્ગ નિયમ બળ (ગ્રહોની ગતિમાં) ઉપરાંત દ્વિ-પરિમાણોમાં સરળ આવર્તબળ $-m\omega^2 r$ ને કારણે વર્તુળમય ગતિ ઉત્પન્ન થાય છે. બીજા કિસ્સામાં, બે લંબવત દિશામાં (x અને y) ગતિની કળાઓ $\omega/2$ જેટલી અલગ હોવી જોઈએ. આમ, કોઈ એક કણ કે જેની પ્રારંભિક સ્થિતિ (o, A) અને વેગ (ωA, 0) હોય તેના પર $-m\omega^2 r$ બળ લગાડતા તે A ત્રિજ્યાના એક વર્તુળમાં નિયમિત રીતે ગતિ કરે છે.

4. આપેલ ω ની રેખીય સરળ આવર્તગતિ માટે બે યાદચ્છિક પ્રારંભિક શરતો જરૂરી છે અને ગતિ સંપૂર્ણપણે નક્કી કરવા માટે તે પર્યાપ્ત છે. આ પ્રારંભિક શરત : (i) પ્રારંભિક સ્થિતિ અને પ્રારંભિક વેગ અથવા (ii) કંપવિસ્તાર અને કળા અથવા (iii) ઊર્જા અને કળા હોઈ શકે છે.

5. ઉપર્યુક્ત મુદ્દા 4 પરથી, જો કંપવિસ્તાર અથવા ઊર્જા આપેલ હોય, તો પ્રારંભિક સ્થિતિ અથવા પ્રારંભિક વેગ દ્વારા ગતિની કળાઓ શોધવામાં આવે છે.

6. એ જરૂરી નથી કે યદૃચ્છ કંપવિસ્તારો અને કળાઓ સાથેની બે સરળ આવર્તગતિનું સંયોજન આવર્ત જ હોય. જો એક ગતિની આવૃત્તિ એ અન્યની આવૃત્તિનો એક પૂર્ણાંક ગુણાંક હોય, ત્યારે જે-તે આવર્ત થાય છે. જોકે, આવર્તગતિ હંમેશાં યોગ્ય કંપવિસ્તાર સાથેની અનંત આવર્તગતિઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવી શકાય છે.

7. સ.આ.ગ.નો આવર્તકાળ એ કંપવિસ્તાર અથવા ઊર્જા અથવા કળા-અચળાંક પર આધાર રાખતો નથી. જે ગુરુત્વાકર્ષણ (કૅપ્લરનો ત્રીજો નિયમ) હેઠળ ગ્રહોની ભ્રમણ કક્ષાના આવર્તકાળ સાથે વિરોધાભાસ દર્શાવે છે.

8. એક સાદા લોલકની ગતિ નાના કોણીય સ્થાનાંતર માટે સરળ આવર્ત છે.

9. કણની ગતિને સરળ આવર્ત થવા માટે તેના સ્થાનાંતર xને નીચેનાં સ્વરૂપોમાંથી કોઈ પણ એક રૂપમાં જ દર્શાવવા જોઈએ :

   $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

   $x = A \cos (\omega t + \alpha)$, $x = B \sin (\omega t + \beta)$

   આ ત્રણ સ્વરૂપો સંપૂર્ણપણે સમતુલ્ય છે. (કોઈ પણ એકને અન્ય બે સ્વરૂપોના પદમાં વ્યક્ત કરી શકાય છે.)

   આ રીતે અવમંદિત સરળ આવર્તગતિ [સમીકરણ (14.31)] એ ખરા અર્થમાં સરળ આવર્ત નથી. તે આશરે માત્ર $2m/b$ કરતાં ઘણા ઓછા સમય અંતરાલો માટે જ સરળ છે, જ્યાં b એ અવમંદન અચળાંક છે.

10. બળપ્રેરિત (પ્રણોદિત) દોલનોમાં સ્થાયી અવસ્થાની ગતિ (મુક્ત દોલનો નાશ પામે પછી) એક સરળ આવર્તગતિ છે, જેની આવૃત્તિ એ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ ω નથી હોતી પણ તે પ્રણોદિત દોલન ઉત્પન્ન કરતાં બાહ્ય બળની આવૃત્તિ ω_d છે.

11. શૂન્ય અવમંદનની આદર્શ સ્થિતિમાં અનુનાદ પર સરળ આવર્તગતિના કંપવિસ્તાર અનંત હોય છે. આ કોઈ સમસ્યા નથી. તમામ વાસ્તવિક પ્રણાલીઓમાં ગમે તેટલું નાનું પણ થોડુંક તો અવમંદન હોય જ છે. તેથી આવી સ્થિતિ કદી જોવા મળતી નથી.

12. પ્રણોદિત (બળપ્રેરિત) દોલનમાં, કણની આવર્તગતિની કળા પ્રણોદિત બળની કળાથી અલગ હોય છે.

સ્વાધ્યાય

14.1 નીચેનામાંથી કયાં ઉદાહરણો આવર્તગતિ દર્શાવે છે ?

(a) એક તરવૈયો એક નદીના એક કિનારેથી બીજા કિનારે અને ત્યાંથી પરતની સફર પૂર્ણ કરે છે.

(b) એક મુક્ત રીતે લટકાવેલ ગજિયા ચુંબકને તેની N–S દિશામાંથી સ્થાનાંતર આપી અને મુક્ત કરવામાં આવે છે.

(c) તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતો હાઇડ્રોજન પરમાણુ

(d) એક ધનુષમાંથી છોડેલું તીર

14.2 નીચેનામાંથી કયાં ઉદાહરણો એ (લગભગ) સરળ આવર્તગતિ દર્શાવે છે અને કયા જે આવર્ત દર્શાવે છે પરંતુ સરળ આવર્તગતિ દર્શાવતા નથી ?

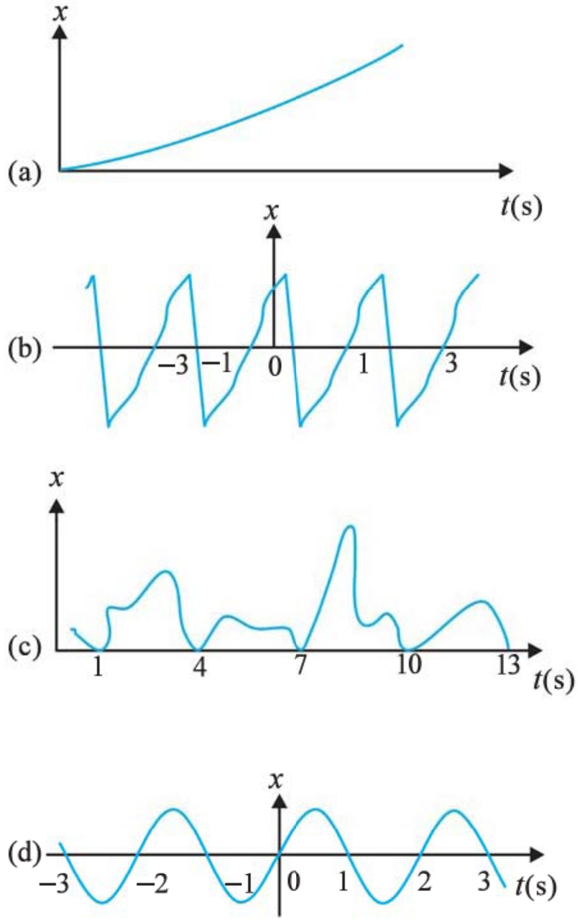
(a) પૃથ્વીની ધરીને અનુલક્ષીને તેનું ભ્રમણ

(b) U-ટ્યૂબમાં દોલિત પારાના સ્તંભની ગતિ

(c) એક બૉલબૅરિંગને એક લીસી વક્ર વાટકીની અંદર સૌથી નિમ્નતમ બિંદુથી થોડાક ઉપરના બિંદુ પરથી છોડી દેવામાં આવે ત્યારની ગતિ

(d) તેની સંતુલન સ્થિતિને અનુલક્ષીને બહુપરમાણ્વિક અણુના સામાન્ય કંપનો

14.3 આકૃતિ 14.23 એ કોઈ કણની રેખીય ગતિ માટે x-t ના ચાર આલેખોને દર્શાવે છે. કયા આલેખો આવર્તગતિ દર્શાવે છે ? ગતિનો આવર્તકાળ (આવર્તગતિના કિસ્સામાં) શું છે ?



આકૃતિ 14.23

14.4 નીચેના સમયનાં વિધેયોમાંથી કયા (a) સરળ આવર્તગતિ (b) આવર્ત પરંતુ સરળ આવર્તગતિ ન હોય અને (c) બિનઆવર્તગતિ દર્શાવે છે ? આવર્તગતિના દરેક કિસ્સામાં આવર્તકાળ આપો. (કોઈ ધન અચળાંક ω માટે) :

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos (\pi/4 - 2\omega t)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(e) $\exp (-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 એક કણ 10 cm દૂર એવાં બે બિંદુઓ, A અને Bની વચ્ચે રેખીય સરળ આવર્તગતિ કરે છે. A થી Bની દિશાને ધન લો અને વેગ, પ્રવેગ અને બળની સંજ્ઞા આપો. જ્યારે તે કણ

(a) A છેડા પર હોય

(b) B છેડા પર હોય

(c) ABના મધ્યબિંદુ પર A તરફ જતી દિશામાં

(d) B થી 2 cm દૂર Aની તરફ જતાં

(e) A થી 3 cm દૂર B તરફ જતાં અને

(f) B થી 4 cm દૂર A તરફ જતાં

14.6 કણના પ્રવેગ a અને સ્થાનાંતર x વચ્ચેના નીચેના સંબંધોમાંથી કયા સરળ આવર્તગતિ ધરાવે છે ?

(a) $a = 0.7x$

(b) $a = -200x^2$

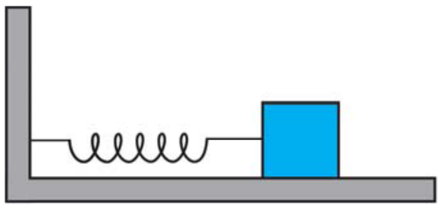
(c) $a = -10x$

(d) $a = 100x^3$

14.7 સરળ આવર્તગતિ કરતા કણની ગતિને સ્થાનાંતર વિધેય
$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$ દ્વારા વર્ણવવામાં આવે છે.
જો કણનું પ્રારંભિક ($t = 0$) સ્થાન 1 cm હોય અને તેનો પ્રારંભિક વેગ ω cm/s હોય, તો તેનો કંપવિસ્તાર અને પ્રારંભિક કળા શોધો. કણની કોણીય આવૃત્તિ એ π s^{-1} છે. જો cosine વિધેયના સ્થાને સ.આ.ગ.ને વર્ણવવા માટે આપણે sine વિધેય $x = B \sin (\omega t + \alpha)$ પસંદ કરીએ, તો ઉપર્યુક્ત પ્રારંભિક શરતો સાથે કણનો કંપવિસ્તાર અને પ્રારંભિક કળા શું થશે ?

14.8 સ્પ્રિંગ બૅલેન્સમાં જે સ્કેલ છે તે 0 થી 50 kg સુધીનો છે. સ્કેલની લંબાઈ 20 cm છે. આ કાંટા પર લટકાવવામાં આવેલ એક પદાર્થને સ્થાનાંતરિત કરીને મુક્ત કરવામાં આવે છે, તો તે 0.6 sના આવર્તકાળ સાથે દોલિત થાય છે. આ પદાર્થનું વજન કેટલું હશે ?

14.9 આકૃતિ 14.24માં બતાવ્યા પ્રમાણે 1200 N m^{-1}નો સ્પ્રિંગ-અચળાંક ધરાવતી એક સ્પ્રિંગને એક સમક્ષિતિજ ટેબલ પર ગોઠવેલ કરેલ છે. આ સ્પ્રિંગના મુક્ત છેડા પર 3 kg જેટલું દ્રવ્યમાન જોડેલ છે. આ દ્રવ્યમાનને એક બાજુ 2.0 cmના અંતર સુધી ખેંચીને મુક્ત કરવામાં આવે છે.



આકૃતિ **14.24**

(i) દોલનની આવૃત્તિ (ii) દ્રવ્યમાનનો મહત્તમ પ્રવેગ અને (iii) દ્રવ્યમાનની મહત્તમ ઝડપ શોધો.

14.10 સ્વાધ્યાય 14.9માં, ચાલો આપણે જ્યારે સ્પ્રિંગ ખેંચાયેલી ના હોય ત્યારની દ્રવ્યમાનની સ્થિતિને $x = 0$ લઈએ અને ડાબાથી જમણી તરફની દિશાને X-અક્ષની ધન દિશા તરીકે લઈએ. દોલન કરતાં આ દ્રવ્યમાન આપણે જ્યારે સ્ટૉપવૉચ શરૂ કરીએ ($t = 0$) તે ક્ષણે આ દ્રવ્યમાન

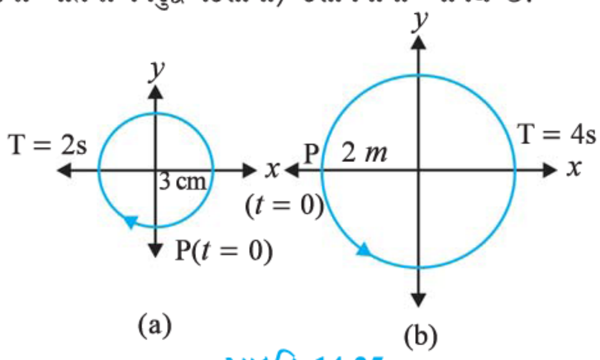
(a) મધ્યમાન સ્થાને

(b) મહત્તમ ખેંચાયેલા સ્થિતિ પર, અને

(c) મહત્તમ સંકોચિત સ્થિતિ પર હોય તે દરેક કિસ્સા માટે xને tના વિધેય તરીકે દર્શાવો.

સ.આ.ગ. માટેનાં આ વિધેયો આવૃત્તિમાં, કંપવિસ્તારમાં અથવા પ્રારંભિક કાળમાં બીજા કરતાં કેવી રીતે અલગ પડે છે ?

14.11 આકૃતિઓ 14.25 બે વર્તુળમય ગતિઓ દર્શાવે છે. પ્રત્યેક આકૃતિમાં વર્તુળની ત્રિજ્યા, પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ, પ્રારંભિક સ્થિતિ અને પરિભ્રમણ દિશા (એટલે કે ઘડિયાળના કાટાંની ગતિની દિશામાં કે ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરુદ્ધ દિશામાં) દર્શાવવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ **14.25**

દરેક કિસ્સામાં, પરિભ્રમણ કરતાં કણ Pના ત્રિજ્યા સદિશના x-પ્રક્ષેપને અનુરૂપ સરળ આવર્તગતિ મેળવો.

14.12 નીચેની પ્રત્યેક સરળ આવર્તગતિ માટે અનુરૂપ સંદર્ભ વર્તુળ દોરો. કણનું પ્રારંભિક ($t = 0$) સ્થાન, વર્તુળની ત્રિજ્યા અને ભ્રમણગતિ કરતાં કણની કોણીય ઝડપ દર્શાવો. સરળતા માટે ભ્રમણની દિશાને દરેક કિસ્સામાં ઘડિયાળના કાંટાની ગતિની વિરૂદ્ધની લઈ શકાય છે. (x cmમાં છે અને t એ sમાં છે.)

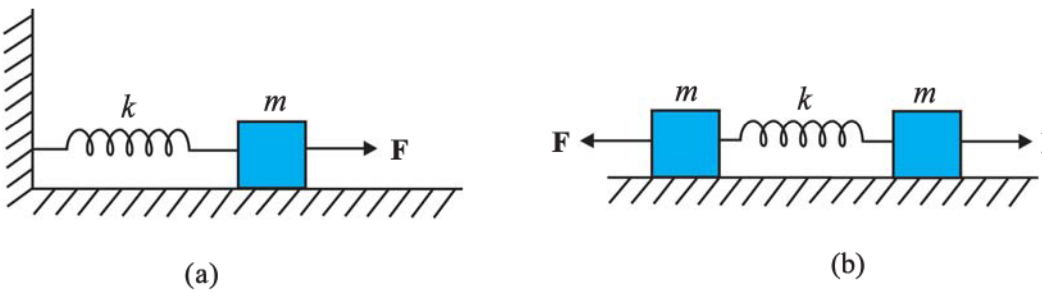
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 આકૃતિ 14.26(a) બતાવે છે કે k બળ-અચળાંકવાળી એક સ્પ્રિંગના એક છેડાને દૃઢ રીતે જકડેલ છે અને તેના મુક્ત છેડા સાથે m દ્રવ્યમાન જોડેલ છે. મુક્ત છેડા પર લગાડવામાં આવતું બળ **F** એ સ્પ્રિંગને ખેંચે છે. આકૃતિ 14.30 (b)માં આ જ સ્પ્રિંગ બંને છેડાથી મુક્ત છે અને એક દ્રવ્યમાન m બંને છેડા પર જોડેલ છે. આકૃતિ 14.26 (b)માંની સ્પ્રિંગના દરેક છેડાને એક સમાન બળ **F** દ્વારા ખેંચવામાં આવેલ છે.



આકૃતિ **14.26**

(a) આ બે કિસ્સાઓમાં સ્પ્રિંગનું મહત્તમ વિસ્તરણ કેટલું છે ?

(b) જો આકૃતિ (a)માંનું દ્રવ્યમાન અને આકૃતિ (b)નાં બે દ્રવ્યમાનોને જો મુક્ત કરવામાં આવે તો દરેક કિસ્સામાં દોલનોનો આવર્તકાળ કેટલો થશે ?

14.14 એક ઍન્જિનના સિલિન્ડર હેડમાં પિસ્ટન 1.0 mનો સ્ટ્રોક (કંપવિસ્તાર કરતાં બમણી) ધરાવે છે. જો પિસ્ટન 200 rad/mની કોણીય આવૃત્તિ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે તો તેની મહત્તમ ઝડપ કેટલી છે ?

14.15 ચંદ્રની સપાટી પર ગુરુત્વાકર્ષણને કારણે પ્રવેગ 1.7 m s^{-2} છે. એક સાદા લોલકનો પૃથ્વીની સપાટી પરનો આવર્તકાળ 3.5 s હોય તો ચંદ્રની સપાટી પર આવર્તકાળ કેટલો હશે ? (પૃથ્વીની સપાટી પર $g = 9.8$ m s^{-2} છે.)

14.16 નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) SHMમાં કણનો આવર્તકાળ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

એ બળ અચળાંક k અને કણનાં દ્રવ્યમાન m પર આધાર રાખે છે.

એક સાદું લોલક લગભગ સ.આ.ગ.માં હોય છે. તેમ છતાં શા માટે લોલકનો આવર્તકાળ એ લોલકનાં દ્રવ્યમાનથી સ્વતંત્ર છે ?

(b) નાના કોણનાં દોલનો માટે સાદા લોલકની ગતિ લગભગ સરળ આવર્ત છે. કંપનના મોટા ખૂણા માટે વધુ સંલગ્ન વિશ્લેષણ બતાવે છે કે T એ $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ થી મોટો છે. આ પરિણામને સમજવા માટે કોઈ ગુણાત્મક દલીલ વિચારો.

(c) હાથ પર કાંડા ઘડિયાળ પહેરેલ માણસ એક ટાવરની ટોચ પરથી નીચે પડે છે. શું આ ઘડિયાળ મુક્ત પતન દરમિયાન સાચો સમય બતાવશે ?

(d) ગુરુત્વાકર્ષણ હેઠળ મુક્ત પતન કરતાં કૅબિનમાં જડિત કરેલ સાદા લોલકના દોલનની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

14.17 l લંબાઈનાં અને M દ્રવ્યમાનનો બૉબ ધરાવતાં એક સાદા લોલકને કારમાં લટકાવવામાં આવે છે. આ કાર નિયમિત ગતિ સાથે R ત્રિજ્યાના વર્તુળાકાર પથ પર ગતિ કરી રહી છે. જો લોલક તેના સંતુલન સ્થાનને અનુલક્ષીને ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાં નાનાં દોલનો કરે, તો તેનો આવર્તકાળ શું હશે ?

14.18 A પાયાનું ક્ષેત્રફળ અને h ઊંચાઈનો કૉર્કનો એક નળાકાર ટુકડો ρ_l ઘનતા ધરાવતાં પ્રવાહીમાં તરે છે. આ કૉર્કને સહેજ ડુબાડીને પછી મુક્ત કરવામાં આવે છે. બતાવો કે આ કૉર્ક ઉપર-નીચે સરળ આવર્તદોલનો કરશે જેનો આવર્તકાળ હશે,

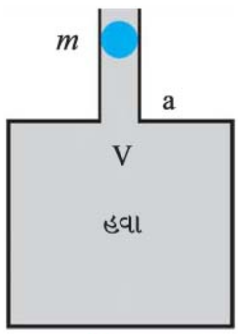
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_1 g}}.$$

જ્યાં ρ એ કૉર્કની ઘનતા છે. (પ્રવાહીની સ્નિગ્ધતાને કારણે થતાં અવમંદનો અવગણો.)

14.19 પારો ધરાવતી એક U-ટ્યૂબનો એક છેડો એક શોષક (સક્શન) પંપ અને બીજો છેડો વાતાવરણમાં છે. બે કૉલમ વચ્ચે નાનો દબાણ તફાવત જાળવવામાં આવે છે. બતાવો કે, જ્યારે સક્શન પંપ દૂર કરવામાં આવે છે, તો U-ટ્યૂબમાં પારાનો સ્તંભ સરળ આવર્તગતિ કરે છે.

વધારાના સ્વાધ્યાય

14.20 V કદની એક ચેમ્બરની ગ્રીવાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ a છે જેમાં m દ્રવ્યમાનનો એક બૉલ ફિટ (ચુસ્ત) થઈ જાય છે અને કોઈ પણ ઘર્ષણ વિના ઉપર-નીચે ગતિ કરી શકે છે. (આકૃતિ 14.33) એમ બતાવો કે બૉલને થોડોક નીચે દબાવીને મુક્ત કરતાં તે સ.આ.ગ. કરે છે. હવાના દબાણ-કદ બદલાવને સમતાપી (Isothermal) ગણીને દોલનોના આવર્તકાળ માટેનું સૂત્ર મેળવો. (જુઓ આકૃતિ 14.27).



આકૃતિ **14.27**

14.21 3000 kgના વાહનમાં તમે સવારી કરી રહ્યાં છો. એમ ધારીને કે તમે તેની સસ્પેન્શન સિસ્ટમનાં દોલનોની લાક્ષણિકતાની તપાસ કરી રહ્યાં છો. આ સસ્પેન્શન 15 cm દબાય છે જ્યારે સમગ્ર વાહન તેના પર મૂકવામાં આવે છે. ઉપરાંત એક સંપૂર્ણ દોલન દરમિયાન કંપવિસ્તારમાં 50 % જેટલો ઘટાડો થાય છે. (a) સ્પ્રિંગ-અચળાંક k અને (b) દરેક પૈડું 750 kgને આધાર આપે છે. એમ ધારીને સ્પ્રિંગ અને એક પૈડાંના આંચકા-શોષક તંત્ર માટે અવમંદન અચળાંક b શોધો. (g = 10 m s^{-2} લો.)

14.22 બતાવો કે રેખીય સ.આ.ગ.માં કણના દોલનની કોઈ પણ અવધિ માટે સરેરાશ ગતિઊર્જા એ તે જ અવધિ માટેની સરેરાશ સ્થિતિઊર્જાને સમાન હોય છે.

14.23 10 kg દ્રવ્યમાનની એક વર્તુળાકાર તક્તી તેના કેન્દ્રથી જોડેલ તાર દ્વારા લટકાવવામાં આવેલ છે. આ તક્તીને ઘુમાવીને તારમાં વળ ચડાવી તેને મુક્ત કરવામાં આવે છે. આ વળ (ટૉર્શનલ) દોલનોનો આવર્તકાળ 1.5 s છે. આ તક્તીની ત્રિજ્યા 15 cm છે. આ તારનો ટૉર્શનલ સ્પ્રિંગ-અચળાંક નક્કી કરો. (α એ ટૉર્શનલ સ્પ્રિંગ-અચળાંક છે જે સંબંધ $J = -\alpha\theta$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. જ્યાં J પુનઃસ્થાપક બળ-યુગ્મ અને θ એ વળ-કોણ છે.)

14.24 એક પદાર્થ 5 cmના કંપવિસ્તાર અને 0.2 sના આવર્તકાળ સાથે સરળ આવર્તગતિ કરે છે. જ્યારે સ્થાનાંતર (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm હોય, ત્યારે પદાર્થના પ્રવેગ અને વેગ શોધો.

14.25 કોઈ એક સ્પ્રિંગ સાથે જોડાયેલ દ્રવ્યમાન સમક્ષિતિજ સમતલમાં કોણીય વેગ ω સાથે ઘર્ષણ કે અવમંદનરહિત દોલનો માટે મુક્ત છે. તેને $t = 0$ એ, x_0 અંતર સુધી ખેંચવામાં આવે છે અને કેન્દ્ર તરફ υ_0 વેગથી ધક્કો મારવામાં આવે છે. પ્રાચલો ω, x_0 અને υ_0નાં પદમાં પરિણામી દોલનોના કંપવિસ્તાર નક્કી કરો. (**સૂચન :** સમીકરણ $x = a \cos(\omega t + \theta)$ સાથે શરૂઆત કરો અને નોંધ કરો કે, પ્રારંભિક વેગ ઋણ છે.)

પ્રકરણ 15

તરંગો (WAVES)

15.1 પ્રસ્તાવના
15.2 લંબગત અને સંગત તરંગો
15.3 પ્રગામી તરંગમાં સ્થાનાંતર સંબંધ
15.4 પ્રગામી તરંગની ઝડપ
15.5 તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત
15.6 તરંગોનું પરાવર્તન
15.7 સ્પંદ
15.8 ડૉપ્લર અસર
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાના સ્વાધ્યાય

15.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

અગાઉના પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર દોલનો કરતા પદાર્થોની ગતિનો વિચાર કર્યો. તંત્ર કે જે આવા પદાર્થોનો સમૂહ છે તેમાં શું થાય છે ? કોઈ દ્રવ્ય માધ્યમ આનું ઉદાહરણ પૂરું પાડે છે. અત્રે, સ્થિતિસ્થાપક બળો આવાં ઘટકોને એકબીજા સાથે જોડી (બાંધી) રાખે છે તેથી એકની ગતિ બીજાને અસર કરે છે. જો તમે એક લખોટીને શાંત પાણીવાળા તળાવમાં ધીમેથી નાખો તો પાણીની સપાટી વિક્ષુબ્ધ થાય છે. વિક્ષોભ એક જ સ્થાને મર્યાદિત રહેતો નથી, પરંતુ બહાર તરફ વર્તુળાકાર સાથે પ્રસરણ પામે છે. જો તમે પાણીમાં સતત લખોટીઓ નાખતા રહો તો, જે સ્થાને પાણીમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન થયો છે તે સ્થાનેથી વર્તુળો ઝડપથી બહાર તરફ ગતિ કરતાં દેખાશે. આનાથી એવું લાગે છે કે વિક્ષોભના બિંદુથી બહાર તરફ પાણી ગતિ કરી રહ્યું છે. જો તમે આ વિક્ષુબ્ધ સપાટી પર થોડા બૂચના ટુકડાઓ મૂકો તો એવું દેખાય છે કે બૂચના ટુકડાઓ ઊંચે-નીચે ગતિ કરે છે પરંતુ વિક્ષોભના કેન્દ્રથી દૂર જતા નથી. આ દર્શાવે છે કે વર્તુળો સાથે પાણીનો જથ્થો બહાર તરફ વહન પામતો નથી પરંતુ ગતિમાન વિક્ષોભ ઉત્પન્ન થયેલ છે તેમ લાગે છે. તેવી જ રીતે, જ્યારે આપણે બોલીએ છીએ ત્યારે ધ્વનિ આપણાથી બહાર અને દૂર તરફ ગતિ કરે છે; પરંતુ માધ્યમના એક ભાગથી બીજા ભાગ તરફ હવા જતી નથી. હવામાં ઉત્પન્ન કરેલા વિક્ષોભો બહુ સ્પષ્ટ જણાતા નથી અને આપણા ફક્ત કાન કે માઇક્રોફોન તેમની પરખ કરી શકે છે. આવી ભાત (Pattern) કે જે સમગ્રપણે દ્રવ્યના વાસ્તવિક સ્થાન-ફેર કે વહન વિના ગતિ કરે છે તેમને **તરંગો** કહે છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આવા તરંગોનો અભ્યાસ કરીશું.

તરંગો ઊર્જાનું વહન કરે છે અને વિક્ષોભની ભાત (વિક્ષોભનો પ્રકાર) જે માહિતી ધરાવે છે તે એકથી બીજા બિંદુએ પ્રસરણ પામે છે. આપણી માહિતી આપ-લેની સમગ્ર પદ્ધતિ મુખ્યત્વે તરંગો દ્વારા સંકેતોના પ્રસરણ પર આધારિત છે. બોલવું એટલે હવામાં ધ્વનિતરંગો ઉત્પન્ન કરવા અને સાંભળવું એટલે તે તરંગોની પરખ કરવી (Detection). ઘણી વાર, માહિતીની આપ-લેની પદ્ધતિમાં જુદા જુદા પ્રકારના તરંગો સંકળાયેલા હોય છે. દાખલા તરીકે, ધ્વનિતરંગોને પ્રથમ વિદ્યુતપ્રવાહ સંકેત (Signal)માં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે, જે બદલામાં એક વિદ્યુત-ચુંબકીય તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે અને તેને એક ઑપ્ટિકલ કેબલ અથવા

સેટેલાઇટ મારફતે પ્રસારિત કરાય છે. મૂળ સંકેતની પરખમાં આ જ બધાં પદ વિરુદ્ધ ક્રમમાં થતાં હોય છે.

બધા જ તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર હોતી નથી. આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રકાશના તરંગો શૂન્યાવકાશમાંથી પસાર થઈ શકે છે. આપણાથી સેંકડો પ્રકાશવર્ષ (Light Years) દૂર રહેલા તારાઓ દ્વારા ઉત્સર્જિત પ્રકાશ, તારાઓ વચ્ચેના અવકાશ કે જે વ્યાવહારિક રીતે શૂન્યાવકાશ જ છે, તેમાંથી પસાર થઈને આપણને પહોંચે છે.

દોરી પરના તરંગો, પાણી પરના તરંગો, ધ્વનિતરંગો, સેસ્મિક (ભૂકંપના) તરંગો વગેરે જેવા તરંગોનો ખૂબ જાણીતો પ્રકાર યાંત્રિકતરંગો તરીકે ઓળખાય છે. આ તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર છે. તેઓ શૂન્યાવકાશમાં થઈને પ્રસરી શકતા નથી. તેઓમાં ઘટક કણોના દોલનો થતાં હોય છે અને તેઓ માધ્યમના સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો પર આધારિત છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો કે જેમના વિશે તમે ધોરણ XIIમાં ભણશો તે એક જુદા પ્રકારના તરંગો છે. વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમ હોવું જરૂરી નથી. તેઓ તો શૂન્યાવકાશમાં થઈને પણ ગતિ કરી શકે છે. પ્રકાશ, રેડિયોતરંગો, X કિરણો એ બધા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો છે. શૂન્યાવકાશમાં બધા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોની ઝડપ એકસરખી c છે. જેનું મૂલ્ય

$$c = 299,\ 792,\ 458\ \text{m s}^{-1} \text{ છે.} \qquad (15.1)$$

એક ત્રીજા પ્રકારના તરંગોને દ્રવ્ય-તરંગો (Matter Waves) કહે છે. તેઓ દ્રવ્યનાં ઘટકો : ઇલેક્ટ્રૉન્સ, પ્રોટોન્સ, ન્યૂટ્રૉન્સ, પરમાણુઓ અને અણુઓ સાથે જોડાયેલ છે. તેઓ, કુદરતના ક્વૉન્ટમ મિકેનિકલ વર્ણનમાં ઉદ્ભવે છે, જે તમે આગળના અભ્યાસોમાં શીખશો. યાંત્રિક અથવા વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો કરતાં વૈચારિક રીતે તેઓ વધુ અમૂર્ત (Abstract) હોવા છતાં, આધુનિક ટેક્નોલૉજીમાં મૂળભૂત એવી રચનાઓમાં તેઓના ઉપયોગ જણાયા છે : ઇલેક્ટ્રૉન સાથે સંકળાયેલ દ્રવ્ય-તરંગોનો ઉપયોગ ઇલેક્ટ્રૉન માઇક્રોસ્કૉપમાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે યાંત્રિકતરંગો કે જેઓને પ્રસરવા માટે દ્રવ્ય માધ્યમની જરૂર છે, તેમનો અભ્યાસ કરીશું. કલા અને સાહિત્ય પર તરંગોની સૌંદર્યલક્ષી/કલાત્મક અસર ઘણા પ્રાચીન સમયથી જોવા મળી છે, છતાં તરંગગતિનું સૌપ્રથમ વૈજ્ઞાનિક વિશ્લેષણ સત્તરમી સદી જેટલું જૂનું છે. તરંગગતિના ભૌતિકવિજ્ઞાન સાથે સંકળાયેલા કેટલાક પ્રખ્યાત વૈજ્ઞાનિકોમાં ક્રિશ્ચિયન હાઇગેન્સ (Christian Huygens, 1629-1695), રૉબર્ટ હૂક અને આઇઝેક ન્યૂટન છે. તરંગોના ભૌતિકવિજ્ઞાનની સમજણ, સ્પ્રિંગ સાથે બાંધેલ દળોનાં દોલનોના ભૌતિકવિજ્ઞાન અને સાદા લોલકના ભૌતિકવિજ્ઞાનને અનુસરે છે. સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમોમાં તરંગો પ્રસંવાદી (Harmonic) દોલનો સાથે ગાઢ રીતે સંબંધિત છે. (ખેંચાયેલી દોરી, ગૂંચળાવાળી સ્પ્રિંગ, હવા વગેરે સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમનાં ઉદાહરણ છે). આપણે આવો સંબંધ સરળ ઉદાહરણો દ્વારા દર્શાવીશું.

આકૃતિ 15.1માં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજા સાથે જોડાયેલી સ્પ્રિંગોના સમૂહનો વિચાર કરો. જો એક છેડે સ્પ્રિંગને એકાએક ખેંચીને છોડી દેવામાં આવે તો વિક્ષોભ બીજા છેડા સુધી ગતિ કરે છે. આમાં શું થયું હશે ?

આકૃતિ **15.1** *એકબીજા સાથે જોડાયેલી સ્પ્રિંગોનો સમૂહ. A છેડો એકાએક ખેંચવામાં આવે છે તેથી ઉદ્ભવતો વિક્ષોભ પછી બીજા છેડા સુધી ગતિ કરે છે.*

પ્રથમ સ્પ્રિંગ તેની સંતુલન લંબાઈમાંથી વિક્ષોભિત/ચલાયમાન થઈ છે. બીજી સ્પ્રિંગ પ્રથમ સાથે જોડાયેલી હોવાથી તે પણ ખેંચાય છે કે સંકોચાય છે અને આ રીતે પ્રક્રિયા આગળ વધે છે, વિક્ષોભ એક છેડેથી બીજા છેડે જાય છે, પરંતુ દરેક સ્પ્રિંગ તેના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ નાનાં દોલનો કરે છે. આ પરિસ્થિતિના વ્યાવહારિક ઉદાહરણ તરીકે એક રેલવે સ્ટેશન પર સ્થિર ઊભેલી ટ્રેનનો વિચાર કરો. ટ્રેનના જુદા જુદા ડબાઓ એકબીજા સાથે સ્પ્રિંગ કપલિંગ દ્વારા જોડાયેલા છે. જ્યારે એક છેડે ઍન્જિન જોડાય છે ત્યારે તે તેની બાજુના ડબાને ધક્કો લગાડે છે આ ધક્કો એક ડબાથી બીજા ડબા તરફ પ્રસરે છે, પણ આખી ટ્રેન સમગ્ર રીતે સ્થાનાંતર કરતી નથી.

હવે આપણે હવામાંથી ધ્વનિતરંગોનું પ્રસરણ વિચારીએ. હવામાં જેમ જેમ તરંગ પસાર થતું જાય તેમ તેમ તે હવાના નાના વિભાગને સંકોચિત કરે છે કે વિસ્તારિત કરે છે. આનાથી તે વિભાગની ઘનતામાં ફેરફાર દા.ત., $\delta\rho$ થાય છે. આ ફેરફારથી તે વિભાગમાં દબાણમાં ફેરફાર δP થાય છે. દબાણ એ એકમ ક્ષેત્રફળ પરનું બળ છે તેથી સ્પ્રિંગની જેમ જ, વિક્ષોભને સમપ્રમાણમાં હોય તેવું એક પુનઃસ્થાપક બળ ઉદ્ભવે છે. આ કિસ્સામાં સ્પ્રિંગના વિસ્તરણ કે સંકોચન સાથે સામ્ય ધરાવતી રાશિ એ ઘનતામાં ફેરફાર છે. જો વિભાગનું સંકોચન થયું હોય, તો તે વિભાગમાંના અણુઓ ઠાંસીને ભરાય છે (Packed) અને તેઓ બાજુના વિભાગ તરફ બહાર ધકેલાવાનું વલણ ધરાવે છે. આમ થાય ત્યારે બાજુના વિભાગમાં ઘનતા વધે છે અથવા બાજુના વિભાગમાં સંઘનન (Compression) ઉત્પન્ન થાય છે. પરિણામે પ્રથમ વિભાગમાંની હવા વિઘનન (Rarefaction) અનુભવે છે. જો કોઈ વિભાગ પ્રમાણમાં વિઘનન ધરાવતો હશે તો આસપાસની હવા તેમાં ધસી જશે અને વિઘનનને બાજુના વિભાગમાં ખસેડી દેશે. આમ સંઘનન અને વિઘનન એક વિભાગથી બીજા વિભાગ તરફ ગતિ કરે છે અને વિક્ષોભનું હવામાં પ્રસરણ શક્ય બનાવે છે.

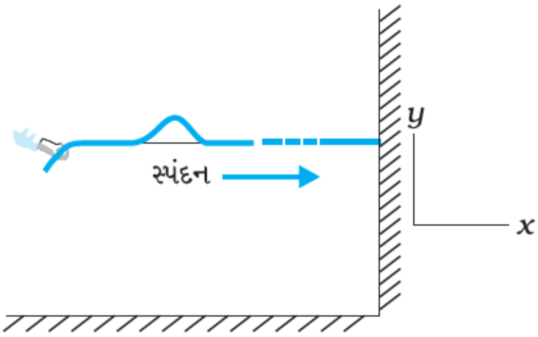
ઘન પદાર્થોમાં આવા જ તર્ક લગાડી શકાય. સ્ફટિકમય ઘન પદાર્થમાં પરમાણુઓ કે પરમાણુના સમૂહો આવર્ત લેટિસમાં ગોઠવાયેલા હોય છે. આમાં, દરેક પરમાણુ કે પરમાણુ-સમૂહ, આસપાસના પરમાણુઓ દ્વારા લાગતાં બળોને લીધે, સંતુલનમાં હોય છે. બીજા પરમાણુઓને સ્થિર રાખીને એક પરમાણુને સ્થાનાંતરિત કરવામાં આવે ત્યારે, સ્પ્રિંગની જેમ જ પુનઃસ્થાપક બળો ઉદ્ભવે છે. આથી આપણે લેટિસમાંના પરમાણુઓને અંત્યબિંદુઓ તરીકે અને તેમની જોડ વચ્ચે સ્પ્રિંગ હોય તેમ ગણી શકીએ છીએ.

આ પ્રકરણના હવે પછીના વિભાગોમાં આપણે તરંગોના કેટલાક લાક્ષણિક ગુણધર્મોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 લંબગત અને સંગત તરંગો (TRANSVERSE AND LONGITUDINAL WAVES)

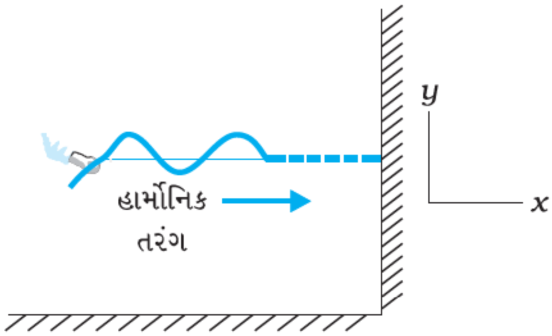
આપણે જોયું કે યાંત્રિક તરંગોની ગતિ માધ્યમના ઘટક કણોનાં દોલનો સાથે સંકળાયેલ છે. જો માધ્યમના ઘટક કણો, તરંગની પ્રસરણ દિશાને લંબરૂપે દોલનો કરતા હોય, તો આપણે તે તરંગને લંબગત (Transverse) તરંગ કહીએ છીએ. જો તેઓ તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર દોલનો કરે તો આપણે તે તરંગને સંગત (Longitudinal) તરંગ કહીએ છીએ.

ઉપર-નીચે એક આંચકો (Jerk) આપવાથી પરિણમેલું એક સ્પંદન (વિક્ષોભ) દોરી પર પ્રસરતું આકૃતિ 15.2માં દર્શાવ્યું છે. જો સ્પંદનના પરિમાણની સરખામણીએ દોરી ખૂબ લાંબી



આકૃતિ 15.2 જ્યારે સ્પંદન તણાવવાળી દોરીની લંબાઈને સમાંતર (X-દિશામાં) ગતિ કરે છે, ત્યારે દોરીના ખંડ ઉપર નીચે (Y-દિશામાં) દોલનો કરે છે. આ લંબગત તરંગનું ઉદાહરણ છે.

હોય તો બીજા છેડે પહોંચતાં અગાઉ સ્પંદન મંદ પડી જશે અને તે છેડા પરથી થતું પરાવર્તન અવગણી શકાય છે. આકૃતિ 15.3 આવી પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે, પરંતુ આ વખતે બાહ્ય પરિબળ દોરીના એક છેડે સતત આવર્ત Sinusoidal (સાઈન્યુસોઈડલ, Sine પ્રકારનું, જયાવર્તી) આંચકા ઉપર-નીચે આપે છે. બંને કિસ્સામાં દોરીના ખંડ જ્યારે સ્પંદન કે તરંગ, તેમનામાંથી પસાર થાય ત્યારે તેમના સરેરાશ સંતુલન સ્થાનની આસપાસ દોલનો કરે છે. આ દોલનો, દોરી પર તરંગ-ગતિની દિશાને લંબરૂપે છે. આથી



આકૃતિ 15.3 તણાવવાળી દોરી પર ગતિ કરતું હાર્મોનિક (પ્રસંવાદી Sinusoidal) તરંગ, લંબગત તરંગનું ઉદાહરણ છે. તરંગના વિસ્તારમાંનો દોરીનો ખંડ તેના સંતુલન સ્થાનની આસપાસ તરંગ-પ્રસરણની દિશાને લંબરૂપે દોલનો કરે છે.

આપણે તરંગને બે રીતે જોઈ શકીએ. આપણે સમયની કોઈ ક્ષણને નિશ્ચિત (Fix) કરીને તરંગને અવકાશમાં ચિત્રિત કરીએ. આના પરથી આપણને આપેલી ક્ષણે સમગ્રપણે અવકાશમાં તરંગનો આકાર મળે છે. બીજી રીતે, એક સ્થાન (Location) નિશ્ચિત કરીએ (એટલે કે દોરીના એક ખાસ વિભાગ પર આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ) અને સમય સાથે તેની દોલન ગતિનું નિરીક્ષણ કરીએ.

આકૃતિ 15.4 ધ્વનિતરંગના પ્રસરણના ખૂબ જાણીતા ઉદાહરણમાં સંગતતરંગની પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે. હવાભરેલી લાંબી પાઈપના એક છેડે પિસ્ટન રહેલો છે. એકાએક એક ધક્કો આગળ લગાવી પાછો ખેંચતાં, એક સંઘનન (વધારે ઘનતા) અને વિઘનન (ઓછી ઘનતા)નું સ્પંદન (Pulse) માધ્યમ (Air)માં ઉત્પન્ન થાય છે. જો પિસ્ટનને ધકેલવાનું-ખેંચવાનું સતત અને આવર્ત Sinusoidal હોય તો, Sinusoidal

આકૃતિ 15.4 હવાભરેલી નળીમાં પિસ્ટનને ઉપર-નીચે ધકેલી ઉત્પન્ન કરેલું સંગતતરંગ (ધ્વનિ). હવાનો એક કદ-ખંડ તરંગ-પ્રસરણની દિશાને સમાંતર દોલનો કરે છે.

તરંગ ઉત્પન્ન થશે, જે પાઈપની લંબાઈને સમાંતર હવામાં પ્રસરણ પામશે. આ સ્પષ્ટ રીતે, સંગતતરંગનું ઉદાહરણ છે.

ઉપર વિચારેલા, લંબગત કે સંગતતરંગો, પ્રગામી તરંગો છે કારણ કે તેઓ માધ્યમના એક ભાગથી બીજા ભાગ સુધી પ્રસરે છે. અગાઉ આપણે નોંધ્યું તે મુજબ દ્રવ્ય માધ્યમ સમગ્રપણે ગતિ કરતું નથી. દાખલા તરીકે કોઈ ઝરણું સમગ્રપણે પાણીની ગતિ દર્શાવે છે. જ્યારે પાણીની સપાટી પરના તરંગમાં વિક્ષોભ જ ગતિ કરે છે, પણ સમગ્રપણે પાણી નહિ. તેવી જ રીતે પવન (સમગ્ર પણે હવાની ગતિ)ને ધ્વનિતરંગ કે જે વિક્ષોભ (દબાણ ઘનતામાં)ની હવામાંની (સમગ્રપણે હવાના માધ્યમની ગતિ સિવાયની) ગતિ છે તેની સાથે ગૂંચવવી ન જોઈએ.

લંબગત તરંગમાં કણની ગતિ તરંગની પ્રસરણ દિશાને લંબ હોય છે. તેથી તરંગ જેમ પ્રસરણ પામતો જાય તેમ માધ્યમનો દરેક વિભાગ આકાર વિકૃતિ અનુભવે છે. આથી લંબગત તરંગ ઘન પદાર્થો જેવા માધ્યમો કે જેઓ આકાર પ્રતિબળ ટકાવી(ખમી) શકે છે તેઓમાં જ પ્રસરી શકે છે, નહિ કે તરલમાં તરલ અને ઘન બંને માધ્યમો દાબીય વિકૃતિ અનુભવી શકે છે. તેથી સંગત તરંગો બધા સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમોમાં પ્રસરી શકે છે. ઉદાહરણ રૂપે સ્ટીલ જેવા માધ્યમમાં લંબગત અને સંગત બંને તરંગો પ્રસરી શકે છે. જ્યારે હવામાં માત્ર સંગત તરંગો જ પ્રસરી શકે છે. પાણીની સપાટી પરનાં તરંગો બે પ્રકારનાં છેઃ **કેશિકા**(વાળ જેવું બારિક, capillary) **તરંગો** અને **ગુરુત્વ તરંગો.** કેશિકા તરંગો ઠીક ઠીક ટૂંકી તરંગલંબાઈ - કેટલાક સેન્ટિમીટરથી વધુ નહિ - ના સપાટી - સ્પંદનો (ripples) હોય છે અને તેમને ઉત્પન્ન કરનારૂં પુનઃસ્થાપક બળ એ પાણીનું પૃષ્ઠતાણ છે. ગુરુત્વ તરંગોની તરંગલંબાઈ કેટલાક મીટરથી કેટલાક સેંકડો મીટરો સુધીના વિસ્તારમાં હોય છે. આ તરંગોને ઉત્પન્ન કરનારૂં પુનઃસ્થાપક બળ તે ગુરુત્વ ખેંચાણ (pull of gravity) છે, જે પાણીની સપાટીને તેના સૌથી નીચા સ્તર પર રાખવાનો પ્રયત્ન કરે છે. આ તરંગોમાં કણનાં દોલનો માત્ર સપાટી પર જ સીમિત નથી પરંતુ છેક તળિયા સુધી ઘટતા કંપવિસ્તાર સાથે વિસ્તરે છે. પાણીના તરંગોમાં કણની ગતિ સંકિર્ણ(ગૂંચવણ ભરી) ગતિ છે - તેઓ માત્ર ઉપર-નીચે જ ગતિ કરતા નથી પરંતુ આગળ-પાછળ પણ ગતિ કરે છે. સમુદ્રમાંના તરંગો સંગત અને લંબગત બંને તરંગોનું સંયોજન છે.

એવું જણાયુ છે કે સામાન્યતઃ લંબગત અને સંગત તરંગો એક જ માધ્યમમાં પણ જુદા જુદા વેગથી ગતિ કરે છે.

ઉદાહરણ 15.1 તરંગગતિનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે. દરેક કિસ્સામાં તરંગગતિ, લંબગત, સંગત કે બંનેનું સંયોજન છે તે જણાવો.

(a) લાંબી (સંગત) સ્પ્રિંગમાં સ્પ્રિંગનો એક છેડો બાજુમાં સ્થાનાંતરિત કરતાં ઉદ્ભવતી વળ (Kink)ની ગતિ

(b) પ્રવાહીભરેલા નળાકારમાં પિસ્ટનને આગળ-પાછળ ખસેડતાં ઉદ્ભવતા તરંગો

(c) પાણીમાં તરતી મોટરબૉટથી ઉદ્ભવતા તરંગો

(d) કંપન કરતા ક્વાર્ટ્ઝ સ્ફટિકથી હવામાં ઉદ્ભવતાં અલ્ટ્રાસોનિક (પરાશ્રાવ્ય) તરંગો

ઉકેલ

(a) લંબગત અને સંગત

(b) સંગત

(c) લંબગત અને સંગત

(d) સંગત

15.3 પ્રગામી તરંગમાં સ્થાનાંતર સંબંધ (DISPLACEMENT RELATION IN A PROGRESSIVE WAVE)

પ્રગામી તરંગના ગાણિતિક વર્ણન માટે આપણને સ્થાન x અને સમય t એ બંનેના વિધેયની જરૂર પડે છે. આવા વિધેય દ્વારા દરેક ક્ષણે તરંગનો તે ક્ષણે આકાર દર્શાવવો જોઈએ. વળી તેણે દરેક આપેલ સ્થાને માધ્યમના ઘટકની ગતિ દર્શાવવી જોઈએ. જો આપણે આકૃતિ 15.3માં દર્શાવ્યા મુજબના Sinusoidal (Sine આકારના) પ્રગામી તરંગને રજૂ કરવા માંગતા હોઈએ તો અનુરૂપ વિધેય પણ Sinusoidal (Sine પ્રકારનું) હોવું જોઈએ. સગવડ ખાતર, આપણે તરંગને લંબગત લઈશું જેથી માધ્યમનાં ઘટકોનાં સ્થાન x વડે દર્શાવાય તો, સંતુલન સ્થાનમાંથી સ્થાનાંતર y વડે દર્શાવી શકાય. આ રીતે પ્રગામી Sinusoidal (Sine આકારનું) તરંગ

$$y(x,t) = a\sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.2)$$

વડે રજૂ કરાય છે. Sine વિધેયના પક્ષ અથવા કોણાંક (Argument)માં રહેલા પદ ϕ ને સમતુલ્ય અર્થ એ છે કે, આપણે Sine અને Cosine વિધેયોના નીચેનાં રેખીય સંયોજનોનો વિચાર કરીએ છીએ :

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + B\cos(kx - \omega t) \qquad (15.3)$$

સમીકરણ (15.2) અને (15.3) પરથી

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ અને } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

સમીકરણ (15.2) Sinusoidal તરંગ કેમ દર્શાવે છે તે સમજવા, એક નિશ્ચિત ક્ષણ $t = t_0$ લો. આથી સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયનો કોણાંક (Argument) એ માત્ર

kx + અચળ છે. આમ કોઈ નિશ્ચિત ક્ષણે, xના વિધેય તરીકે તરંગનો આકાર Sine તરંગ છે. તે જ રીતે કોઈ નિશ્ચિત સ્થાન, દા.ત., $x = x_0$ લો. આમાં સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયનો કોણાંક (Argument), અચળ-ωt છે. આમ કોઈ નિશ્ચિત સ્થાને સ્થાનાંતર y, Sinusoidal રીતે સમય સાથે બદલાય છે. એટલે કે જુદાં-જુદાં સ્થાને માધ્યમનાં ઘટકો સાદી પ્રસંવાદી ગતિ/સરળ આવર્ત ગતિ કરે છે. અંતે, જેમ t વધે તેમ ધન દિશામાં x વધવું જોઈએ, જેથી $kx - \omega t + \phi$ અચળ રાખી શકાય. આમ સમીકરણ (15.2) x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતા Sinusoidal (પ્રસંવાદી, Harmonic) તરંગને રજૂ કરે છે. બીજી બાજુ,

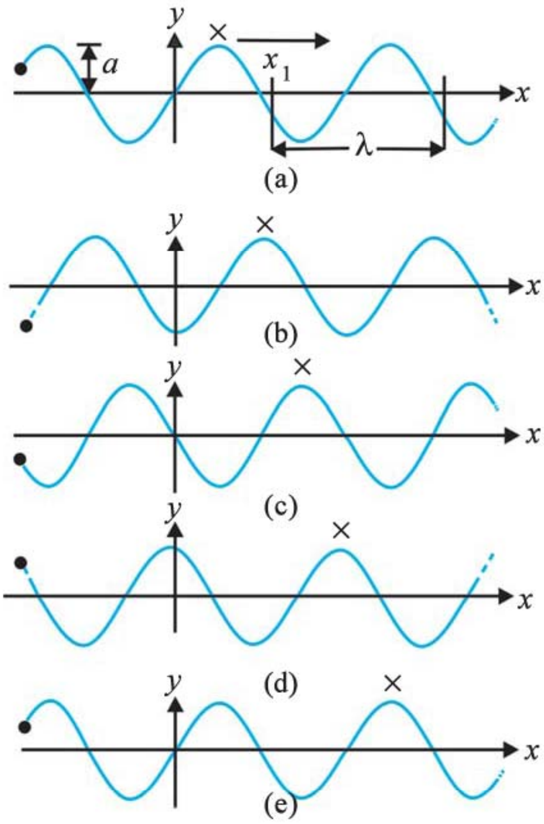
$$y(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \phi) \qquad (15.4)$$

વિધેય, x-અક્ષની ઋણ દિશામાં ગતિ કરતા તરંગને રજૂ કરે છે. આકૃતિ (15.5)માં સમીકરણ 15.2માં આવતી વિવિધ ભૌતિકરાશિઓનાં નામ આપેલ છે.

$y(x, t)$	= સ્થાન x અને સમય tના વિધેય તરીકે સ્થાનાંતર
a	= તરંગનો કંપ-વિસ્તાર
ω	= તરંગની કોણીય આવૃત્તિ
k	= કોણીય તરંગ-સંખ્યા
$kx - \omega t + \phi$	= x સ્થાને, t સમયે કળા
ϕ	= પ્રારંભિક કળા એટલે કે $x = 0$ આગળ $t = 0$ સમયે કળા

આકૃતિ 15.5 *સમીકરણ 15.2માં પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓના અર્થ*

એક સમાન સમયગાળાથી જુદા પડતા જુદા જુદા સમય માટેના સમીકરણ 15.2ના આલેખ આકૃતિ 15.6માં દર્શાવ્યા છે. તરંગમાં શૃંગ (Crest) એ મહત્તમ ધન સ્થાનાંતરનું બિંદુ અને ગર્ત (Trough) એ મહત્તમ ઋણ સ્થાનાંતરનું બિંદુ છે. તરંગ કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોવા માટે આપણે આપણું ધ્યાન એક શૃંગ પર કેન્દ્રિત કરીને તે સમય સાથે કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોઈએ. આકૃતિમાં આને શૃંગ પર દોરેલી ચોકડી (×) વડે દર્શાવેલ છે. તે જ રીતે આપણે નિશ્ચિત સ્થાને (દા. ત., x-અક્ષનું ઉદ્‌ગમ) માધ્યમના કોઈ ખાસ ઘટકની ગતિ જોઈ શકીએ. આ ઘાટા ટપકા (•) વડે દર્શાવેલ છે. આકૃતિ 15.6માંના આલેખો દર્શાવે છે કે સમય સાથે, ઉદ્‌ગમ આગળનું ઘાટું ટપકું (•) આવર્ત રીતે ગતિ કરે છે. એટલે કે તરંગ જેમ આગળ વધે તેમ ઉદ્‌ગમ આગળનો કણ તેના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલન કરે છે. આ બાબત બીજા કોઈ પણ સ્થાન માટે પણ સાચી છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ કે ઘાટા ટપકાએ (•) એક પૂર્ણ આંદોલન પૂર્ણ કર્યું હોય તે દરમિયાન શૃંગ પણ આગળ તરફ અમુક અંતર સુધી ગતિ કરી ગયું છે.



આકૃતિ 15.6 *જુદા જુદા સમયે x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતું હાર્મોનિક તરંગ*

આકૃતિ 15.6માંના આલેખોનો ઉપયોગ કરીને હવે આપણે સમીકરણ 15.2ની કેટલીક રાશિઓની વ્યાખ્યા આપીએ.

15.3.1 કંપવિસ્તાર અને કળા (Amplitude and Phase)

સમીકરણ (15.2)માં, Sine વિધેયનું મૂલ્ય 1 અને −1ની વચ્ચે બદલાતું હોવાથી; સ્થાનાંતર $y(x, t)$ એ a અને $-a$ની વચ્ચે બદલાય છે. આપણે aને ધન અચળાંક વ્યાપકતાના કોઈ નુકસાન વિના લઈ શકીએ છીએ. આ રીતે a માધ્યમના કોઈ ઘટકનું તેના સંતુલન સ્થાનથી મહત્તમ સ્થાનાંતર દર્શાવે છે. એ નોંધો કે સ્થાનાંતર y ધન કે ઋણ હોઈ શકે છે પણ a ધન છે. તેને તરંગનો **કંપવિસ્તાર** કહે છે.

સમીકરણ (15.2)માં Sine વિધેયના કોણાંક (Argument) તરીકે આવતી રાશિ ($kx - \omega t + \phi$) તરંગની કળા કહેવાય છે. આપેલા કંપવિસ્તાર a માટે, કળા, કોઈ પણ સ્થાને અને કોઈ પણ સમયે તરંગનું સ્થાનાંતર નક્કી કરે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે, $x = 0$ અને $t = 0$ માટે કળા ϕ છે. આથી ϕને મૂળ કળા (કોણ) કહે છે. X-અક્ષ પર ઉદ્‌ગમની અને પ્રારંભિક સમયની યોગ્ય પસંદગી દ્વારા $\phi = 0$ મળી શકે છે. આથી ϕને પડતો મૂકવામાં આવે એટલે કે સમીકરણ (15.2)ને $\phi = 0$ સાથે લખીએ તો વ્યાપકતાનું કોઈ નુકસાન થતું નથી.

15.3.2 તરંગલંબાઈ અને કોણીય તરંગ-સંખ્યા (Wavelength and Angular Wave Number)

સમાન કળા ધરાવતાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના લઘુતમ અંતરને તરંગની તરંગલંબાઈ કહે છે (કેટલીક વાર કળા તફાવત 2π ધરાવતાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના લઘુતમ અંતર તરીકે પણ તરંગ લંબાઈની વ્યાખ્યા અપાય છે) અને તેને સામાન્ય રીતે λ દ્વારા દર્શાવાય છે. સરળતા ખાતર, આપણે સમાન કળાવાળાં બિંદુઓ તરીકે શૃંગો અથવા ગર્તોને પસંદ કરી શકીએ. એ રીતે, તરંગમાં બે ક્રમિક શૃંગ કે બે ક્રમિક ગર્ત વચ્ચેનું અંતર તરંગલંબાઈ છે. સમીકરણ (15.2)માં $\phi = 0$ લેતાં, $t = 0$ સમયે સ્થાનાંતર

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (15.5)$$

પરથી મળે છે. Sine વિધેય દર 2π જેટલા કોણના તફાવતે તેના મૂલ્યનું પુનરાવર્તન કરતું હોવાથી,

$$\sin kx = \sin(kx + 2n\pi) = \sin k\left(x + \frac{2n\pi}{k}\right)$$

એટલે કે x અને $x + \frac{2n\pi}{k}$ આગળનાં બિંદુઓ આગળ સ્થાનાંતર સમાન છે, જ્યાં $n = 1, 2, 3, ...$ એકસમાન સ્થાનાંતર ધરાવતાં બિંદુઓ વચ્ચેનું લઘુતમ સ્થાનાંતર $n = 1$ લેવાથી મળે છે.

આ રીતે $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ અથવા $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (15.6)

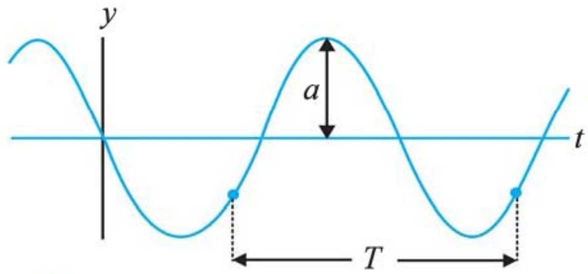
મળે છે. k એ કોણીય તરંગસંખ્યા અથવા પ્રસરણ (Propagation) અચળાંક છે. તેનો SI એકમ radian per metre અથવા rad m^{-1} છે.*

15.3.3 આવર્તકાળ, કોણીય આવૃત્તિ અને આવૃત્તિ (Period, Angular Frequency and Frequency)

આકૃતિ 15.7 ફરી વાર એક Sinusoidal આલેખ દર્શાવે છે. તે આપેલી ક્ષણે તરંગનો આકાર દર્શાવતું નથી પણ (કોઈ નિશ્ચિત સ્થાને) માધ્યમના કોઈ ખંડનું સમયના વિધેય તરીકે સ્થાનાંતર દર્શાવે છે. સરળતા ખાતર આપણે સમીકરણ (15.2)ને $\phi = 0$ સાથે લઈને ખંડની ગતિ $x = 0$ આગળ નિહાળીએ છીએ.

આ રીતે આપણને

$$y(0, t) = a \sin(-\omega t)$$
$$= -a \sin \omega t$$



આકૃતિ 15.7 નિશ્ચિત સ્થાને રહેલ દોરીનો ખંડ જ્યારે તરંગ તેના પરથી પસાર થાય ત્યારે સમય સાથે કંપવિસ્તાર a અને આવર્તકાળ T સાથે દોલનો કરે છે.

મળે. તરંગના દોલનનો આવર્તકાળ એ તેના કોઈ ખંડ (વિભાગ)ને એક દોલન પૂર્ણ કરતાં લાગતો સમય છે. એટલે કે

$$-a \sin \omega t = -a \sin \omega(t + \mathrm{T})$$
$$= -a \sin (\omega t + \omega \mathrm{T})$$

sin વિધેય 2π અંતરાલે પુનરાવર્તન પામતું હોવાથી,

$$\omega \mathrm{T} = 2\pi \text{ અથવા } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \qquad (15.7)$$

ωને તરંગની કોણીય આવૃત્તિ કહે છે તેનો SI એકમ rad s^{-1} છે. આવૃત્તિ ν એ એક સેકન્ડમાં થતાં દોલનોની સંખ્યા છે. આથી,

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (15.8)$$

νને સામાન્ય રીતે hertz (Hz)માં માપવામાં આવે છે.

ઉપરની ચર્ચામાં, હંમેશાં દોરી પર પ્રસરતા તરંગનો અથવા લંબગત તરંગના સંદર્ભનો ઉલ્લેખ કરેલ છે. સંગત તરંગમાં માધ્યમના કોઈ ખંડનું સ્થાનાંતર તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર હોય છે. સમીકરણ (15.2)માં, સંગતતરંગ માટે સ્થાનાંતર વિધેય

$$s(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \qquad (15.9)$$

તરીકે લખાય છે, જ્યાં $s(x, t)$ એ માધ્યમના x-સ્થાને આવેલ ખંડનું t સમયે, તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર એવું સ્થાનાંતર છે. સમીકરણ (15.9)માં a એ સ્થાનાંતર કંપવિસ્તાર છે. બીજી રાશિઓના અર્થ લંબગત તરંગમાં હતા તે જ છે. સિવાય કે સ્થાનાંતર વિધેય $y(x, t)$ને સ્થાને વિધેય $s(x, t)$ આવે છે.

* *અત્રે 'Radian' પડતો મૂકીને એકમોને માત્ર m^{-1} તરીકે લખી શકાય. આમ k, એકમ અંતરમાં સમાવી શકાતા તરંગોની સંખ્યાના 2π ગણું મૂલ્ય (એટલે કે કુલ કળા-તફાવત) દર્શાવે છે. તેના SI એકમ m^{-1} છે.*

> **ઉદાહરણ 15.2** એક દોરી પર પ્રસરતું તરંગ
> $y(x, t) = 0.005 \sin(80.0\, x - 3.0\, t)$
> વડે દર્શાવાય છે, જેમાં સંખ્યાત્મક અચળાંકો SI એકમોમાં (0.005 m, 80.0 rad m^{-1} અને 3.0 rad s^{-1}) છે. તરંગના (a) કંપવિસ્તાર (b) તરંગલંબાઈ (c) આવર્તકાળ અને આવૃત્તિ શોધો. $x = 30.0$ cm અંતરે અને $t = 20$ s સમયે તરંગનું સ્થાનાંતર y શોધો.

ઉકેલ આ સ્થાનાંતર સમીકરણને, સમીકરણ (15.2)

$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$

સાથે સરખાવતાં,

(a) તરંગનો કંપવિસ્તાર 0.005 m $= 5$ mm

(b) કોણીય તરંગસંખ્યા $k = 80.0\ m^{-1}$ અને કોણીય આવૃત્તિ $\omega = 3.0\ s^{-1}$ મળે છે. તરંગલંબાઈ λના k સાથેના સંબંધ (સમીકરણ 15.6) પરથી

$$\lambda = 2\pi / k$$

$$= \frac{2\pi}{80.0 m^{-1}}$$

$$= 7.85 \text{ cm}$$

(c) T અને ω વચ્ચેના સંબંધ

$T = 2\pi / \omega$ પરથી

$$T = \frac{2\pi}{3.0\ s^{1}}$$

$$= 2.09 \text{ s}$$

અને આવૃત્તિ $\nu = 1/T = 0.48$ Hz

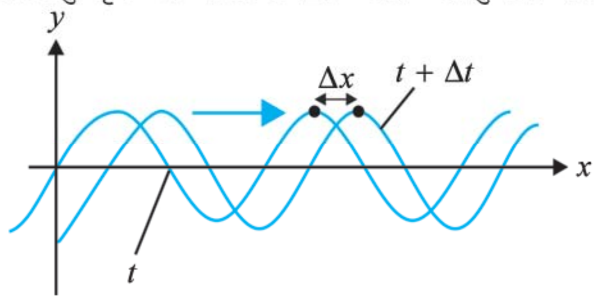
$x = 30.0$ cm આગળ $t = 20$ s સમયે સ્થાનાંતર

$$y = (0.005 \text{ m}) \sin(80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$$
$$= (0.005 \text{ m}) \sin(-36)$$
$$= (0.005 \text{ m}) \sin(-36 + 12\pi)$$
$$= (0.005 \text{ m}) \sin(1.68)$$
$$= (0.005 \text{ m}) \sin(96.3^{\circ}) \simeq 5 \text{ mm}$$

◀

15.4 પ્રગામી તરંગની ઝડપ (THE SPEED OF A TRAVELLING WAVE)

પ્રગામી તરંગની પ્રસરણની ઝડપ શોધવા માટે આપણે તરંગ પરના (કળાના કંઈક લાક્ષણિક મૂલ્ય ધરાવતા) નિશ્ચિત બિંદુ પર આપણું ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ અને તે બિંદુ સમય સાથે કેવી રીતે ગતિ કરે છે તે જોઈએ. તરંગના શૃંગની ગતિનું નિરીક્ષણ કરવાનું સગવડભર્યું છે. આકૃતિ 15.8 જેમની વચ્ચે અલ્પ સમયગાળો Δt હોય તેવી બે ક્ષણે તરંગનો આકાર દર્શાવે છે. આખી તરંગભાત Δx જેટલું અંતર જમણી બાજુ (ધન x-દિશામાં) ખસેલી દેખાય છે. ખાસ તો, ટપકા (•) વડે દર્શાવેલું શૃંગ Δt સમયમાં Δx અંતર ખસેલું છે. એટલે



આકૃતિ 15.8 *હાર્મોનિક તરંગ t થી $t + \Delta t$ સમયે આગળ વધે છે, જ્યાં Δt નાનો સમયગાળો છે. તરંગભાત સમગ્રપણે જમણી બાજુ ખસે છે. તરંગનું શૃંગ (અથવા કોઈ નિશ્ચિત કળા ધરાવતું બિંદુ) જમણી તરફ Δt સમયમાં Δx અંતર ખસે છે.*

તરંગની ઝડપ $\Delta x/\Delta t$ છે. આપણે આવું (•)ટપકું બીજી કોઈ પણ કળા ધરાવતા બિંદુ પર મૂકી શકીએ. તે આટલી જ ઝડપ υ વેગ થી ગતિ કરશે. (નહિ તો તરંગભાત એકસરખી રહેશે નહિ). અચળ કળા ધરાવતા બિંદુની ગતિ

$$kx - \omega t = \text{અચળ} \tag{15.10}$$

દ્વારા અપાય છે.

આમ, જેમ સમય t બદલાય છે તેમ નિશ્ચિત કળા ધરાવતા બિંદુનું સ્થાન એવી રીતે બદલાવું જોઈએ કે કળા અચળ રહે.

આમ, $kx - \omega t = k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t)$

અથવા $k\,\Delta x - \omega\,\Delta t = 0$

Δx, Δtને અત્યંત સૂક્ષ્મ લેતાં,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon \tag{15.11}$$

ωના T સાથેના તથા kના λ સાથેના સંબંધ પરથી

$$\upsilon = \frac{2\pi\upsilon}{2\pi/\lambda} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{15.12}$$

મળે. બધા પ્રગામી તરંગો માટે વ્યાપક એવું સમીકરણ (15.12) દર્શાવે છે કે માધ્યમના કોઈ ઘટકને એક દોલન પૂર્ણ કરવા જે સમય લાગે તે દરમિયાન તરંગભાત એક તરંગલંબાઈ જેટલું અંતર કાપે છે. આપણે એ નોંધવું જોઈએ કે, યાંત્રિક તરંગની ઝડપ માધ્યમના જડત્વીય (દોરીની રેખીય દળ ઘનતા, વ્યાપક રૂપે દળ ઘનતા) અને સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મો (રેખીય માધ્યમ માટે યંગ મોડ્યુલસ/આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક, કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક) દ્વારા નક્કી થાય

છે. માધ્યમ ઝડપ નક્કી કરે છે, ત્યાર બાદ સમીકરણ (15.12), આપેલ ઝડપ માટે તરંગલંબાઈનો આવૃત્તિ સાથેનો સંબંધ નક્કી કરે છે. અલબત્ત, અગાઉ નોંધ્યું તે પ્રમાણે, એક જ માધ્યમમાં જેમના વેગ જુદાં-જુદાં હોય તેવા લંબગત અને સંગત એમ બંને તરંગોને માધ્યમ પસાર થવા દે છે. હવે પછી આ પ્રકરણમાં આપણે કેટલાક માધ્યમમાં યાંત્રિકતરંગોની ઝડપનાં વિશિષ્ટ સૂત્રો મેળવીશું.

15.4.1 તણાવવાળી દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ (Speed of A Transverse Wave on Stretched String)

જ્યારે માધ્યમમાં વિક્ષોભ ઉત્પન્ન કરવામાં આવે છે ત્યારે તેમાં ઉદ્ભવતા પુનઃસ્થાપક બળ અને માધ્યમના જડત્વીય ગુણધર્મ (દળ ઘનતા) દ્વારા યાંત્રિક તરંગની ઝડપ નક્કી થાય છે. ઝડપને પ્રથમ પરિબળ (પુનઃસ્થાપક બળ) સાથે સમપ્રમાણનો અને બીજા પરિબળ (જડત્વ) સાથે વ્યસ્ત પ્રમાણનો સંબંધ હશે તેવું અપેક્ષિત છે. દોરી પરના તરંગો માટે પુનઃસ્થાપક બળ તણાવ T દ્વારા પૂરું પાડવામાં આવે છે. આ કિસ્સામાં જડત્વીય ગુણધર્મ રેખીય દળ ઘનતા μ છે, જે દોરીના દળ m ભાગ્યા તેની લંબાઈ L જેટલી છે. ન્યૂટનના ગતિના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને દોરી પરના તરંગની ઝડપનું સચોટ સૂત્ર મેળવી શકાય, પરંતુ આ તારવણી કરવાનું આ પુસ્તકની મર્યાદા બહારનું છે. આથી, આપણે પારિમાણિક વિશ્લેષણનો ઉપયોગ કરીશું. આપણે એ તો જાણીએ જ છીએ કે એકલા પારિમાણિક વિશ્લેષણથી કદી સચોટ સૂત્ર મેળવી શકાતું નથી. પારિમાણિક વિશ્લેષણમાં પરિમાણરહિત એક અચળાંક હંમેશાં નક્કી કરવાનો બાકી રહેતો જ હોય છે.

μનાં પરિમાણ $[ML^{-1}]$ છે અને Tનાં પરિમાણ બળ જેવાં એટલે કે $[MLT^{-2}]$ છે. આપણે આ બંનેને ઝડપનાં પરિમાણ $[LT^{-1}]$ મેળવવા માટે સંયોજિત કરવાં પડશે. સાદા નિરીક્ષણથી જણાય છે કે T/μ રાશિને પ્રસ્તુત પરિમાણ છે.

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

આમ જો T અને μ એ જ માત્ર પ્રસ્તુત રાશિઓ છે તેમ ધારી લઈએ તો

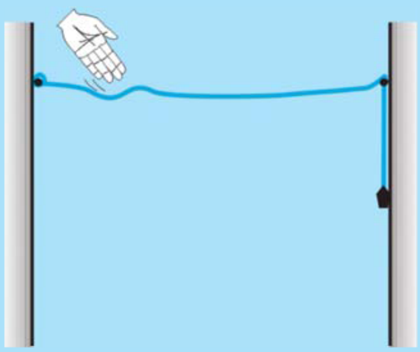
$$\upsilon = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{15.13}$$

જ્યાં C એ પારિમાણિક વિશ્લેષણનો અનિર્ણિત અચળાંક છે. સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. ખેંચાયેલી દોરી પરના લંબગત તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{15.14}$$

પરથી મળે છે. અગત્યના મુદ્દાની નોંધ લઈએ કે ઝડપ υ માત્ર માધ્યમના ગુણધર્મો T અને μ પર જ આધારિત છે. (T એ બાહ્ય બળને લીધે ઉદ્ભવતો ખેંચાયેલી સ્પ્રિંગનો ગુણધર્મ છે). તે તરંગની પોતાની તરંગલંબાઈ કે આવૃત્તિ પર આધારિત નથી. આગળ ઉપર ઉચ્ચ અભ્યાસમાં તમે એવા તરંગો વિશે જાણશો જેમની ઝડપ તરંગની આવૃત્તિથી સ્વતંત્ર હોતી નથી. λ અને υ એ બે પ્રાચલોમાંથી વિક્ષોભનું ઉદ્ગમ, ઉદ્ભવેલા

દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન)નું પ્રસરણ



એક દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન)ની ગતિ તમે સરળતાથી જોઈ શકો છો. તમે દૃઢ સીમા આગળથી તેનું પરાવર્તન પણ જોઈ શકો છો અને તેનો વેગ માપી શકો છો. તમને 1 થી 3 cm વ્યાસનું દોરડું, બે હૂક અને કેટલાંક વજનોની જરૂર પડશે. તમે આ પ્રયોગ તમારા વર્ગખંડમાં કે પ્રયોગશાળામાં કરી શકો છો.

1 થી 3 cm વ્યાસનું લાંબું દોરડું અથવા જાડી દોરી લો અને તેને ઓરડા કે પ્રયોગશાળામાંની સામસામી દીવાલ પરના હૂક સાથે બાંધો. એક છેડાને હૂક પરથી પસાર કરીને તેની સાથે (લગભગ 1 થી 5 kg) વજન લટકાવો. દીવાલો લગભગ 3 થી 5 m અંતરે હોઈ શકે.

એક લાકડી કે સળિયો લઈ, એક છેડા પાસેના બિંદુએ અથડાવો. આનાથી દોરડા પર વિક્ષોભ (સ્પંદન) ઉત્પન્ન થાય છે જે હવે તેના પર ગતિ કરે છે. તમે તેને છેડા પર પહોંચતો અને પાછો પરાવર્તિત થતો જોઈ શકો છો. તમે આપાત વિક્ષોભ અને પરાવર્તિત વિક્ષોભ વચ્ચે કળા સંબંધ ચકાસી શકો છો. વિક્ષોભ સંપૂર્ણ વિલાઈ જાય તે પહેલાંનાં બે કે ત્રણ પરાવર્તનો તમે સરળતાથી જોઈ શકશો. તમે એક અટક-ઘડી (Stop Watch) લઈને દીવાલો વચ્ચેનું અંતર કાપતાં વિક્ષોભને લાગેલો સમય શોધી શકો છો અને આ પરથી તેનો વેગ માપી શકો છો. તેને સમીકરણ (15.14)થી મળેલ વેગ સાથે સરખાવો.

સંગીતના વાજિંત્રની ધાતુની પાતળી દોરી (તાર) પર પણ આવું જ થાય છે. મુખ્ય તફાવત એ છે કે ધાતુની પાતળી દોરીનું એકમ લંબાઈ દીઠ ઓછું દળ હોવાથી, તેના પર જાડા દોરડાની સરખામણીએ વેગ વધુ હોય છે. જાડા દોરડા પર ઓછા વેગને લીધે આપણે ગતિને જોઈ શકીએ છીએ અને સારી રીતે માપન કરી શકીએ છીએ.

તરંગની આવૃત્તિ નક્કી કરે છે. માધ્યમમાં તરંગની આપેલ ઝડપ અને આવૃત્તિ પરથી સમીકરણ (15.12) દ્વારા તરંગલંબાઈ

$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$ મુજબ નક્કી થાય છે. (15.15)

> *ઉદાહરણ 15.3* એક સ્ટીલના તારની લંબાઈ 0.72 m અને તેનું દળ 5.0×10^{-3} kg છે. જો તાર 60 Nના તણાવ હેઠળ હોય, તો તાર પર લંબગત તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ તારનું એકમ લંબાઈ દીઠ દળ

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\text{kg}}{0.72\text{m}}$$

$$= 6.9 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$$

તણાવ T = 60 N

તાર પર તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60 \text{ N}}{6.9\times10^{-3}\text{kg m}^{-1}}} = 93 \text{ m s}^{-1}$$ ◄

15.4.2 સંગત તરંગની ઝડપ (ધ્વનિની ઝડપ) (Speed of Longitudinal Wave - Speed of Sound)

સંગત તરંગમાં માધ્યમનાં ઘટકો તરંગની પ્રસરણ દિશામાં આગળ-પાછળ દોલનો કરતાં હોય છે. આપણે અગાઉ જોયું જ છે કે ધ્વનિતરંગો હવાના નાના કદ ખંડોના સંઘનન અને વિઘનનના રૂપમાં ગતિ કરે છે. જે સ્થિતિસ્થાપક ગુણધર્મ, દાબીય વિકૃતિની અસર હેઠળ ઉદ્‌ભવતું પ્રતિબળ નક્કી કરે છે તે માધ્યમનો કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક (બલ્ક મોડ્યૂલસ) છે જે

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V} \quad (15.16)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત છે. (જુઓ પ્રકરણ 9.)

અહીં, દબાણ-તફાવત ΔPને લીધે કદ વિકૃતિ $\frac{\Delta V}{V}$ ઉત્પન્ન થાય છે. Bનાં પરિમાણ દબાણ જેવાં જ છે અને *SI* એકમમાં Pascal (P*a*)ના પદમાં લખાય છે. તરંગ-પ્રસરણમાં પ્રસ્તુત એવો જડત્વીય ગુણધર્મ એ દળ ઘનતા ρ છે, તેનાં પરિમાણ $[ML^{-3}]$ છે. સામાન્ય નિરીક્ષણથી જણાય છે કે B/ρનાં પરિમાણ

$$\frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[ML^{-3}]} = [L^2T^{-2}] \quad (15.17)$$

છે. આમ જો B અને ρને જ પ્રસ્તુત રાશિઓ ગણીએ તો

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (15.18)$$

જ્યાં, અગાઉની જેમ C એ પારિમાણિક વિશ્લેષણનો અનિર્ણિત અચળાંક છે. સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં $C = 1$ મળે છે. આમ માધ્યમમાં સંગત-તરંગ માટેનું વ્યાપક સૂત્ર

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \text{ છે.} \quad (15.19)$$

કોઈ ઘન સળિયા (Bar) (કે પટ્ટી) જેવા રેખીય માધ્યમ માટે સળિયાનું પાર્શ્વિક (Lateral) વિસ્તરણ અવગણ્ય હોય છે અને આપણે તેને ફક્ત સંગત (પ્રતાન) વિકૃતિ છે તેમ ગણી શકીએ. તે કિસ્સામાં સ્થિતિસ્થાપકતાનો પ્રસ્તુત અંક યંગ મૉડ્યૂલસ છે, તેનાં પરિમાણ પણ બલ્ક મોડ્યૂલસના જેવાં જ છે. આ કિસ્સામાં પારિમાણિક વિશ્લેષણ અગાઉના જેવું જ છે અને તે સમીકરણ 15.18 જેવો સંબંધ આપે છે, જેમાં C એ અનિર્ણિત છે અને સચોટ સૂત્ર મેળવવામાં C=1 મળે છે. આમ કોઈ ઘન પટ્ટીમાં સંગત-તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (15.20)$$

પરથી મળે છે. જ્યાં Y એ પટ્ટીના દ્રવ્યનો યંગ મોડ્યૂલસ છે. કોષ્ટક 15.1 કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિનો વેગ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 15.1 કેટલાંક માધ્યમોમાં ધ્વનિની ઝડપ

માધ્યમ	ઝડપ (m s^{-1})
વાયુઓ	
હવા (0° C)	331
હવા (20° C)	343
હિલિયમ	965
હાઈડ્રોજન	1284
પ્રવાહીઓ	
પાણી (0° C)	1402
પાણી (20° C)	1482
દરિયાનું પાણી	1522
ઘન પદાર્થો	
ઍલ્યુમિનિયમ	6420
તાંબું	3560
સ્ટીલ	5941
ગ્રેનાઈટ	6000
વલ્કેનાઈઝ્ડ રબર	54

ધ્વનિની ઝડપ વાયુઓમાં હોય તે કરતાં પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થોમાં સામાન્ય રીતે વધારે હોય છે. (નોંધો કે ઘન માટે અહીં આપેલ ઝડપ એ સંગત-તરંગોની ઝડપ છે.) આમ થવાનું

કારણ એ છે કે, તેમને સંકોચવાનું (Compress) વાયુઓ કરતાં ખૂબ વધારે મુશ્કેલ છે અને તેથી તેમના બલ્ક મોડ્યુલસનું મૂલ્ય ઘણું મોટું હોય છે. હવે સમી. 15.19 જુઓ. ઘન અને પ્રવાહીઓની ઘનતા(δ) વાયુઓની ઘનતા કરતાં મોટી હોય છે. પરંતુ અનુરૂપ બલ્ક મોડ્યુલસ(B) ઘન અને પ્રવાહી બંનેના ઘણા મોટા હોય છે. આ કારણથી ધ્વનિ તરંગો ઘન અને પ્રવાહીઓમાં વધુ ઝડપથી ગતિ કરે છે.

આપણે વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ, આદર્શ વાયુ સંનિકટતા સાથે અંદાજી શકીએ. આદર્શ વાયુ માટે દબાણ P, કદ V અને તાપમાન T વચ્ચેનો સંબંધ (જુઓ પ્રકરણ 11.)

$$PV = Nk_BT \tag{15.21}$$

છે. જ્યાં N એ V કદમાં અણુઓની સંખ્યા છે. k_B બૉલ્ટ્ઝમૅન અચળાંક અને T વાયુનું તાપમાન (કૅલ્વિનમાં) છે. આથી સમતાપી ફેરફાર માટે સમીકરણ (15.21) પરથી

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

અથવા $-\dfrac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (15.16)માં અવેજ કરતાં

$B = P$ મળે.

આથી સમીકરણ (15.21) પરથી, આદર્શ વાયુમાં ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \tag{15.22}$$

પરથી મળે છે. આ સંબંધ સૌપ્રથમ ન્યૂટને આપ્યો હતો અને તેથી તેને ન્યૂટનનું સૂત્ર કહે છે.

▶ *ઉદાહરણ 15.4* પ્રમાણભૂત તાપમાને અને દબાણે હવામાંથી ધ્વનિના વેગનો અંદાજ મેળવો. 1 mole હવાનું દળ 29.0×10^{-3} kg છે.

ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ પણ વાયુના 1 moleનું STP એ કદ 22.4 Litre છે. તેથી STP એ હવાની ઘનતા

ρ_0 = (એક મોલ હવાનું દળ/એક મોલ હવાનું STP એ કદ)

$$= \frac{29.0\times10^{3}\ \text{kg}}{22.4\times10^{-3}\ \text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

માધ્યમમાંથી ધ્વનિની ઝડપ માટેના ન્યૂટનના સૂત્ર મુજબ, હવામાંથી STP એ ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \left[\frac{1.01\times10^5\ \text{N m}^{-2}}{1.29\ \text{kg m}^{3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{m s}^{-1} \tag{15.23}$$

કોષ્ટક 15.1માં આપેલ પ્રાયોગિક મૂલ્ય 331 m s^{-1}ની સરખામણીએ સમીકરણ (15.23)માં દર્શાવેલું પરિણામ લગભગ 15 % નાનું છે. આપણે ક્યાં ભૂલ કરી ? જો આપણે ન્યૂટનની મૂળ પૂર્વધારણા તપાસીએ કે જેમાં ધ્વનિતરંગોના માધ્યમમાં પ્રસરણ દરમિયાન દબાણના ફેરફારો સમતાપી (Isothermal) છે, તો આપણને તે સાચી જણાતી નથી. લાપ્લાસે એમ દર્શાવ્યું હતું કે ધ્વનિતરંગોના પ્રસરણ દરમિયાન દબાણના ફેરફારો એટલા ઝડપી હોય છે કે, ઉષ્માવહનને, તાપમાન અચળ જાળવી રાખવાનો પૂરતો સમય મળતો જ નથી. તેથી આ ફેરફારો સમતાપી નહિ પણ સમોષ્મી (adiabatic) છે. સમોષ્મી ફેરફારો માટે આદર્શ વાયુ

PV^γ = અચળ, સમીકરણનું પાલન કરે છે(જુઓ પરિચ્છેદ 12.8).

$\therefore\ \Delta(PV^\gamma) = 0$

અથવા $P\,\gamma\, V^{\gamma-1}\,\Delta V + V^\gamma\,\Delta P = 0$

જ્યાં γ એ વાયુની બે વિશિષ્ટ ઉષ્માઓનો ગુણોત્તર C_p/C_v છે. આથી,

આમ, આદર્શ વાયુ માટે સમોષ્મી બલ્ક મોડ્યૂલસ (કદ સ્થિતિસ્થાપક અંક)

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$
$$= \gamma P$$

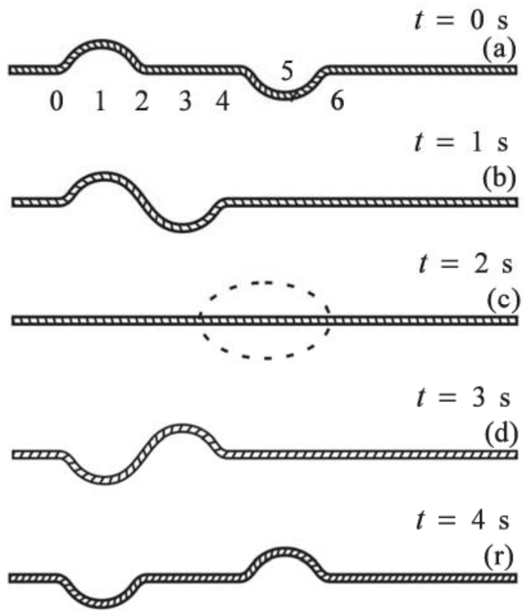
સમી. 15.8 પરથી ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{15.24}$$

સૂત્ર પરથી મળે છે. ન્યૂટનના સૂત્રમાંના આ ફેરફારને **લાપ્લાસનો સુધારો** કહે છે. હવા માટે $\gamma = 7/5$. હવે સમીકરણ (15.24)નો ઉપયોગ, STP એ હવામાંથી ધ્વનિની ઝડપ શોધવા માટે કરીએ તો, મૂલ્ય 331.3 m s^{-1} મળે છે. જે પ્રાયોગિક મૂલ્ય સાથે બંધબેસતું છે. ◀

15.5 તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત (THE PRINCIPLE OF SUPERPOSITION OF WAVES)

જ્યારે બે તરંગ-સ્પંદનો (Wave Pulses) પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં કરતાં એકબીજાને વટાવી જાય (Cross) (આકૃતિ 15.9) ત્યારે શું થાય છે ? એવું જણાયું છે કે તરંગ-સ્પંદનો એકબીજાને વટાવી જાય તે પછી પણ પોતાની ઓળખ (Identity) જાળવી રાખે છે. આમ છતાં, તેઓ સંપાત થયા હોય તે સમય દરમિયાન, તરંગભાત (Wave Pattern), દરેક સ્પંદન કરતાં જુદી હોય છે. જ્યારે સમાન અને વિરુદ્ધ આકારનાં બે સ્પંદનો એકબીજાં તરફ ગતિ કરે ત્યારની પરિસ્થિતિ આકૃતિ 15.9માં દર્શાવી છે. જ્યારે સ્પંદનો સંપાત થાય ત્યારે પરિણામી સ્થાનાંતર દરેક સ્પંદનથી થતા સ્થાનાંતરના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આને તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત કહે છે. આ સિદ્ધાંત



આકૃતિ 15.9 *સમાન અને વિરુદ્ધ સ્થાનાંતર ધરાવતાં અને વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં બે સ્પંદનો વક્ર (c)માં સંપાત થતાં સ્થાનાંતરોનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે.*

મુજબ દરેક સ્પંદન એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જાણે બીજા સ્પંદન હાજર જ નથી. આથી માધ્યમનાં ઘટકો બંનેને લીધે સ્થાનાંતર અનુભવે છે અને સ્થાનાંતર ધન કે ઋણ હોઈ શકે છે. તેથી પરિણામી સ્થાનાંતર તે બંનેના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આકૃતિ 15.9, જુદા જુદા સમયે તરંગના આકારના આલેખ દર્શાવે છે. આલેખ (c)માંની નાટ્યાત્મક અસરની નોંધ લો. બે સ્પંદનોને લીધે થતાં સ્થાનાંતરોએ એકબીજાને નાબૂદ કર્યા છે અને સમગ્રપણે સ્થાનાંતર શૂન્ય જણાય છે.

સંપાતપણાના સિદ્ધાંતને ગણિતીય રીતે રજૂ કરવા માટે ધારો કે $y_1(x, t)$ અને $y_2(x, t)$, માધ્યમમાં બે તરંગ-વિક્ષોભને લીધે મળતાં સ્થાનાંતર છે. જો તરંગો કોઈ વિસ્તારમાં એકસાથે આવી પહોંચે અને તેથી સંપાત થાય તો, પરિણામી સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (15.25)$$

જો બે કે વધુ તરંગો માધ્યમમાં ગતિ કરતાં સંપાત થાય તો પરિણામી તરંગ-આકાર (Wave Form), વ્યક્તિગત તરંગોના તરંગવિધેયોના સરવાળા બરાબર હોય છે. એટલે કે ગતિ કરતા તરંગોનાં તરંગવિધેયો

$y_1 = f_1(x - \upsilon t)$,

$y_2 = f_2(x - \upsilon t)$,

....

....

$y_n = f_n(x - \upsilon t)$

હોય, તો માધ્યમમાં પરિણામી તરંગવિધેય

$$y = f_1(x - \upsilon t) + f_2(x - \upsilon t) + ... + f_n(x - \upsilon t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - \upsilon t) \text{ છે.} \quad (15.26)$$

સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત વ્યતીકરણની ઘટનાના પાયામાં રહેલો છે.

સરળતા ખાતર તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતા એક સમાન ω (કોણીય આવૃત્તિ), એક સમાન k (કોણીય તરંગસંખ્યા) અને તેથી સમાન તરંગલંબાઈ λ ધરાવતા બે હાર્મોનિક પ્રગામી તરંગોનો વિચાર કરો. તેમની તરંગ-ઝડપ સમાન હશે. આપણે વધારામાં એવું ધારીએ કે તેમનાં કંપવિસ્તારો સમાન છે અને તેઓ બંને X-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરે છે. આ બે તરંગો વચ્ચે માત્ર પ્રારંભિક કળાનો જ તફાવત છે.

સમીકરણ (15.2) મુજબ, આ બે તરંગોને

$$y_1(x, t) = a \sin (kx - \omega t) \quad (15.27)$$

અને $y_2(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi)$ (15.28)

વડે રજૂ કરી શકાય છે. આથી સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ પરિણામી સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t) + a \sin (kx - \omega t + \phi) \quad (15.29)$$

$$= a\left[2 \sin\left[\frac{(kx - \omega t) + (kx - \omega t + \phi)}{2}\right]\cos\frac{\phi}{2}\right] \quad (15.30)$$

જ્યાં આપણે $\sin A + \sin B$ માટેના જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સૂત્રનો ઉપયોગ કર્યો છે. આ પરથી આપણને

$$y(x, t) = 2a \cos \frac{\phi}{2} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \quad (15.31)$$

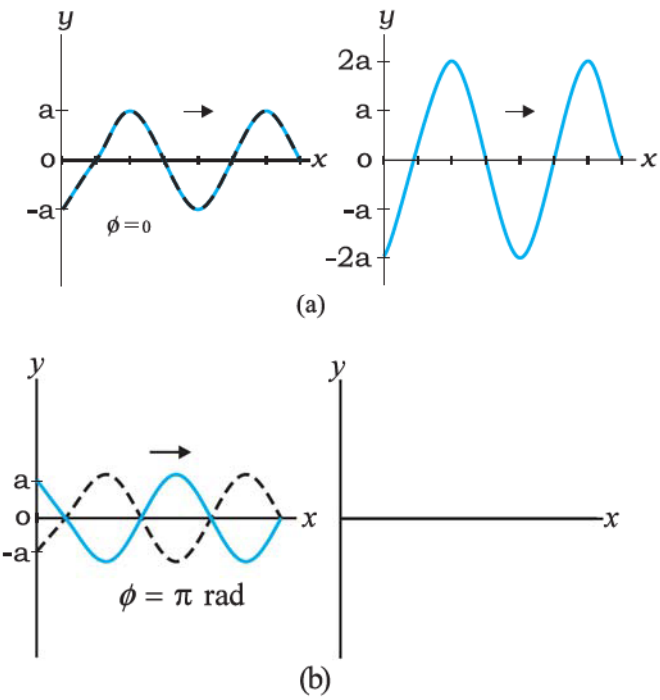
મળે. સમીકરણ (15.31) પણ x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતું પ્રગામી, હાર્મોનિક તરંગ દર્શાવે છે, જેની આવૃત્તિ અને તરંગલંબાઈ મૂળ તરંગો જેટલી જ છે. પરંતુ તેનો પ્રારંભિક કળાકોણ $\frac{\phi}{2}$ છે. એક નોંધપાત્ર બાબત એ છે કે, તેનો કંપવિસ્તાર, બે ઘટક તરંગોના કળા-તફાવત ϕનું વિધેય છે.

$$A(\phi) = 2a \cos \frac{1}{2}\phi \quad (15.32)$$

$\phi = 0$ માટે તરંગો કળામાં હોય છે, તેથી

$$y(x, t) = 2a \sin (kx - \omega t) \quad (15.33)$$

એટલે કે પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર $2a$ છે, જે Aનું મહત્તમ શક્ય મૂલ્ય છે. $\phi = \pi$ માટે, તરંગો પૂરેપૂરા વિરોધી



આકૃતિ **15.10** *સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ સમાન કંપવિસ્તાર અને તરંગલંબાઈ ધરાવતા બે હાર્મોનિક તરંગોનું પરિણામી તરંગ. પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર, કળા-તફાવત ϕ, જે (a) માટે શૂન્ય અને (b) માટે π છે, તેના પર આધારિત છે.*

કળામાં એટલે કે 180^0 કળા-તફાવતમાં છે અને પરિણામી તરંગ દરેક સ્થાને બધા સમય માટે શૂન્ય સ્થાનાંતર ધરાવે છે.

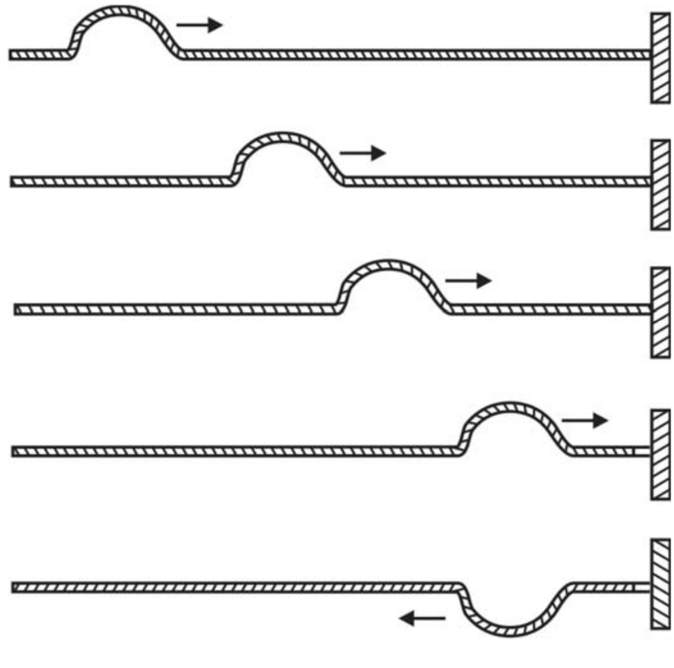
$$y(x,\ t) = 0 \qquad (15.34)$$

સમીકરણ (15.33) બે તરંગોના સહાયક વ્યતીકરણ (Constructive Interference)ને રજૂ કરે છે, જેમાં પરિણામી તરંગમાં કંપવિસ્તારોનો સરવાળો થાય છે. સમીકરણ (15.34), તેમનું વિનાશક વ્યતીકરણ (Distructive Interference) રજૂ કરે છે, જેમાં પરિણામી તરંગમાં કંપવિસ્તારોની બાદબાકી થાય છે. આકૃતિ 15.10 સંપાતપણાના સિદ્ધાંતથી ઉદ્‌ભવતા વ્યતીકરણના આ બે કિસ્સાઓ દર્શાવે છે.

15.6 તરંગોનું પરાવર્તન (REFLECTION OF WAVES)

અત્યાર સુધી આપણે અસીમિત માધ્યમમાં પ્રસરતા તરંગોનો વિચાર કર્યો. કોઈ સ્પંદન કે તરંગ જ્યારે કોઈ સીમા પર પહોંચે ત્યારે શું થાય છે ? જો સીમા પાસેનું બીજું માધ્યમ દઢ હોય તો સ્પંદન કે તરંગ પરાવર્તન પામે છે. પડઘા પડવાની ઘટના એ દઢ સીમા આગળથી થતા પરાવર્તનનું ઉદાહરણ છે. જો સીમા સંપૂર્ણ દઢ ન હોય અથવા તે બે જુદાં જુદાં સ્થિતિસ્થાપક માધ્યમોની આંતરસપાટી હોય, તો પરિસ્થિતિ કંઈક અંશે જટિલ (Complicated) છે. આપાત તરંગનો થોડો ભાગ પરાવર્તન પામે છે અને બાકીનો ભાગ બીજા માધ્યમમાં પસાર થાય છે. જો તરંગ બે જુદાં જુદાં માધ્યમોની સીમા પર ત્રાંસી રીતે આપાત થાય તો બીજા માધ્યમમાં પસાર થયેલું તરંગ **વક્રીભૂત (Refracted)** તરંગ કહેવાય છે. આપાત અને વક્રીભૂત તરંગો વક્રીભવનના સ્નેલ (Snell)ના નિયમનું પાલન કરે છે તથા આપાત અને પરાવર્તિત તરંગો પરાવર્તનના સામાન્ય નિયમોનું પાલન કરે છે.

આકૃતિ 15.11માં તણાવવાળી દોરી પર પ્રસરતું અને સીમા આગળથી પરાવર્તિત થતું સ્પંદન દર્શાવ્યું છે. સીમા દ્વારા કોઈ ઊર્જાનું શોષણ થતું નથી એમ ધારીએ તો પરાવર્તિત તરંગનો આકાર આપાત તરંગ જેવો જ છે પરંતુ તે પરાવર્તન વખતે π અથવા 180^0નો કળાનો ફેરફાર અનુભવે છે. આનું કારણ એ છે કે સીમા દઢ છે અને વિક્ષોભનું સીમા પર સ્થાનાંતર બધા સમય માટે શૂન્ય થવું જોઈએ. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ આ શક્ય તો જ બને કે જો પરાવર્તિત અને આપાત તરંગો વચ્ચે કળાનો તફાવત π હોય, જેથી પરિણામી સ્થાનાંતર શૂન્ય થાય. આ તર્ક કોઈ દઢ દીવાલ પરની સીમા શરત પર આધારિત છે. આપણે ગતિશાસ્ત્ર પરથી પણ આ જ નિર્ણય પર આવી શકીએ. સ્પંદન જ્યારે દીવાલ પર આવે છે ત્યારે દોરી દીવાલ પર બળ લગાડે છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ મુજબ દીવાલ દોરી પર સમાન અને વિરુદ્ધ બળ લગાડે છે, તેનાથી કળામાં π જેટલો તફાવત ધરાવતું પરાવર્તિત સ્પંદન ઉત્પન્ન થાય છે.



આકૃતિ **15.11** *દઢ સીમા આગળથી સ્પંદનનું પરાવર્તન*

બીજી બાજુ, જો સીમાબિંદુ દઢ ન હોય પણ ગતિ માટે સંપૂર્ણ મુક્ત હોય, (દોરી, કોઈ સળિયા પર મુક્ત રીતે ખસી શકતી વલય (Ring) સાથે બાંધી હોય તેવો કિસ્સો) તો પરાવર્તિત સ્પંદનના કળા અને કંપવિસ્તાર આપાત સ્પંદનના જેટલા જ હોય છે. આથી સીમા પર પરિણામી મહત્તમ સ્થાનાંતર દરેક સ્પંદનના કંપવિસ્તારથી બમણું હોય છે. અ-દઢ સીમાનું ઉદાહરણ એ ઑર્ગન પાઇપનો ખુલ્લો છેડો છે.

ટૂંકમાં, પ્રગામી તરંગ અથવા સ્પંદન દઢ સીમા આગળથી પરાવર્તન વખતે π જેટલો કળાનો ફેરફાર અનુભવે છે અને ખુલ્લી સીમા આગળથી પરાવર્તન વખતે કોઈ કળાનો ફેરફાર અનુભવતું નથી. આ બાબતને ગણિતીય રૂપમાં રજૂ કરવા માટે ધારો કે આપાત પ્રગામી તરંગ

$y_i(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$ છે.

દઢ સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \pi)$$
$$= -a \sin(kx + \omega t) \quad (15.35)$$

છે અને ખુલ્લી સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t + 0)$$
$$= a \sin(kx + \omega t) \quad (15.36)$$

એ સ્પષ્ટ છે કે, દઢ સીમા આગળ બધા સમયે $y = y_i + y_r = 0$.

15.6.1 સ્થિત તરંગો અને નૉર્મલ મોડ્ઝ (Standing Waves and Normal Modes)

ઉપર આપણે એક સીમા આગળથી પરાવર્તનનો વિચાર કર્યો. પરંતુ કેટલીક જાણીતી પરિસ્થિતિઓ (બંને છેડે જડિત કરેલી દોરી અથવા બંને છેડે બંધ હોય તેવી નળીમાંનો હવાનો સ્તંભ) એવી હોય છે કે જેમાં પરાવર્તન બે કે વધુ સીમાઓ આગળ થતું હોય. દાખલા તરીકે, જમણી બાજુ પ્રસરતું તરંગ એક છેડેથી પરાવર્તન પામશે અને તે બીજા છેડા તરફ જઈ બીજા છેડેથી પરાવર્તન પામશે. જ્યાં સુધી તરંગની એક સ્થાયી (Steady) ભાત (Pattern) રચાય ત્યાં સુધી આવું ચાલ્યા કરશે. આવી તરંગભાતને સ્થિત તરંગ (Standing Wave અથવા Stationary Wave) કહે છે. આ બાબત ગણિતીય રીતે જોવા માટે, x-અક્ષની ધન દિશામાં ગતિ કરતા અને સમાન તરંગલંબાઈ અને સમાન કંપવિસ્તાર ધરાવતા x-અક્ષની ઋણ દિશામાં પરાવર્તનથી મળેલા તરંગનો વિચાર કરો. $\phi = 0$ સાથે સમીકરણ (15.2) અને (15.4) પરથી,

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2(x, t) = a \sin(kx + \omega t)$$

સંપાતપણાના સિદ્ધાંત અનુસાર દોરી પરનું પરિણામી તરંગ,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$
$$= a[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$$

જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સૂત્ર $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$નો ઉપયોગ કરતાં,

$y(x, t) = 2a \sin kx \cos \omega t$ મળે છે. (15.37)

સમીકરણ (15.37) વડે રજૂ થતા તરંગ અને સમીકરણ (15.2) તથા (15.4) વડે રજૂ થતા તરંગોના પ્રકાર વચ્ચેનો તફાવત નોંધો. kx અને ωt પદો જુદાં જુદાં આવે છે પણ $kx - \omega t$ જેવા સંયોજિત રૂપે આવતાં નથી. આ તરંગનો કંપવિસ્તાર $2a \sin kx$ છે. આમ, આ પ્રકારના તરંગમાં બિંદુએ બિંદુએ કંપવિસ્તાર બદલાય છે. પરંતુ દોરીનો દરેક અંશ (ખંડ) એક સમાન કોણીય આવૃત્તિ ω અથવા આવર્તકાળથી દોલનો કરે છે. તરંગના જુદા જુદા વિભાગોનાં દોલનોની વચ્ચે કોઈ કળા-તફાવત હોતો નથી. દોરી સમગ્રપણે જુદાં જુદાં બિંદુઓએ જુદા જુદા કંપવિસ્તાર સાથે કળામાં દોલનો કરે છે. તરંગ-ભાત (Wave Pattern) જમણી બાજુ કે ડાબી બાજુ ખસતી નથી. આથી તે સ્થિતતરંગ કહેવાય છે. આપેલા સ્થાને કંપવિસ્તાર અમુક નિશ્ચિત હોય છે પણ અગાઉ નોંધ્યું તે મુજબ તે જુદાં જુદાં સ્થાને જુદો જુદો હોય છે. જે બિંદુઓએ કંપવિસ્તાર શૂન્ય (જ્યાં કંઈ ગતિ થતી નથી.) હોય તેમને **નિષ્પંદ બિંદુઓ (Nodes)** કહે છે. જે બિંદુઓએ કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય તે બિંદુઓને **પ્રસ્પંદ બિંદુઓ (Antinodes)** કહે છે. આકૃતિ 15.12, વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે પ્રગામી તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્ભવતી સ્થિત તરંગ-ભાત દર્શાવે છે.

સ્થિત તરંગોનું સૌથી મહત્ત્વનું લક્ષણ એ છે કે, સીમા શરતો તંત્રનાં દોલનોની શક્ય આવૃત્તિઓ અને તરંગલંબાઈઓ પર નિયંત્રણ લાદે છે. તંત્ર કોઈ પણ યાદચ્છિક (Arbitrary) આવૃત્તિથી દોલનો કરી શકતું નથી. (હાર્મોનિક પ્રગામી તરંગોથી આ જુદું પડે છે તે જુઓ.) પરંતુ તે પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓના ગણ (Set) અથવા દોલનના **નૉર્મલ મોડ્ઝ** (પ્રસામાન્ય રીતી દોલનો) દ્વારા લાક્ષણિક બનેલું છે. બંને છેડે જડિત કરેલી દોરી માટે હવે આપણે આવા નૉર્મલ મોડ્ઝ નક્કી કરીશું.

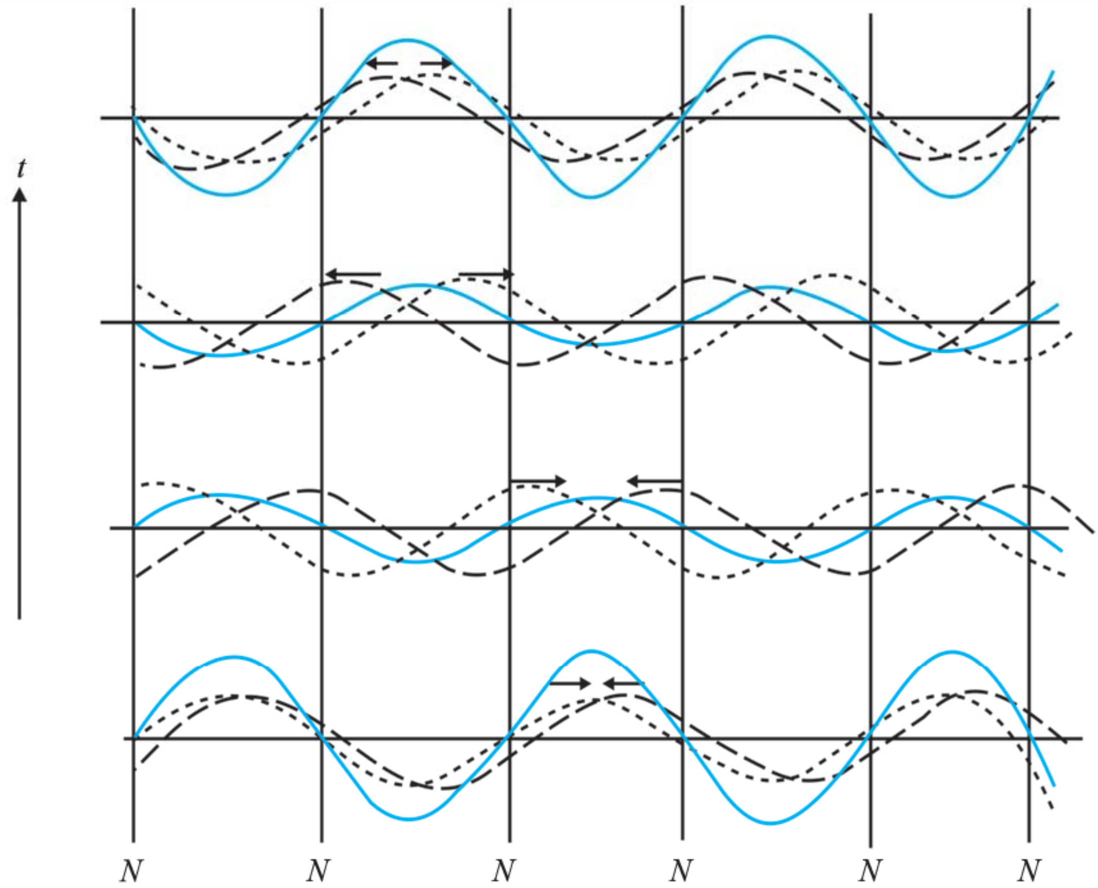
શરૂમાં, સમીકરણ (15.37) પરથી નિષ્પંદ બિંદુઓ (જ્યાં કંપવિસ્તાર શૂન્ય હોય છે.) $\sin kx = 0$ પરથી મળે છે. તે મુજબ

$$kx = n\pi;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ હોવાથી,

$$x = \frac{n\lambda}{2};\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad (15.38)$$

મળે છે. એ સ્પષ્ટ છે કે કોઈ પણ બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે. તે જ રીતે પ્રસ્પંદ બિંદુઓનાં



આકૃતિ 15.12 *વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે પ્રગામી તરંગોના સંપાતીકરણથી ઉદ્‌ભવતા સ્થિત તરંગો. શૂન્ય સ્થાનાંતર (નિષ્પંદ બિંદુઓ)નાં સ્થાન બધા જ સમય માટે નિશ્ચિત રહે છે.*

સ્થાન (જ્યાં કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય છે.) sin kxના મહત્તમ મૂલ્ય પરથી મળે છે.

$$|\sin kx| = 1$$

આ પરથી, $kx = (n + ½)\pi$; $n = 0, 1, 2, 3, ...$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ મૂકતાં,

$$x = (n + ½)\frac{\lambda}{2}; \; n = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (15.39)$$

મળે છે. કોઈ પણ બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{\lambda}{2}$ છે. બંને છેડે જડિત કરેલી અને તણાવવાળી L લંબાઈની દોરીના કિસ્સાને સમીકરણ (15.38) લાગુ પાડી શકાય છે. એક છેડો $x = 0$ આગળ લેતાં, સીમા શરતો એ છે કે $x = 0$ અને $x = L$ એ નિષ્પંદ બિંદુઓનાં સ્થાનો છે. $x = L$ આગળ નિષ્પંદ બિંદુ હોવાની શરતના પાલન માટે લંબાઈ Lનો λ સાથેનો સંબંધ નીચે મુજબ હોવો જોઈએ :

$$L = n\frac{\lambda}{2}; \; n = 1, 2, 3,... \qquad (15.40)$$

આમ, સ્થિત તરંગોની શક્ય તરંગલંબાઈઓ

$$\lambda = \frac{2L}{n}; \; n = 1, 2, 3,... \qquad (15.41)$$

સૂત્ર દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે અને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ,

$$\nu = \frac{nv}{2L}, \; n = 1, 2, 3 \qquad (15.42)$$

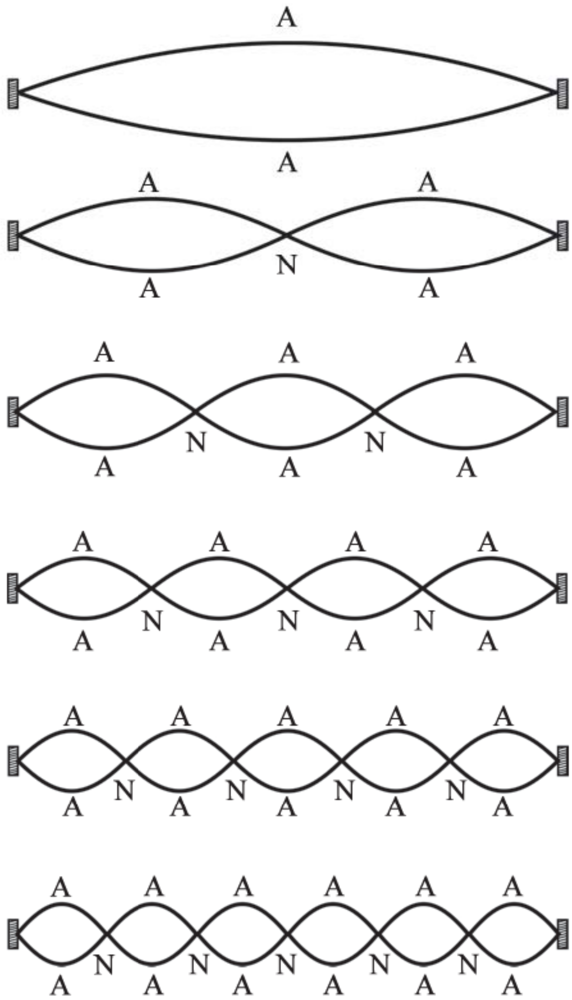
છે. આ રીતે આપણે તંત્રની પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ મેળવી છે. આ આવૃત્તિ સાથે થતાં દોલનોને તંત્રના દોલનના નૉર્મલ મોડ્સ કહે છે. તંત્રની શક્ય એવી સૌથી નીચી પ્રાકૃતિક આવૃત્તિને **મૂળભૂત મોડ** અથવા **પ્રથમ હાર્મોનિક** કહે છે. બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરી માટે સમીકરણ (15.42)માં $n = 1$ને અનુરૂપ તે $\nu = \frac{v}{2L}$ પરથી મળે છે. અહીં v એ તરંગની ઝડપ છે, જે માધ્યમના ગુણધર્મો દ્વારા નક્કી થાય છે. $n = 2$થી મળતી આવૃત્તિને દ્વિતીય હાર્મોનિક $n = 3$થી

મળતી આવૃત્તિને તૃતીય હાર્મોનિક વગેરે કહે છે. આપણે વિવિધ હાર્મોનિક્સને $\nu_n(n = 1, 2, 3...)$ સંજ્ઞા દ્વારા દર્શાવી શકીએ.

બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરીના પ્રથમ છ હાર્મોનિક્સ આકૃતિ 15.13માં દર્શાવ્યા છે. દોરી માત્ર આમાંની કોઈ એક આવૃત્તિથી દોલનો કરે તે જરૂરી નથી. સામાન્ય રીતે દોરીનું દોલન જુદા જુદા મોડ્સ સંપાત થયા હોય તેવું હોય છે, જેમાંના કેટલાક મોડ્સ વધુ પ્રબળતાથી અને કેટલાક ઓછી પ્રબળતાથી ઉત્તેજિત થયેલા હોય છે. સિતાર કે વાયોલિન જેવા સંગીતનાં વાજિંત્રો આ સિદ્ધાંત પર રચાયેલ છે. તારને કયા સ્થાનેથી ખેંચવામાં (Plucked) આવે છે અથવા કયા સ્થાને ઘસવામાં આવે છે તે પરથી કયા મોડ્સ બીજાઓ કરતાં વધારે પ્રબળ છે તે નક્કી થાય છે.

હવે આપણે એક છેડો ખુલ્લો અને બીજો બંધ હોય તેવી નળી (Pipe)માં હવાના સ્તંભનાં દોલનોનો વિચાર કરીએ.

અંશતઃ પાણીથી ભરેલી કાચની એક નળી આનું ઉદાહરણ છે. પાણીના સંપર્કમાંનો છેડો નિષ્પંદ બિંદુ છે જ્યારે ખુલ્લો છેડો પ્રસ્પંદ બિંદુ છે. નિષ્પંદ બિંદુ આગળ દબાણના ફેરફારો મહત્તમ હોય છે, પણ સ્થાનાંતર લઘુતમ (શૂન્ય) હોય છે. ખુલ્લા છેડે એટલે કે પ્રસ્પંદ બિંદુ આગળ તેથી ઊલટું દબાણના ફેરફારો લઘુતમ અને સ્થાનાંતર મહત્તમ હોય છે. પાણીના સંપર્કમાંના છેડાને $x = 0$ લેતાં, નિષ્પંદ બિંદુની શરત (સમીકરણ 15.38)નું પાલન થઈ જ જાય છે. જો બીજો છેડો $x = L$ એ પ્રસ્પંદ બિંદુ હોય, તો સમીકરણ (15.39) પરથી,



આકૃતિ 15.13 બંને છેડે જડિત કરેલી તણાવવાળી દોરીના પ્રથમ છ હાર્મોનિક્સ

$L = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ માટે.

આથી શક્ય તરંગલંબાઈઓ,

$$\lambda = \frac{2L}{(n+\frac{1}{2})},\ n = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (15.43)$$

સૂત્ર દ્વારા નિયંત્રિત થાય છે.

તંત્રનાં નૉર્મલ મોડ્સ-પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ

$$\nu = (n + \frac{1}{2})\frac{\upsilon}{2L};\ n = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (15.44)$$

પરથી મળે છે. મૂળભૂત આવૃત્તિ માટે $n = 0$ છે અને તેનું મૂલ્ય $\frac{\upsilon}{4L}$ છે. ઉચ્ચ આવૃત્તિઓ માત્ર **એકી સંખ્યાની હાર્મોનિક્સ** છે, એટલે કે મૂળભૂત આવૃત્તિના એકી ગુણાંકો : $3\frac{\upsilon}{4L}$, $5\frac{\upsilon}{4L}$, ... વગેરે છે. આકૃતિ 15.14 એક છેડે બંધ અને બીજે છેડે ખુલ્લા હવાના સ્તંભની પ્રથમ છ એકી હાર્મોનિક્સ દર્શાવે છે. બંને છેડે ખુલ્લી હોય તેવી નળી માટે દરેક છેડો પ્રસ્પંદ બિંદુ છે. એ સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે કે બંને છેડે ખુલ્લો હવાનો સ્તંભ બધી હાર્મોનિક ઉત્પન્ન કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 15.15.)

ઉપર ઉલ્લેખ કર્યો તેવાં તંત્રો, દોરી, હવાનો સ્તંભ-પ્રણોદિત દોલનો પણ અનુભવે છે. (પ્રકરણ 14). જો બાહ્ય આવૃત્તિ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓમાંથી કોઈ એકની નજીક હોય, તો તંત્ર **અનુનાદ (Resonance)** દર્શાવે છે.

તબલાના કિસ્સાની જેમ વર્તુળાકાર પડદા (Membrane)ને તેના પરિઘ આગળથી જકડી દેતાં તેના નૉર્મલ મોડ્ઝ, પડદાના પરિઘ પરનું કોઈ બિંદુ કંપન કરતું નથી એવી સીમા શરત પરથી નક્કી થાય છે. આવા તંત્રના નૉર્મલ મોડ્ઝનો અંદાજ મેળવવો વધારે જટિલ છે. આ પ્રશ્નમાં દ્વિ-પરિમાણમાં થતું તરંગ-પ્રસરણ વિચારવાનું હોય છે. આમ છતાં, તેની પાછળનું ભૌતિકવિજ્ઞાન તો સમાન જ છે.

▶ ***ઉદાહરણ 15.5*** 30.0 cm લંબાઈની એક નળી બંને છેડે ખુલ્લી છે. 1.1 kHzના ઉદ્ગમ સાથે નળીની કઈ હાર્મોનિક મોડ અનુનાદ ઉત્પન્ન કરશે ? જો નળીનો એક છેડો બંધ કરવામાં આવે, તો તે જ ઉદ્ગમ સાથે અનુનાદ થતો જણાશે ? હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 330 m s^{-1} લો.

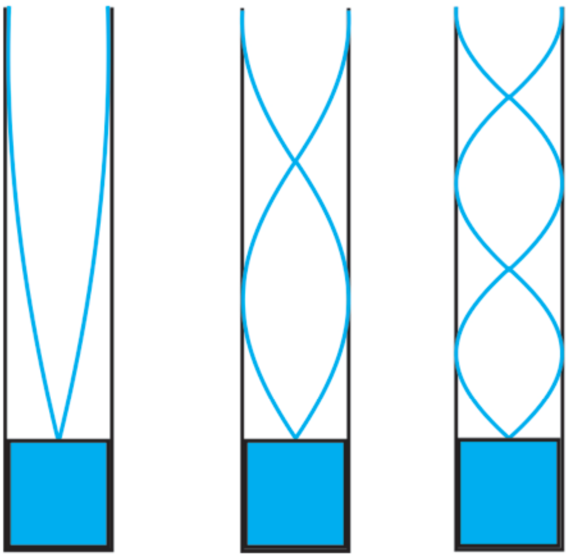
ઉકેલ પ્રથમ હાર્મોનિક આવૃત્તિ

$$\nu_1 = \frac{\upsilon}{\lambda_1} = \frac{\upsilon}{2L} \text{ (ખુલ્લી નળી)}$$

પરથી મળે છે, જ્યાં L નળીની લંબાઈ છે. તેની n-મી આવૃત્તિ

$$\nu_n = \frac{n\upsilon}{2L};\ n = 1, 2, 3, \ldots \text{ (ખુલ્લી નળી)}$$

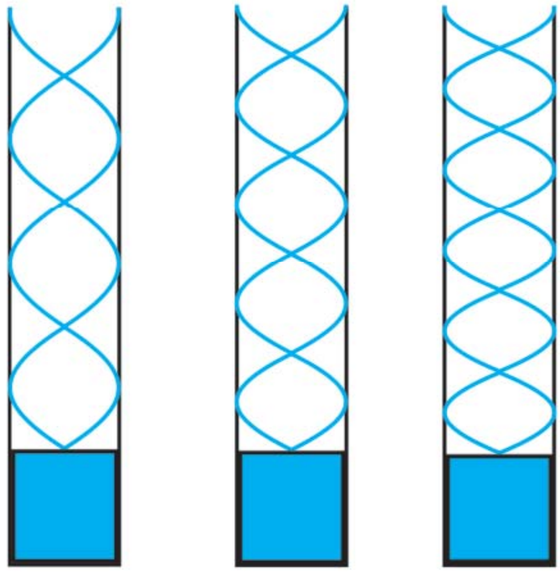
ખુલ્લી નળીના કેટલાક પ્રારંભિક મોડ્ઝ આકૃતિ 15.15માં દર્શાવ્યા છે.



(a) મૂળભૂત અથવા પ્રથમ હાર્મોમિક

(b) ત્રીજી હાર્મોનિક

(c) પાંચમી હાર્મોનિક



(d) સાતમી હાર્મોનિક

(e) નવમી હાર્મોનિક

(f) અગિયારમી હાર્મોનિક

આકૃતિ 15.14 *એક છેડે ખુલ્લી અને બીજે છેડે બંધ હવાના સ્તંભનાં નૉર્મલ મોડ્સ. ફક્ત એકી હાર્મોનિક શક્ય હોવાનું દેખાય છે.*

L = 30.0 cm, υ = 330 m s^{-1} માટે

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \text{ (m s}^{-1})}{0.6\text{(m)}} = 550n \text{ s}^{-1}$$

હવે એ સ્પષ્ટ છે કે 1.1 kHzનું ઉદ્ગમ ν_2 આવૃત્તિ એટલે કે **બીજા હાર્મોનિક** સાથે અનુનાદ કરશે.

હવે જો નળીનો એક છેડો બંધ કરવામાં આવે (આકૃતિ 15.14), તો સમીકરણ (15.44) પરથી, મૂળભૂત આવૃત્તિ

$$\nu_1 = \frac{\upsilon}{\lambda_1} = \frac{n\upsilon}{4L} \text{ (એક છેડે બંધ નળી)}$$

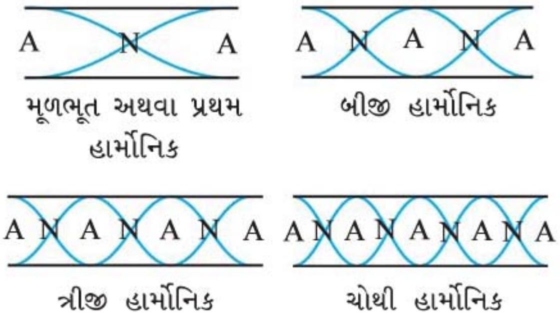
મળે છે અને ફક્ત એકી સંખ્યાના હાર્મોનિક્સ હાજર હોય છે :

$$\nu_3 = \frac{3\upsilon}{4L},\ \nu_5 = \frac{5\upsilon}{4L} \text{ વગેરે.}$$

L = 30 cm અને υ = 330 m s^{-1} માટે, એક છેડે બંધ નળી માટે મૂળભૂત આવૃત્તિ 275 Hz મળે છે અને ઉદ્ગમની આવૃત્તિ તેની ચતુર્થ હાર્મોનિક જેટલી છે. આ હાર્મોનિક એ દોલનનો શક્ય મોડ નથી તેથી એક છેડો બંધ કરાય કે તરત કોઈ અનુનાદ જણાતો નથી. ◀

15.7 સ્પંદ (BEATS)

'સ્પંદ' એ તરંગોના વ્યતીકરણથી ઉદ્ભવતી એક રસપ્રદ ઘટના છે. જ્યારે લગભગ નજીકની હોય (પણ સમાન ન હોય) તેવી



***આકૃતિ* 15.15** *ખુલ્લી નળીમાં સ્થિત તરંગો. પ્રથમ ચાર હાર્મોનિક્સ દર્શાવેલ છે.*

આવૃત્તિના બે હાર્મોનિક ધ્વનિતરંગોને એક જ સમયે સાંભળવામાં આવે છે ત્યારે આપણે તેના જેવી (બે નજીકની આવૃત્તિની સરેરાશ) આવૃત્તિનો ધ્વનિ સાંભળીએ છીએ, પણ આ ઉપરાંત આપણને કંઈક બીજું પણ સંભળાય છે. આપણને ધ્વનિની તીવ્રતામાં ધીમે ધીમે વધારો અને ઘટાડો (મહત્તમ અને લઘુતમ) સ્પષ્ટ સંભળાય છે. આ ઘટના (સ્પંદ)ની આવૃત્તિ બે નજીકની આવૃત્તિઓના તફાવત જેટલી હોય છે. કલાકારો આ ઘટનાનો ઉપયોગ ઘણી વાર તેમનાં વાજિંત્રો એકબીજાં સાથે ટ્યૂન (સુમેળ) કરવા માટે કરે છે. તેઓ ત્યાં સુધી ટ્યૂન કરતાં જાય છે કે જ્યાં સુધી તેમના સંવેદી કાનમાં કોઈ સ્પંદ ન સંભળાય.

આ બાબતને ગણિતીય રીતે દૃશ્યમાન કરવા માટે લગભગ સરખી એવી કોણીય આવૃત્તિઓ ω_1 અને ω_2 ધરાવતા બે હાર્મોનિક ધ્વનિતરંગોનો વિચાર કરીએ અને સગવડતા ખાતર $x = 0$ને નિશ્ચિત સ્થાન તરીકે લઈએ. કળાની અનુકૂળ પસંદગી $(\phi = \pi/2)$ કરીને અને કંપવિસ્તાર સમાન લઈને સમીકરણ (15.2) પરથી,

$$s_1 = a \cos \omega_1 t \text{ અને } s_2 = a \cos \omega_2 t \qquad (15.45)$$

આપણે લંબગતને બદલે સંગત સ્થાનાંતરની વાત કરતા હોવાથી સંજ્ઞા yને સ્થાને s લીધેલ છે. ધારો કે આ બંનેમાં ω_1 એ થોડીક મોટી આવૃત્તિ છે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ પરિણામી સ્થાનાંતર,

$s = s_1 + s_2 = a (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$ છે.

cosA + cosB માટેના જાણીતા ત્રિકોણમિતીય સંબંધનો ઉપયોગ કરતાં,

$$s = 2\, a \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \qquad (15.46)$$

મળે છે, જેને $s = [2\, a \cos \omega_b t] \cos \omega_a t$ (15.47) તરીકે લખી શકાય. જો $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$ હોય, તો $\omega_a >> \omega_b$,

જ્યાં, $\omega_b = \dfrac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}$ અને $\omega_a = \dfrac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$

જો આપણે $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1$ ધારી લઈએ તો $\omega_a >> \omega_b$ અને આપણે સમીકરણ (15.47)ને આ રીતે સમજી શકીએ : પરિણામી તરંગ સરેરાશ કોણીય આવૃત્તિ ω_aથી દોલનો કરે છે, પરંતુ તેનો કંપવિસ્તાર સમય સાથે અચળ **નથી,** જે શુદ્ધ હાર્મોનિક તરંગમાં તો અચળ હોય છે. જ્યારે $\cos \omega_b t$ પદ તેની સીમાનાં મૂલ્ય +1 કે –1 પ્રાપ્ત કરે છે ત્યારે કંપવિસ્તાર મહત્તમ હોય છે. બીજા શબ્દોમાં પરિણામી તરંગની તીવ્રતા

સંગીત-સ્તંભો

ઘણાં મંદિરોમાં સંગીતનાં વાજિંત્રો વગાડતાં માનવોને દર્શાવતાં સ્તંભો (Pillars) હોય છે, પરંતુ આ સ્તંભો ભાગ્યે જ પોતે સંગીત ઉત્પન્ન કરે છે. તમિલનાડુમાં નેલીઅપ્પાર મંદિરમાં ખડકના એક જ ટુકડામાંથી કોતરીને (Carved Out) બનાવેલા સ્તંભોના સમૂહ પર હળવા ટકોરા, ભારતીય શાસ્ત્રીય સંગીતના મૂળ સ્વરો – સા, રે, ગ, મ, પ, ધ, નિ, સા–ઉત્પન્ન કરે છે. આ સ્તંભોનાં દોલનો વપરાયેલ ખડકની સ્થિતિસ્થાપકતા, તેની ઘનતા અને આકાર પર આધાર રાખે છે.

સંગીત-સ્તંભો ત્રણ પ્રકારમાં વર્ગીકૃત કરાય છે : પ્રથમ પ્રકારને **શ્રુતિસ્તંભ** કહે છે. કારણ કે તે મૂળ **'સ્વરો'** ઉત્પન્ન કરી શકે છે. બીજા પ્રકારને **ગણ થુંગલ** કહે છે તે મૂળ સ્વરસમૂહો ઉત્પન્ન કરે છે, જેનાથી **'રાગ'** રચાય છે. ત્રીજો પ્રકાર એ **'લય થુંગલ'** સ્તંભો, જે ટકોરા મારતાં **'તાલ'** (સ્પંદ) ઉત્પન્ન કરે છે. નેલીઅપ્પાર મંદિરમાંના સ્તંભો શ્રુતિ અને લય પ્રકારનાં સંયોજન છે.

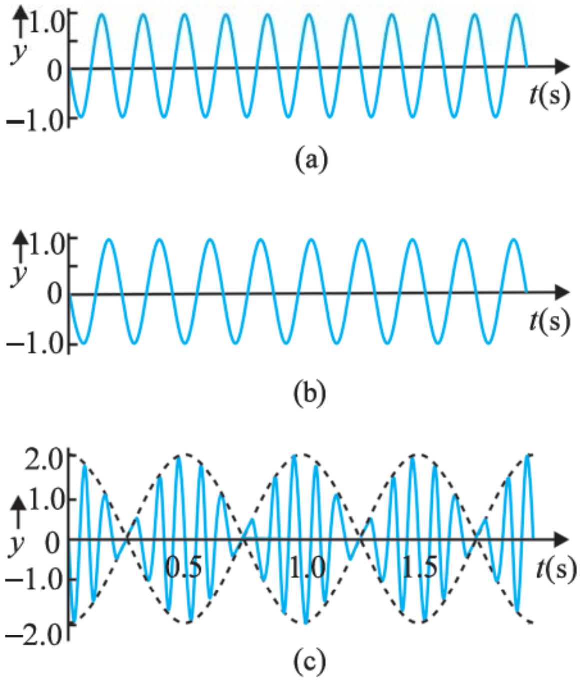
પુરાતત્ત્વવિદો નેલીઅપ્પાર મંદિર 7મી સદીનું હોવાનું અને પાંડિયન વંશના વારસદાર રાજવીઓએ બનાવ્યું હોવાનું જણાવે છે.

નેલીઅપ્પાર અને કન્યાકુમારીના હમ્પી (ચિત્ર) અને તિરુવનંતપુરમ્ જેવા દક્ષિણ ભારતનાં કેટલાંક મંદિરો આપણા દેશની વિશિષ્ટતા છે અને વિશ્વના કોઈ ભાગમાં આવું જણાતું નથી.

$2\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ થી વધે-ઘટે છે. જો કે $\omega = 2\pi\nu$ હોવાથી, સ્પંદની આવૃત્તિ

$$\nu_{beat} = \nu_1 - \nu_2 \text{ પરથી મળે છે.} \qquad (15.48)$$

આકૃતિ 15.16, 11 Hz અને 9 Hz આવૃત્તિવાળા બે હાર્મોનિક તરંગો માટે સ્પંદની ઘટના દર્શાવે છે. પરિણામી તરંગનો કંપવિસ્તાર 2 Hzની આવૃત્તિથી સ્પંદ દર્શાવે છે.



આકૃતિ 15.16 *11 Hz આવૃત્તિના (a) અને 9 Hz આવૃત્તિના (b) બે હાર્મોનિક તરંગોનું સંપાતીકરણ (c)માં દર્શાવ્યા મુજબ 2 Hzની આવૃત્તિનાં સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે.*

> **ઉદાહરણ 15.6** બે સિતારના તાર A અને B સ્વર 'ધ' ઉત્પન્ન કરવા દરમિયાન સહેજ જુદા પડીને 5 Hzની આવૃત્તિના સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. B તારમાં તણાવ સહેજ વધારતાં સ્પંદની આવૃત્તિ ઘટીને 3 Hz થાય છે. જો Aની આવૃત્તિ 427 Hz હોય, તો Bની મૂળ આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

ઉકેલ તારમાં તણાવ વધારતાં તેની આવૃત્તિ વધે છે. જો B તારની મૂળ આવૃત્તિ (ν_B), A તારની આવૃત્તિ (ν_A) કરતાં મોટી હોય, તો ν_Bમાં હજી વધારો થતાં સ્પંદની આવૃત્તિમાં વધારો થાત. પરંતુ સ્પંદની આવૃત્તિ ઘટેલી જણાય છે. આ દર્શાવે છે કે $\nu_B < \nu_A$, $\nu_A - \nu_B = 5$ Hz અને $\nu_A = 427$ Hz હોવાથી $\nu_B = 422$ Hz મળે. ◀

15.8 ડૉપ્લર અસર (DOPPLER EFFECT)

આપણો એ રોજિંદો અનુભવ છે કે ઝડપથી ગતિ કરતી ટ્રેન જ્યારે આપણાથી દૂર જતી હોય ત્યારે તેની સિસોટી (Whistle)નો

> **ખુલ્લી નળીમાં ધ્વનિનું પરાવર્તન**
>
>
>
> ખુલ્લી નળીમાં જ્યારે કોઈ ઉચ્ચ દબાણનું સ્પંદન ગતિ કરીને બીજા છેડે પહોંચે ત્યારે તેનું વેગમાન હવાને બહાર ખુલ્લામાં ઘસડી જાય છે, જ્યાં દબાણ ઝડપથી ઘટીને વાતાવરણના દબાણ જેટલું બની જાય છે. પરિણામે તેની પાછળ આવતી હવા બહાર ધકેલાઈ જાય છે. નળીના છેડેનું ઓછું દબાણ નળીના હજી ઉપરના ભાગમાંની હવાને ખેંચે છે. હવા ખુલ્લા છેડા તરફ ખેંચાય છે તેથી લઘુ-દબાણનો વિસ્તાર ઉપર તરફ જાય છે. પરિણામે નળીમાં નીચે તરફ ગતિ કરતું ઉચ્ચ-દબાણની હવાનું સ્પંદન, ઉપર તરફ ગતિ કરતા લઘુ-દબાણની હવાના સ્પંદનમાં રૂપાંતર પામે છે. આને આપણે એમ કહીએ કે, દબાણ તરંગ ખુલ્લા છેડા પાસેથી 180°ની કળાના ફેરફાર સાથે પરાવર્તન થયું છે. વાંસળી જેવા ખુલ્લી નળીનાં વાજિંત્રોમાં સ્થિત તરંગ આ ઘટનાનું પરિણામ છે.
>
> ઉચ્ચ-દબાણની હવાનું સ્પંદન જ્યારે બંધ છેડે આવે ત્યારે શું થાય છે તેની સાથે આ બાબતની સરખામણી કરો : તે અથડાય છે અને પરિણામે હવાને પાછી વિરુદ્ધ દિશામાં ધકેલે છે. બીજા શબ્દોમાં આને આપણે એમ કહીએ કે દબાણ તરંગકળાના કોઈ ફેરફાર વિના પરાવર્તન થયું છે.

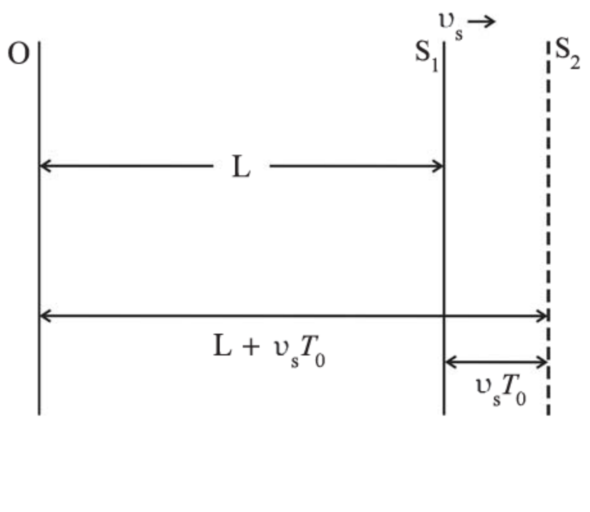
સ્વર (કે આવૃત્તિ) ઘટતો જણાય છે. જ્યારે આપણે કોઈ સ્થિર એવા ધ્વનિઉદ્‌ગમની તરફ બહુ ઝડપથી જઈએ તો સંભળાતા ધ્વનિનો સ્વર (કે આવૃત્તિ) ઉદ્‌ગમના ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં વધુ જણાય છે. જ્યારે સાંભળનાર ઉદ્‌ગમથી દૂર તરફ જાય છે ત્યારે સંભળાતા ધ્વનિનો સ્વર ઉદ્‌ગમના ધ્વનિના સ્વર કરતાં નીચો એટલે કે સંભળાતા ધ્વનિની આવૃત્તિ ઉદ્‌ગમના ધ્વનિની આવૃત્તિ કરતાં ઓછી જણાય છે. ગતિ સાથે સંબંધિત આવૃત્તિનો ફેરફાર થવાની ઘટનાને **ડૉપ્લર અસર** કહે છે. ઑસ્ટ્રિયન ભૌતિકવિજ્ઞાની જૉહ્‌ન ક્રિશ્ચિયન ડૉપ્લર દ્વારા સૌપ્રથમ આ ઘટનાની 1842માં રજૂઆત કરવામાં આવી. 1845માં હૉલેન્ડમાં બાયસ બેલટ (Buys Ballot) દ્વારા તેની પ્રાયોગિક ચકાસણી થઈ હતી. ડૉપ્લર અસર એ તરંગ ઘટના છે, તે માત્ર ધ્વનિતરંગો જ નહિ પણ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગો માટે પણ સત્ય છે. જોકે આપણે અહીં માત્ર ધ્વનિતરંગોનો વિચાર કરીશું.

આપણે આવૃત્તિના ફેરફારનું વિશ્લેષણ ત્રણ પરિસ્થિતિમાં કરીશું : (1) નિરીક્ષક સ્થિર અને ઉદ્‌ગમ ગતિમાં હોય

(2) નિરીક્ષક ગતિમાં હોય અને ઉદ્‌ગમ સ્થિર હોય અને (3) નિરીક્ષક અને ઉદ્‌ગમ બંને ગતિમાં હોય. (1) અને (2)માંની પરિસ્થિતિ એકબીજાથી જુદી પડવાનું કારણ નિરીક્ષક અને માધ્યમની વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ હોવી કે ન હોવી તે છે. મોટા ભાગનાં તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર હોય છે પરંતુ વિદ્યુતચુંબકીય તરંગોને પ્રસરણ માટે માધ્યમની જરૂર નથી. જો કોઈ માધ્યમ હાજર ન હોય તો, ઉદ્‌ગમ ગતિ કરતું હોય કે નિરીક્ષક ગતિ કરતો હોય તે બંનેમાં ડૉપ્લર શિફ્ટ (સ્થાનાંતર, ફેરફાર) એક સમાન હોય છે કારણ કે આ બે પરિસ્થિતિઓ વચ્ચે કોઈ ભેદ નથી.

15.8.1 ગતિમાન ઉદ્‌ગમ, સ્થિર નિરીક્ષક (Source moving; Observer Stationary)

આપણે એક રૂઢિ તરીકે નિરીક્ષકથી ઉદ્‌ગમ તરફની દિશાને ધન દિશા તરીકે લઈશું. એક ધ્વનિ-ઉદ્‌ગમ v_s જેટલા વેગથી ગતિ કરતું હોય અને જે નિર્દેશ ફ્રેમમાં માધ્યમ સ્થિર હોય તે જ નિર્દેશ ફ્રેમમાં નિરીક્ષક પણ સ્થિર હોય તેનો વિચાર કરો. ધારો કે માધ્યમની સાપેક્ષે સ્થિર એવા નિરીક્ષકે માપેલી કોણીય આવૃત્તિ ω અને આવર્તકાળ T_0 ધરાવતા તરંગની ઝડપ υ છે. આપણે એવું ધારી લઈએ કે, નિરીક્ષક પાસે એવું પરખયંત્ર (Detector) છે જે તરંગનું શૃંગ તેની પાસે પહોંચે ત્યારે તેને નોંધે છે. આકૃતિ 15.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, $t = 0$ સમયે ઉદ્‌ગમ, નિરીક્ષકથી L અંતરે આવેલા બિંદુ S_1 પર છે અને એક શૃંગને ઉત્પન્ન કરે છે. આ શૃંગ નિરીક્ષક પાસે $t_1 = L/\upsilon$ સમયે પહોંચે છે. $t = T_0$ સમયે ઉદ્‌ગમ $\upsilon_s T_0$ અંતર કાપીને નિરીક્ષકથી $L + \upsilon_s T_0$ અંતરે આવેલા S_2 બિંદુ પર પહોંચે છે. S_2 બિંદુએ ઉદ્‌ગમ બીજું શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે.



આકૃતિ 15.17 *જ્યારે માધ્યમમાં ઉદ્‌ગમ ગતિ કરતું હોય અને નિરીક્ષક સ્થિર હોય ત્યારે અનુભવાતી ડૉપ્લર અસર (તરંગની આવૃત્તિમાં થતો ફેરફાર)*

આ શૃંગ, નિરીક્ષકને $t_2 = T_0 + \frac{(L + \upsilon_s T_0)}{\upsilon}$ સમયે પહોંચે છે.

આ પ્રમાણે nT_0 સમયે, ઉદ્‌ગમ $(n + 1)$મું શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે અને તે શૃંગ નિરીક્ષકને

$t_{n+1} = nT_0 + \frac{(L + n\,\upsilon_s T_0)}{\upsilon}$ સમયે પહોંચે છે. આથી,

$$\left[nT_0 + \frac{(L + n\,\upsilon_s T_0)}{\upsilon} - \frac{L}{\upsilon}\right]$$

જેટલા સમયગાળામાં નિરીક્ષકના ડિટેક્ટરે n શૃંગ ગણેલા છે અને નિરીક્ષક તરંગનો આવર્તકાળ T

$$T = \left[nT_0 + \frac{(L + n\,\upsilon_s T_0)}{\upsilon} - \frac{L}{\upsilon}\right] / \, n \text{ નોંધે છે.}$$

$$T = T_0 + \frac{\upsilon_s T_0}{\upsilon}$$

$$= T_0 \left(1 + \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right) \qquad (15.49)$$

જ્યારે ઉદ્‌ગમ અને નિરીક્ષક બંને સ્થિર હોય ત્યારે મપાયેલ આવૃત્તિ ν_0 અને જ્યારે ઉદ્‌ગમ ગતિ કરતું હોય ત્યારે મપાયેલ આવૃત્તિ νના પદમાં સમીકરણ (15.49)ને ફરીથી નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right)^{-1} \qquad (15.50)$$

તરંગની ઝડપ υની સરખામણીએ જો υ_sનું મૂલ્ય નાનું હોય, તો υ_s/υના પ્રથમ ક્રમના પદમાં દ્વિપદી વિસ્તરણ લેતાં અને ઊંચી ઘાતનાં પદોને અવગણતાં સમીકરણ (15.50)ને સંનિકટ રીતે આમ લખી શકાય :

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right) \qquad (15.51)$$

જો ઉદ્‌ગમ નિરીક્ષક તરફ જઈ રહ્યું હોય, તો υ_sને સ્થાને $-\upsilon_s$ મૂકતાં,

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right) \qquad (15.52)$$

આમ, જ્યારે ઉદ્‌ગમ નિરીક્ષકથી દૂર જાય છે ત્યારે તે સ્થિર હોય ત્યારે માપેલ આવૃત્તિ કરતાં ઓછી આવૃત્તિ માપે છે. જ્યારે ઉદ્‌ગમ તેની તરફ આવી રહ્યું હોય ત્યારે વધુ આવૃત્તિ માપે છે.

15.8.2 ગતિમાન નિરીક્ષક, સ્થિર ઉદ્‌ગમ (Observer Moving; Source Stationary)

હવે, જ્યારે નિરીક્ષક υ_0 જેટલા વેગથી ઉદ્‌ગમ તરફ ગતિ કરતો હોય અને ઉદ્‌ગમ સ્થિર હોય ત્યારે ડૉપ્લર શિફ્ટ

મેળવવા માટે આપણે જુદી રીતે આગળ વધીશું. આપણે ગતિમાન નિરીક્ષકની નિર્દેશ ફ્રેમમાં કાર્ય કરીશું. આ નિર્દેશ ફ્રેમમાં ઉદ્‌ગમ અને માધ્યમ υ_0 વેગથી તેની નજીક આવી રહ્યાં છે અને તરંગો તો $\upsilon_0 + \upsilon$ વેગથી નજીક આવી રહ્યાં છે. અગાઉના કિસ્સા જેવી પદ્ધતિ અપનાવતાં પ્રથમ અને $(n + 1)$મા શૃંગના આગમન વચ્ચેનો સમયગાળો

$$t_{n+1} - t_1 = nT_0 - \frac{n\upsilon_0 T_0}{\upsilon_0 + \upsilon} \text{ છે.}$$

આમ, નિરીક્ષક દ્વારા મપાયેલ તરંગનો આવર્તકાળ

$$= T_0\left(1 - \frac{\upsilon_0}{\upsilon_0 + \upsilon}\right)$$

$$= T_0\left(1 + \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)^{-1} \text{ મપાય છે.}$$

આ પરથી, $$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right) \qquad (15.53)$$

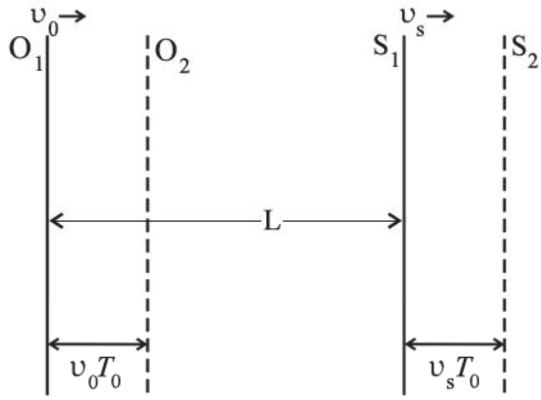
જો $\frac{\upsilon_0}{\upsilon}$ નાનું હોય તો સમાન વેગથી નિરીક્ષક ગતિ કરે કે ઉદ્‌ગમ ગતિ કરે તે બંને કિસ્સામાં ડૉપ્લર શિફ્ટ $(\nu - \nu_0)$નું મૂલ્ય લગભગ સમાન જ મળશે, કેમ કે સમીકરણ (15.53) અને સંનિકટ સંબંધ દર્શાવતા સમીકરણ (15.52)માં $(\nu - \nu_0)$ સમાન થશે.

જો નિરીક્ષક υ_0 વેગથી ઉદ્‌ગમથી દૂર જતો હોય, તો સમીકરણ (15.53)માં υ_0ને સ્થાને $-\upsilon_0$ મૂકતાં,

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right) \text{ મળે છે.}$$

15.8.3 ઉદ્‌ગમ અને નિરીક્ષક બંને ગતિમાં (Both Source and Observer Moving)

હવે આપણે ઉદ્‌ગમ અને નિરીક્ષક બંને ગતિમાં હોય તેવા કિસ્સા માટે વ્યાપક સમીકરણ મેળવીશું. અગાઉની જેમ નિરીક્ષકથી ઉદ્‌ગમ તરફની દિશાને ધન દિશા ગણીશું. આકૃતિ 15.18માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે ઉદ્‌ગમ અને નિરીક્ષક અનુક્રમે υ_s અને υ_0 વેગથી ગતિ કરે છે. ધારો કે $t = 0$ માટે નિરીક્ષક O_1 અને ઉદ્‌ગમ S_1 આગળ છે. ઉદ્‌ગમ તરંગવેગ υ, આવૃત્તિ ν અને આવર્તકાળ T_0 ધરાવતું એક તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે. આ બધાં મૂલ્યો નિરીક્ષક માધ્યમની સાપેક્ષે સ્થિર હોય ત્યારે તેણે માપેલાં મૂલ્યો છે. $t = 0$ સમયે O_1 અને S_1 વચ્ચેનું અંતર L છે અને ત્યારે ઉદ્‌ગમ પ્રથમ શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે. અહીં નિરીક્ષક ગતિમાં હોવાથી; અહીં નિરીક્ષકની સાપેક્ષે તરંગનો વેગ $\upsilon + \upsilon_0$ છે. આથી, પ્રથમ શૃંગ, નિરીક્ષક પાસે $t_1 = L/(\upsilon + \upsilon_0)$ સમયે પહોંચે છે. $t = T_0$ સમયે નિરીક્ષક અને ઉદ્‌ગમ તેમનાં નવાં સ્થાનો અનુક્રમે O_2 અને S_2 આગળ પહોંચે છે. નિરીક્ષક અને ઉદ્‌ગમ વચ્ચેનું નવું અંતર O_2S_2, $L + (\upsilon_s - \upsilon_0)T_0$ જેટલું છે. S_2 આગળ ઉદ્‌ગમ બીજા શૃંગનું ઉત્સર્જન કરે છે.



આકૃતિ **15.18** *ઉદ્‌ગમ અને નિરીક્ષક બંને જુદા વેગથી ગતિ કરતા હોય ત્યારે ડૉપ્લર અસર*

ડૉપ્લર અસરના ઉપયોગ

ગતિમાન પદાર્થ દ્વારા ડૉપ્લર અસરને લીધે આવૃત્તિમાં થતા ફેરફાર વડે તેનો (પદાર્થનો) વેગ માપવા માટે વિવિધ ક્ષેત્રોમાં ઉપયોગ થાય છે. જેવા કે લશ્કરી, તબીબી વિજ્ઞાન, ખગોળીય-ભૌતિકવિજ્ઞાન વગેરે. તે વાહનોની Over-Speed ચકાસવા માટે પણ પોલીસ દ્વારા વપરાય છે.

જ્ઞાત આવૃત્તિનું એક ધ્વનિતરંગ કે વિદ્યુતચુંબકીય તરંગ ગતિમાન પદાર્થ તરફ મોકલવામાં આવે છે. તરંગનો કેટલોક ભાગ પદાર્થ દ્વારા પરાવર્તિત થાય છે અને તેની આવૃત્તિ મોનિટરિંગ સ્ટેશન દ્વારા મપાય છે. આવૃત્તિમાં જણાતા ફેરફારને **ડૉપ્લર શિફ્ટ** કહે છે.

વિમાનીમથક પર વિમાનને માર્ગદર્શન (સૂચના) આપવા માટે અને લશ્કરમાં દુશ્મનના વિમાનની પરખ કરવા માટે તેનો ઉપયોગ થાય છે. ખગોળ-ભૌતિક વેત્તાઓ તેનો ઉપયોગ તારાઓના વેગ માપવા માટે કરે છે.

તબીબો તેનો ઉપયોગ હૃદયના ધબકાર અને શરીરના વિવિધ ભાગોમાં રક્તવહનના અભ્યાસ માટે કરે છે. અહીં તેઓ અલ્ટ્રાસોનિક (પરા શ્રાવ્ય) તરંગો વાપરે છે અને તેને સામાન્ય વ્યવહારમાં **સોનોગ્રાફી** કહે છે. અલ્ટ્રાસોનિક તરંગો વ્યક્તિના શરીરમાં દાખલ થાય છે તેમાંથી કેટલાક પાછા પરાવર્તિત થાય છે અને રક્તની ગતિ અને હૃદયના વાલ્વના ધબકાર તેમજ ગર્ભમાંના બાળકના હૃદયના ધબકાર વગેરેની માહિતી આપે છે. હૃદયના કિસ્સામાં જે ચિત્ર ઉપજાવવામાં આવે છે તેને **ઈકોકાર્ડિયોગ્રામ** કહે છે.

આ બીજું શૃંગ નિરીક્ષકને $t_2 = T_0 + [L + (\upsilon_s - \upsilon_0)T_0]/(\upsilon + \upsilon_0)$ સમયે પહોંચે છે. nT_0 સમયે ઉદ્ગમ $(n + 1)$ મું શૃંગ ઉત્પન્ન કરે છે અને તે નિરીક્ષકને

$t_{n+1} = nT_0 + \dfrac{L + n(\upsilon_s - \upsilon_0)T_0}{\upsilon + \upsilon_0}$ સમયે પહોંચે છે.

આથી નિરીક્ષક n-શૃંગની ગણતરી $t_{n+1} - t_1$ સમય અંતરાલમાં કરે છે જ્યાં

$$t_{n+1} - t_1 = nT_0 + \frac{L + n(\upsilon_s - \upsilon_0)T_0}{\upsilon + \upsilon_0} - \frac{L}{\upsilon + \upsilon_0} \text{ છે.}$$

આથી નિરીક્ષક તરંગનો આવર્તકાળ T નીચે મુજબ માપે છે :

$$T = T_0\left(1 + \frac{\upsilon_s - \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_0}\right) = T_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_s}{\upsilon + \upsilon_0}\right) \qquad (15.54)$$

આથી, નિરીક્ષકને જણાતી આવૃત્તિ

$$\nu = \nu_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_s}\right) \qquad (15.55)$$

એક સીધા ટ્રેક પર ગતિ કરતી ટ્રેનમાં બેસેલા એક મુસાફરનો વિચાર કરો. ધારો કે તે ટ્રેનના ડ્રાયવરે વગાડેલી સીસોટી (વ્હીસલ) સાંભળે છે. તેને કેટલી આવૃત્તિનો ધ્વનિ સંભળાશે ? અત્રે ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક બંને એક જ સરખા વેગથી ગતિ કરી રહ્યા છે, આથી આવૃત્તિમાં કંઈ જ ફેરફાર (Shift) જણાશે નહિ અને મુસાફર તે મૂળ (પ્રાકૃતિક) આવૃત્તિ જ નોંધશે. પણ બહાર રહેલો નિરીક્ષક કે જે ટ્રેકની સાપેક્ષે સ્થિર છે તે, જો ટ્રેન તેની તરફ આવતી હશે તો વધારે આવૃત્તિ અને તેનાથી દૂર જતી હોય તો ઓછી આવૃત્તિ નોંધશે.

બરાબર ધ્યાન રાખો કે આપણે નિરીક્ષકથી ઉદ્ગમ તરફની દિશાને ધન દિશા તરીકે ગણી છે. તેથી જો નિરીક્ષક, ઉદ્ગમ તરફ ગતિ કરતો હોય તો υ_0નું મૂલ્ય ધન(સંખ્યાત્મક) છે, પણ જો ઉદ્ગમથી દૂર જતો હોય તો υ_0નું મૂલ્ય ઋણ છે. બીજી બાજુ જો S, O થી દૂર જતું હોય તો υ_s ધન છે અને જો તે O તરફ જતું હોય તો υ_s ઋણ છે. ઉદ્ગમથી ઉત્પન્ન થયેલો ધ્વનિ બધી દિશાઓમાં પ્રસરે છે. તેમાંનો જે ભાગ નિરીક્ષક તરફ આવે છે તે ભાગને નિરીક્ષક પ્રાપ્ત કરે છે અને પરખે છે (detects). તેથી નિરીક્ષકની સાપેક્ષે ધ્વનિનો વેગ બધા કિસ્સામાં $\upsilon + \upsilon_0$ છે.

▶ ***ઉદાહરણ 15.7*** એક સ્થિર લક્ષ્ય તરફ 200 m s^{-1}ની ઝડપથી એક રૉકેટ ગતિ કરી રહ્યું છે. ગતિ દરમ્યાન તે 1000 Hz આવૃત્તિનો ધ્વનિ તરંગ ઉત્પન્ન કરે છે. લક્ષ્ય પર પહોંચેલા ધ્વનિમાંથી થોડો ભાગ પડઘા તરીકે પાછો રૉકેટ તરફ પરાવર્તિત થાય છે. (1) લક્ષ્ય દ્વારા પરખાયેલ (Detected) ધ્વનિની આવૃત્તિ અને (2) રૉકેટ દ્વારા પરખાયેલ પડઘાની આવૃત્તિ શોધો.

ઉકેલ (1) નિરીક્ષક સ્થિર છે અને ઉદ્ગમ 200 m s^{-1} ની ઝડપથી ગતિ કરે છે. આ ઝડપ ધ્વનિની ઝડપ 330 m s^{-1} સાથે સરખાવી શકાય તેવી હોવાથી આપણે સંનિકટ સમીકરણ (15.51) વાપરવું જોઈએ નહિ પણ સમીકરણ (15.50) વાપરવું જોઈએ. ઉદ્ગમ, સ્થિર લક્ષ્ય તરફ ગતિ કરતું હોવાથી $\upsilon_0 = 0$ અને υ_sને સ્થાને $-\upsilon_s$ મૂકવું જોઈએ. આથી

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\upsilon_s}{\upsilon}\right)^{-1}$$

$$\nu = 1000 \text{ Hz} \times [1 - 200 \text{ m s}^{-1} / 330 \text{ m s}^{-1}]^{-1}$$

$$\simeq 2540 \text{ Hz}$$

(2) લક્ષ્ય હવે ઉદ્ગમ બને છે (કારણ કે તે પડઘાનું ઉદ્ગમ છે) અને રૉકેટનું ડીટેક્ટર હવે નિરીક્ષક કે ડીટેક્ટર છે. આમ, $\upsilon_s = 0$ અને υ_0 ધન મૂલ્ય છે.

ઉદ્ગમ (લક્ષ્ય)માંથી ઉત્સર્જિત ધ્વનિની આવૃત્તિ ν_0 નથી પણ ν છે જે લક્ષ્ય દ્વારા અધવચ્ચે પ્રાપ્ત થાય છે. આથી રૉકેટ દ્વારા નોંધાતી આવૃત્તિ

$$\nu' = \nu\left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon}\right)$$

$$= 2540 \text{ Hz} \times \left(\frac{200 \text{ m s}^{-1} + 330 \text{ m s}^{-1}}{330 \text{ m s}^{-1}}\right)$$

$$\simeq 4080 \text{ Hz}$$ ◀

સારાંશ

1. યાંત્રિક તરંગો દ્રવ્ય માધ્યમમાં અસ્તિત્વ ધરાવી શકે છે અને ન્યૂટનના નિયમોથી સંચાલિત થાય છે.
2. લંબગત તરંગો એવાં તરંગો છે કે જેમાં માધ્યમના કણો તરંગની પ્રસરણ દિશાને લંબ દોલનો કરે છે.
3. સંગત તરંગો એવાં તરંગો છે કે જેમાં માધ્યમના કણો તરંગની પ્રસરણ દિશાને સમાંતર દોલનો કરે છે.
4. પ્રગામી તરંગ એ એવું તરંગ છે કે, જે માધ્યમના એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી ગતિ કરે છે.
5. ધન x-દિશામાં ગતિ કરતા પ્રગામી Sinusoidal (sine આકારનું) તરંગનું સ્થાનાંતર

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi)$$

પરથી મળે છે, જ્યાં a તરંગનો કંપવિસ્તાર છે, k કોણીય તરંગસંખ્યા છે, ω કોણીય આવૃત્તિ છે, $(kx - \omega t + \phi)$ એ કળા છે અને ϕ એ કળા અચળાંક છે.

6. પ્રગામી તરંગની તરંગલંબાઈ λ એ આપેલા સમયે સમાન કળાવાળાં બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર છે. સ્થિત તરંગમાં બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ કે બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેના અંતરનું બમણું (Twice) છે.
7. તરંગના દોલનોના આવર્તકાળ Tને માધ્યમના કોઈ ખંડ (Element)ને એક પૂર્ણ દોલન કરવા માટે લાગતા સમય તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે. તે કોણીય આવૃત્તિ ω સાથે નીચેનાં સમીકરણ વડે સંકળાયેલ છે.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

8. તરંગની આવૃત્તિ νને $1/T$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરાય છે અને કોણીય આવૃત્તિ સાથે તેનો સંબંધ

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ છે.

9. પ્રગામી તરંગની ઝડપ $\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$ પરથી મળે છે.
10. તણાવવાળી દોરીમાં લંબગત તરંગની ઝડપ દોરીના ગુણધર્મો વડે નક્કી થાય છે. તણાવ T અને રેખીય દળ ઘનતા μ ધરાવતી દોરીમાં તેની ઝડપ

$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ છે.

11. ધ્વનિતરંગો એ સંગત યાંત્રિક તરંગો છે જેઓ ઘન, પ્રવાહી કે વાયુમાંથી ગતિ કરી શકે છે.

બલ્ક મોડ્યૂલસ B અને ઘનતા ρ ધરાવતાં તરલમાં ધ્વનિતરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

ધાતુની પટ્ટીમાં સંગત તરંગની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

વાયુઓ માટે $B = \gamma P$ હોવાથી, ધ્વનિની ઝડપ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

12. જ્યારે બે કે વધુ તરંગો એક સાથે એક જ માધ્યમમાં ગતિ કરીને સંપાત થાય ત્યારે, માધ્યમના તે ખંડનું સ્થાનાંતર દરેક તરંગથી થતા સ્થાનાંતરોના બૈજિક સરવાળા જેટલું હોય છે. આને તરંગોના સંપાતીકરણનો સિદ્ધાંત કહે છે.

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x - \upsilon t)$$

13. એક જ દોરી પર બે Sinusoidal તરંગો વ્યતીકરણ દર્શાવે છે. સંપાતપણાના સિદ્ધાંત મુજબ તેઓ ઉમેરાય છે કે નાબૂદ થાય છે. જો તે બે તરંગોને સમાન કંપવિસ્તાર a અને આવૃત્તિ હોય અને એક જ દિશામાં ગતિ કરતા હોય, પણ કળામાં કળા-અચળાંક ϕ જેટલો તફાવત હોય, તો પરિણામ તેટલી જ આવૃત્તિ ω ધરાવતો એક જ તરંગ

$$y(x, t) = \left[2a \cos\frac{1}{2}\phi\right] \sin\left[kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right] \text{ મળે છે.}$$

જો $\phi = 0$ અથવા 2πનો પૂર્ણાંક ગુણાંક હોય તો તરંગો બરાબર કળામાં હોય છે અને વ્યતીકરણ સહાયક પ્રકારનું મળે છે; જો $\phi = \pi$ હોય, તો બરાબર વિરુદ્ધ કળામાં અને વ્યતીકરણ વિનાશક પ્રકારનું મળે છે.

14. પ્રગામી તરંગનું પરાવર્તન દૃઢ સીમા અથવા બંધ છેડેથી થાય છે ત્યારે કળા ઊલટાઈ જાય છે. પરંતુ ખુલ્લા છેડાથી પરાવર્તન થાય તો કળામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી.

આપાત તરંગ

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \text{ માટે}$$

દૃઢ સીમા પરથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = -a \sin(kx + \omega t) \text{ અને}$$

ખુલ્લા છેડેથી પરાવર્તિત તરંગ

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t) \text{ મળે છે.}$$

15. એક સમાન હોય તેવા અને વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતાં બે તરંગોનું વ્યતીકરણ સ્થિત તરંગો ઊપજાવે છે. જડિત છેડાઓ ધરાવતી તણાવવાળી દોરી માટે સ્થિત તરંગ $y(x, t) = (2a \sin kx) \cos \omega t$ વડે અપાય છે.

સ્થિત તરંગોના લક્ષણ તરીકે નિષ્પંદ બિંદુઓ તરીકે ઓળખાતાં શૂન્ય સ્થાનાંતરનાં નિશ્ચિત સ્થાનો અને પ્રસ્પંદ બિંદુઓ તરીકે ઓળખાતા મહત્તમ સ્થાનાંતર ધરાવતાં નિશ્ચિત સ્થાનો છે. બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ કે બે ક્રમિક પ્રસ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\lambda/2$ છે.

બંને છેડે જડિત, L લંબાઈની તણાવવાળી દોરી

$$\nu = n \frac{\upsilon}{2L}, \; n = 1, 2, 3, ...$$

વડે મળતી આવૃત્તિઓથી દોલનો કરે છે. આ સંબંધ પરથી મળતી આવૃત્તિઓનો સમૂહ તંત્રના દોલનનાં નૉર્મલ મોડ્ઝ કહેવાય છે. લઘુતમ આવૃત્તિના દોલન મોડને મૂળભૂત મોડ અથવા પ્રથમ હાર્મોનિક કહે છે. બીજી હાર્મોનિક $n = 2$થી મળે છે અને એ પ્રમાણે આગળ અન્ય હાર્મોનિક મળે છે.

એક છેડે ખુલ્લી અને બીજે છેડે બંધ L લંબાઈની નળીમાંનો હવાનો સ્તંભ

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\upsilon}{2L}, \; n = 0, 1, 2, 3, ...$$

વડે મળતી આવૃત્તિઓથી દોલનો કરે છે. આ સંબંધ દ્વારા મળતી આવૃત્તિઓનો સમૂહ આ તંત્રના દોલનના નૉર્મલ મોડ્ઝ છે. લઘુતમ આવૃત્તિ $\upsilon/4L$ છે અને તે મૂળભૂત મોડ અથવા પ્રથમ હાર્મોનિક છે.

16. બંને છેડે જડિત L લંબાઈની દોરી કે એક છેડે બંધ અને બીજે છેડે ખુલ્લો હવાનો સ્તંભ જે આવૃત્તિઓથી દોલનો કરે છે તેમને તેના નૉર્મલ મોડ્ઝ કહે છે. આમાંની દરેક આવૃત્તિ તંત્રની અનુનાદ આવૃત્તિ છે.

17. એકબીજાથી થોડીક જુદી આવૃત્તિઓ ν_1 અને ν_2, તેમજ સરખાવી શકાય તેવા કંપવિસ્તાર ધરાવતા બે તરંગો જ્યારે સંપાત થાય છે ત્યારે સ્પંદ ઉત્પન્ન થાય છે. સ્પંદની આવૃત્તિ

$$\nu_{beat} = \nu_1 \sim \nu_2$$

18. જ્યારે ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક O બંને માધ્યમની અને એકબીજાની સાપેક્ષે ગતિમાં હોય ત્યારે તરંગની આવૃત્તિમાં ફેરફાર જણાય છે એ ડૉપ્લર અસર છે. ધ્વનિ માટે ઉદ્ગમની આવૃત્તિ ν_0ના પદમાં નિરીક્ષકને જણાયેલી (માપેલી) આવૃત્તિ ν_0 નીચે મુજબ મળે છે :

$$\nu = \nu_0\left(\frac{\upsilon+\upsilon_0}{\upsilon+\upsilon_s}\right)$$

અત્રે υ એ માધ્યમમાંથી ધ્વનિની ઝડપ છે. υ_0 એ માધ્યમની સાપેક્ષે નિરીક્ષકની ઝડપ છે. υ_s એ માધ્યમની સાપેક્ષે ઉદ્ગમની ઝડપ છે. આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં $O \rightarrow S$ દિશામાંના વેગને ધન અને વિરુદ્ધ દિશામાંના વેગને ઋણ લેવાનાં છે.

ભૌતિકરાશિ	પ્રતીક	પરિમાણ	એકમ	નોંધ
તરંગલંબાઈ	λ	[L]	m^1	સમાન કલાવાળાં બે ક્રમિક બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર
પ્રસરણ-અચળાંક	k	$[L^{-1}]$	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
તરંગ-ઝડપ	υ	$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	$\upsilon = \nu\lambda$
સ્પંદ આવૃત્તિ	ν_{beat}	$[T^{-1}]$	s^{-1}	સંપાત થતાં તરંગોની બે નજીકની આવૃત્તિઓનો તફાવત

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. તરંગ એ માધ્યમમાં દ્રવ્યની સમગ્રપણે ગતિ નથી. હવામાં ધ્વનિતરંગ કરતાં પવન જુદો છે. પવનમાં એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ હવાની ગતિ થાય છે. ધ્વનિતરંગમાં હવાના સ્તરોનાં સંઘનન અને વિઘનન થતાં હોય છે.

2. તરંગમાં દ્રવ્ય નહિ પણ ઊર્જા એકથી બીજા બિંદુએ સ્થાનફેર પામે (Transferred) છે.

3. યાંત્રિક તરંગમાં ઊર્જાનું સ્થાનાંતર માધ્યમના પાસપાસેના દોલન કરતા ભાગો વચ્ચે સ્થિતિસ્થાપક બળો મારફતના જોડાણને લીધે થાય છે.

4. લંબગત તરંગો જે માધ્યમને આકાર સ્થિતિસ્થાપક અંક હોય છે તેમાં જ પ્રસરી શકે છે. સંગત તરંગોને પ્રસરણ માટે બલ્ક મૉડ્યૂલસની જરૂર છે તેથી ઘન, પ્રવાહી અને વાયુઓમાં પ્રસરી શકે છે.

5. આપેલ આવૃત્તિના હાર્મોનિક, પ્રગામી તરંગમાં આપેલી ક્ષણે બધા કણોને સમાન કંપવિસ્તાર પણ જુદી જુદી કળાઓ હોય છે. સ્થિત તરંગમાં બે ક્રમિક નિષ્પંદ બિંદુઓ વચ્ચેના બધા કણોની કળા સમાન હોય છે પણ કંપવિસ્તાર જુદા હોય છે.

6. માધ્યમમાં સ્થિર નિરીક્ષકની સાપેક્ષે યાંત્રિક તરંગની તે માધ્યમમાં ઝડપ (υ), માધ્યમના માત્ર સ્થિતિસ્થાપક અને અન્ય ગુણધર્મો (દળ ઘનતા જેવા) પર આધાર રાખે છે. તે ઉદ્ગમના વેગ પર આધારિત નથી.

7. માધ્યમની સાપેક્ષે વેગ υ_0થી ગતિ કરતા નિરીક્ષક માટે તરંગની ઝડપ સ્વાભાવિક રીતે υ કરતાં જુદી પણ $\upsilon \pm \upsilon_0$ જેટલી છે.

સ્વાધ્યાય

15.1 2.5 kg દળની એક દોરી 200 Nના તણાવ હેઠળ છે. તણાવવાળી દોરીની લંબાઈ 20.0 m છે. જો દોરીના એક છેડે એક લંબગત આંચકો (Jerk) આપવામાં આવે, તો તે વિક્ષોભને બીજા છેડે પહોંચતાં કેટલો સમય લાગે ?

15.2 300 m ઊંચા ટાવરની ટોચ પરથી પડવા દીધેલો એક પથ્થર ટાવરના પાયા આગળના જળાશયના પાણીમાં ખાબકે છે. આ ખાબકવાનો અવાજ ટોચ પર ક્યારે સંભળાશે ? હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 $m\ s^{-1}$ આપેલ છે. ($g = 9.8\ m\ s^{-2}$)

15.3 સ્ટીલના એક તારની લંબાઈ 12.0 m અને દળ 2.10 kg છે. તારમાં લંબગત તરંગની ઝડપ સૂકી હવામાં 20 °C તાપમાને ધ્વનિની ઝડપ જેટલી એટલે કે 343 $m\ s^{-1}$ જેટલી બને તે માટે તારમાં તણાવ કેટલો હોવો જોઈએ ?

15.4 $\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ નો ઉપયોગ કરી સમજાવો કે શા માટે હવામાં ધ્વનિની ઝડપ

(a) દબાણ પર આધારિત નથી.

(b) તાપમાન સાથે વધે છે.

(c) આર્દ્રતા (ભેજ-Humidity) સાથે વધે છે.

15.5 તમે એવું શીખ્યાં છો કે એક પરિમાણમાં પ્રગામી તરંગ $y = f(x, t)$ દ્વારા રજૂ કરાય છે, જ્યાં x અને t એ $x - \upsilon t$ કે $x + \upsilon t$ જેવા સંયોજનરૂપે દેખાય છે. એટલે કે $y = f(x \pm \upsilon t)$ શું આથી ઊલટું સત્ય છે ? yનાં નીચેનાં વિધેયો શક્ય રીતે પ્રગામી તરંગને રજૂ કરે છે કે કેમ તે ચકાસો.

(a) $(x - \upsilon t)^2$

(b) $\log [(x + \upsilon t)/x_0]$

(c) $1/(x + \upsilon t)$

15.6 એક ચામાચીડિયું હવામાં 1000 kHz આવૃત્તિનો ધ્વનિ ઉત્પન્ન કરે છે. જો આ ધ્વનિતરંગ એક પાણીની સપાટીને મળતું હોય, તો (a) પરાવર્તિત ધ્વનિની (b) પારગમિત ધ્વનિની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ? ધ્વનિની હવામાં ઝડપ 340 $m\ s^{-1}$ અને પાણીમાં ઝડપ 1486 $m\ s^{-1}$ છે.

15.7 એક હૉસ્પિટલમાં પેશીમાંની ગાંઠ (ગ્રંથિ)નું સ્થાન નક્કી કરવા અલ્ટ્રાસોનિક સ્કેનર વપરાય છે. જો ગાંઠમાં ધ્વનિની ઝડપ 1.7 $km\ s^{-1}$ હોય તેમાં ધ્વનિની તરંગલંબાઈ કેટલી હશે ? સ્કેનરની કાર્યવાહક (Operating) આવૃત્તિ 4.2 MHz છે.

15.8 એક દોરી પર લંબગત હાર્મોનિક તરંગ $y(x, t) = 3.0 \sin (36t + 0.018x + \pi/4)$ વડે રજૂ કરાય છે, જ્યાં x અને y cm માં અને t s માં છે. x ની ધન દિશા ડાબેથી જમણી તરફ છે.

(a) આ પ્રગામી તરંગ છે કે સ્થિત તરંગ છે ? જો તે પ્રગામી હોય, તો ઝડપ કેટલી અને પ્રસરણની દિશા કઈ છે ?

(b) તેના કંપવિસ્તાર અને આવૃત્તિ કેટલા છે ?

(c) ઉદ્‌ગમ પાસે મૂળ (પ્રારંભિક) કળા કેટલી છે ?

(d) તરંગમાં બે ક્રમિક શૃંગ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર કેટલું છે ?

15.9 સ્વાધ્યાય 15.8માં રજૂ કરેલ તરંગ માટે $x = 0$, 2 અને 4 cm માટે સ્થાનાંતર (y) વિરુદ્ધ (t)ના આલેખ દોરો. આ આલેખોના આકાર કેવા છે ? પ્રગામી તરંગમાં દોલન ગતિ એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ કઈ બાબતોમાં જુદી પડે છે : કંપવિસ્તાર, આવૃત્તિ કે કળા ?

15.10 પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગ માટે

$y(x, t) = 2.0 \cos 2\pi(10t - 0.0080\ x + 0.35)$ છે.

જ્યાં, x અને y cmમાં અને t sમાં છે. જે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\frac{\lambda}{2}$

(d) $\frac{3\lambda}{4}$ હોય, તેમને માટે દોલન ગતિનો કળા-તફાવત શોધો.

15.11 એક દોરી (બંને છેડે જડિત)નું લંબગત સ્થાનાંતર

$y(x, t) = 0.06 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \cos (120\ \pi t)$

પરથી મળે છે, જ્યાં x અને y mમાં અને t sમાં છે. દોરીની લંબાઈ 1.5 m અને દળ 3.0×10^{-2} kg છે.

નીચેના ઉત્તર આપો :

(a) આ વિધેય પ્રગામી તરંગ કે સ્થિત તરંગ રજૂ કરે છે ?

(b) આ તરંગનું વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરતા બે તરંગોના સંપાતપણા તરીકે અર્થઘટન કરો. દરેક તરંગની તરંગલંબાઈ, આવૃત્તિ અને ઝડપ કેટલા હશે ?

(c) દોરીમાંનો તણાવ શોધો.

15.12 (i) સ્વાધ્યાય 15.11માં જણાવેલ દોરી પરના તરંગ માટે દોરી પરનાં બધાં બિંદુઓ એક સમાન (a) આવૃત્તિ (b) કળા (c) કંપવિસ્તારથી દોલનો કરે છે ? તમારા ઉત્તરો સમજાવો. (ii) એક છેડેથી 0.375 m દૂર આવેલા બિંદુએ કંપવિસ્તાર કેટલો હશે ?

15.13 એક સ્થિતિસ્થાપક તરંગનું સ્થાનાંતર (લંબગત કે સંગત) દર્શાવવા માટે x અને t માં કેટલાંક વિધેયો નીચે આપેલાં છે. આમાંથી કયું વિધેય (i) પ્રગામી તરંગ (ii) સ્થિત તરંગ (iii) એકેય તરંગ નહિ, રજૂ કરે છે ?

(a) $y = 2 \cos (3x) \sin (10t)$

(b) $y = 2\sqrt{x - \upsilon t}$

(c) $y = 3 \sin (5x - 0.5t) + 4 \cos (5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

15.14 બે દૃઢ આધાર વચ્ચે તણાવવાળી એક દોરી 45 Hz આવૃત્તિ સાથે તેના મૂળભૂત મોડમાં દોલનો કરે છે. દોરીનું દળ 3.5×10^{-2} kg અને તેની રેખીય દળ ઘનતા 4.0×10^{-2} kg m^{-1} છે. (i) દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ કેટલી હશે ? (ii) દોરીમાં તણાવ કેટલો હશે ?

15.15 એક મીટર લાંબી એકે છેડે ખુલ્લી અને બીજે છેડે ખસી શકે તેવો પિસ્ટન ધરાવતી એક નળી અચળ આવૃત્તિના ઉદ્‌ગમ (340 Hz આવૃત્તિનો સ્વરકાંટો) સાથે નળીની લંબાઈ 25.5 cm અને 79.3 cm હોય ત્યારે અનુનાદ દર્શાવે છે. પ્રયોગના તાપમાને હવામાંથી ધ્વનિની ઝડપનો અંદાજ મેળવો. છેડા પરની અસરો અવગણ્ય છે.

15.16 100 cm લંબાઈનો સ્ટીલનો એક સળિયો તેના મધ્યમાંથી જકડેલો (Clamped) છે. સળિયાનાં સંગત દોલનોની મૂળભૂત આવૃત્તિ 2.53 kHz આપેલ છે. સ્ટીલમાં ધ્વનિની ઝડપ કેટલી હશે ?

15.17 20 cm લાંબી નળી એક છેડે બંધ છે. 430 Hzના ઉદ્‌ગમ વડે નળીનો કયો હાર્મોનિક મોડ અનુનાદમાં ઉત્તેજિત થાય છે ? જો બંને છેડા ખુલ્લા હોય, તો તે જ ઉદ્‌ગમ નળી સાથે અનુનાદમાં હશે ? (હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m s^{-1} છે.)

15.18 સિતારના બે તાર A અને B સ્વર 'ગા' ઉત્પન્ન કરવામાં થોડી સુમેળ ક્ષતિ (Out of Tune)ને લીધે 6 Hz આવૃત્તિનાં સ્પંદ ઉત્પન્ન કરે છે. A તારમાં તણાવ સહેજ ઘટાડતાં સ્પંદની આવૃત્તિ ઘટીને 3 Hz થાય છે. જો Aની મૂળ આવૃત્તિ 324 Hz હોય, તો Bની આવૃત્તિ કેટલી હશે ?

15.19 સમજાવો શા માટે (અથવા કેવી રીતે) :

(a) ધ્વનિતરંગમાં સ્થાનાંતરનું નિષ્પંદ બિંદુ એ દબાણનું પ્રસ્પંદ બિંદુ છે.

(b) ચામાચીડિયા કોઈ 'આંખ' વિના અંતરાયોનાં અંતરો, દિશાઓ, પ્રકાર અને પરિમાણો જાણી શકે છે.

(c) વાયોલિનના સૂર અને સિતારના સૂરની એક સમાન આવૃત્તિ હોઈ શકે છે, તેમ છતાં આપણે તે બે સૂર વચ્ચેનો ભેદ પારખી શકીએ છીએ.

15.20 રેલવે સ્ટેશનના પ્લૅટફૉર્મની બહારના સિગ્નલ આગળ સ્થિર ઊભેલી એક ટ્રેન સ્થિર હવામાં 400 Hz આવૃત્તિની સિસોટી (Whistle) વગાડે છે. પ્લૅટફૉર્મ પરના નિરીક્ષકને સિસોટીની આવૃત્તિ કેટલી જણાશે; જ્યારે (a) ટ્રેન પ્લૅટફૉર્મ તરફ 10 m s^{-1}ની ઝડપથી આવતી હોય (b) ટ્રેન પ્લૅટફૉર્મથી દૂર 10 m s^{-1}ની ઝડપથી જતી હોય ? સ્થિર હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m s^{-1} લો.

15.21 એક સ્ટેશન-યાર્ડમાં ઊભેલી ટ્રેન હવામાં 400 Hz આવૃત્તિની સિસોટી વગાડે છે. યાર્ડથી સ્ટેશન તરફ પવન 10 m s^{-1}ની ઝડપથી ફૂંકાવાનું શરૂ થાય છે. સ્ટેશનના પ્લૅટફૉર્મ પર ઊભેલા નિરીક્ષકને સંભળાતા ધ્વનિની આવૃત્તિ, તરંગલંબાઈ અને વેગ કેટલા હશે ? શું આ પરિસ્થિતિ હવા સ્થિર હોય અને નિરીક્ષક 10 m s^{-1}ની ઝડપથી યાર્ડ તરફ દોડતો હોય તે કિસ્સાના જેવી જ છે ? સ્થિર હવામાં ધ્વનિની ઝડપ 340 m s^{-1} લો.

વધારાના સ્વાધ્યાય

15.22 દોરી પરના એક પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગને $y(x, t) = 7.5 \sin (0.0050x + 12t + \pi/4)$ cm વડે રજૂ કરાય છે.

(a) $x = 1$ cm આગળના બિંદુને $t = 1$ s સમયે દોલનના સ્થાનાંતર અને વેગ કેટલા હશે ? આ વેગ તરંગના પ્રસરણના વેગ જેટલો છે ?

(b) $x = 1$ cm બિંદુના $t = 1$ s, 5 s અને 11 s સમયોના લંબગત સ્થાનાંતર જેટલાં જ સ્થાનાંતર ધરાવતા દોરી પરનાં બિંદુઓનાં સ્થાન શોધો.

15.23 એક નાનું ધ્વનિ-સ્પંદન (દાખલા તરીકે સિસોટીનો એક ક્ષણિક અવાજ) એક માધ્યમમાં મોકલવામાં આવે છે.

(a) શું સ્પંદનને નિશ્ચિત (i) આવૃત્તિ (ii) તરંગલંબાઈ (iii) પ્રસરણની ઝડપ છે ?

(b) જો સ્પંદન ઉત્પન્ન થવાનો દર, દર 20 મિનિટ પછી 1નો હોય તો (એટલે કે સિસોટી દર 20 s બાદ સેકન્ડના ખૂબ નાના ભાગ માટે વગાડાય છે.) શું સિસોટી વડે ઉત્પન્ન થતા સ્વરની આવૃત્તિ 1/20 અથવા 0.05 Hz છે ?

(c) વિભાજન કરતા માધ્યમમાં પ્રસરણ દરમિયાન સ્પંદન (પલ્સ)નો આકાર વિકૃત થાય છે.

(d) ઘન પદાર્થો સંગત અને લંબગત એ બંનેને વહન કરવા દે છે પણ વાયુમાં માત્ર સંગત તરંગો જ પ્રસરણ પામે છે.

15.24 રેખીય દળ ઘનતા 8.0×10^{-3} kg m^{-1} હોય તેવી એક લાંબી દોરીનો એક છેડો 256 Hzની આવૃત્તિના એ વિદ્યુત-ચાલિત સ્વરકાંટા સાથે જોડેલ છે. બીજો છેડો એક ગરગડી પરથી પસાર થઈ 90 kg દળ ધરાવતા એક પલ્લા સાથે બાંધેલ છે. ગરગડી આગળનું દોરીનું બિંદુ ત્યાં આવતી બધી ઊર્જાને શોષી લે છે તેથી ત્યાં પરાવર્તિત તરંગનો કંપવિસ્તાર અવગણ્ય છે. $t = 0$ સમયે દોરીના ડાબા છેડા (સ્વરકાંટા બાજુનો છેડો) $x = 0$નું લંબગત સ્થાનાંતર ($y = 0$) શૂન્ય છે અને તે ધન y-દિશામાં ગતિ કરે છે. તરંગનો કંપવિસ્તાર 5.0 cm છે. દોરીમાં તરંગને રજૂ કરતા લંબગત સ્થાનાંતર yને x અને tના વિધેય તરીકે લખો.

15.25 એક સબમરીનમાં રાખેલી સોનાર (SONAR) પદ્ધતિ 40.0 kHz પર કાર્યાન્વિત થાય છે. એક દુશ્મન સબમરીન SONAR તરફ 360 km h^{-1}ની ઝડપથી ગતિ કરી રહી છે. બીજી સબમરીનથી પરાવર્તિત થતા ધ્વનિતરંગની આવૃત્તિ કેટલી હશે ? પાણીમાં ધ્વનિની ઝડપ 1450 m s^{-1} લો.

15.26 ભૂકંપ પૃથ્વીની અંદરના ભાગમાં ધ્વનિતરંગો ઉત્પન્ન કરે છે. વાયુ કરતાં જુદી બાબત એ છે કે, પૃથ્વી લંબગત (S) અને સંગત (P) બંને તરંગો અનુભવે છે. S તરંગની લાક્ષણિક ઝડપ 4 km s^{-1} અને P તરંગની ઝડપ 8 km s^{-1} છે. સિસ્મોગ્રાફ ભૂકંપથી આવતા S અને P તરંગોને નોંધે છે. એક ભૂકંપમાં પ્રથમ P તરંગ, પ્રથમ S તરંગ કરતાં 4 min વહેલું આવી પહોંચે છે. તરંગો સુરેખામાં ગતિ કરતા ધારી લઈને ભૂકંપ કેટલા અંતરે થયો તે શોધો.

15.27 એક ગુફામાં ચામાચીડિયું અલ્ટ્રાસોનિક સ્પંદનો દ્વારા દિશાઓની જાણકારી મેળવતાં હળવેથી અને ઝડપથી પસાર થાય છે. ચામાચીડિયા દ્વારા ઉત્સર્જિત ધ્વનિની આવૃત્તિ 40 kHz ધારો. એક સપાટ દીવાલની સપાટી તરફની એક ત્વરિત તરાપમાં ચામાચીડિયું હવામાં ધ્વનિની ઝડપના 0.03 ગણી ઝડપે ગતિ કરે છે. દીવાલ પરથી પરાવર્તન થઈને કેટલી આવૃત્તિ ચામાચીડિયાને સંભળાશે ?

જવાબો (ANSWERS)

પ્રકરણ 9

9.1 1.8

9.2 (a) આપેલા આલેખ પરથી 150×10^6 N m^{-2}ના પ્રતિબળ માટે વિકૃતિ 0.002 છે.

(b) દ્રવ્યની આધીન પ્રબળતા લગભગ 3×10^8 N m^{-2} છે.

9.3 (a) દ્રવ્ય A

(b) દ્રવ્યની મજબૂતી તેનામાં ફ્રેક્ચર થવા માટે જરૂરી પ્રતિબળના માપ પરથી નક્કી કરાય છે : દ્રવ્ય A દ્રવ્ય B કરતાં વધુ મજબૂત છે.

9.4 (a) ખોટું (b) સાચું

9.5 1.5×10^{-4} m (સ્ટીલ); 1.3×10^{-4} m (બ્રાસ)

9.6 આવર્તન = 4×10^{-7} m

9.7 2.8×10^{-6}

9.8 0.127×10^{-2}

9.9 7.07×10^4 N

9.10 $D_{copper}/D_{iron} = 1.25$

9.11 1.539×10^{-4} m

9.12 2.026×10^9 Pa

9.13 1.034×10^3 kg/m^3

9.14 2.74×10^{-5}

9.15 0.05 cm^3

9.16 2.2×10^6 N/m^2

9.17 એરણની અણી પરનું દબાણ 2.5×10^{11} Pa છે.

9.18 (a) 0.7 m (b) સ્ટીલના તારથી 0.43 m

9.19 લગભગ 0.01 m

9.20 260 kN

9.21 2.2×10^{-4} m^3

પ્રકરણ 10

10.3 (a) ઘટે છે. (b) તાપમાન સાથે વાયુઓનો η વધે છે, પ્રવાહીઓનો η ઘટે છે. (c) આકાર વિકૃતિ, આકાર વિકૃતિના દર (d) દળ-સંરક્ષણ, બર્નુલીનું સમીકરણ (e) મોટી

10.5 6.2×10^6 Pa

10.6 10.5 m

10.7 દરિયામાં તે ઊંડાઈએ દબાણ લગભગ 3×10^7 Pa છે. બંધારણ યોગ્ય છે, કારણ કે તે ઘણા વધારે દબાણ કે પ્રતિબળને સહન કરી શકે છે.

10.8 6.92×10^5 Pa

10.9 0.800

10.10 સ્પિરિટ ધરાવતા ભુજમાં પારો ઉપર ચઢશે. પારાની સપાટીઓનો તફાવત 0.221 cm થશે.

10.11 ના, બર્નુલીનો સિદ્ધાંત ફક્ત ધારારેખી વહનને જ લાગુ પડે છે.

10.12 ના, સિવાય કે જ્યાં બર્નુલીનું સમીકરણ લાગુ પાડેલ છે તે બે બિંદુઓએ વાતાવરણનાં દબાણ નોંધપાત્ર પ્રમાણમાં જુદાં હોય.

10.13 9.8×10^2 Pa

10.14 1.5×10^3 N

10.15 આકૃતિ (a) ખોટી છે. [કારણ : સાંકડા ભાગ આગળ (એટલે કે, જ્યાં ટ્યૂબના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ નાનું છે), વહનની ઝડપ દળ સંરક્ષણને લીધે વધારે મોટી હોય છે. પરિણામે ત્યાં બર્નુલીના સમીકરણ મુજબ દબાણ ઓછું હોય છે. આપણે તરલને અદબનીય ધારેલ છે.]

10.16 0.64 m s^{-1}

10.17 2.5×10^{-2} N m^{-1}

10.18 (b) અને (c) માટે 4.5×10^{-2} N, (a)માં છે તે જ.

10.19 વધારાનું દબાણ = 310 Pa, કુલ દબાણ = 1.0131×10^5 Pa. આમ છતાં, આપેલ વિગતો ત્રણ સાર્થક અંક સુધી સત્ય છે તેથી આપણે બુંદની અંદરનું દબાણ 1.01×10^5 Pa તરીકે લખવું જોઈએ.

10.20 સાબુના પરપોટાની અંદરનું વધારાનું દબાણ = 20.0 Pa; સાબુના દ્રાવણની અંદરના હવાના પરપોટાની અંદરનું વધારાનું દબાણ = 10.0 Pa. હવાના પરપોટા માટે બહારનું દબાણ = $1.01 \times 10^5 + 0.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 1.2 = 1.06 \times 10^5$ Pa. વધારાનું દબાણ એટલું નાનું છે કે ત્રણ સાર્થક અંકો સુધી પરપોટાની અંદરનું કુલ દબાણ 1.06×10^5 Pa છે.

10.21 55 N (નોંધો કે પાયાનું ક્ષેત્રફળ જવાબ પર અસર કરતું નથી.)

10.22 (a) (a) માટે નિરપેક્ષ દબાણ = 96 cm of Hg; અને ગેજ દબાણ = 20 cm of Hg, (b) માટે નિરપેક્ષ દબાણ = 58 cm of Hg અને ગેજ દબાણ = –18 cm of Hg; (b) ડાબા ભુજમાં પારો એટલો ઊંચે ચઢશે કે જેથી બે ભુજમાં સપાટીઓનો તફાવત 19 cm થાય.

10.23 બે સમાન પાયાનાં ક્ષેત્રફળો પર દબાણ (અને તેથી બળ) સમાન છે. પરંતુ પાણી વડે પાત્રની બાજુઓ પર બળ લાગે છે. પાત્રની બાજુઓ પાયાને બરાબર લંબ ન હોય ત્યારે આ બળને ઊર્ધ્વદિશામાં ઘટક છે. પાણી વડે પાત્રની બાજુઓ પર લાગતા બળનો આ ઊર્ધ્વ ઘટક, પ્રથમ પાત્ર માટે બીજા પાત્ર કરતાં વધુ છે. આથી બે કિસ્સાઓમાં પાયા પર લાગતાં બળ સમાન હોય ત્યારે પણ પાત્રોનાં વજન જુદાં હોય છે.

10.24 0.2 m

10.25 (a) દબાણનો ઘટાડો વધારે મોટો છે. (b) વહનના વધતા વેગ સાથે વધારે અગત્યનું.

10.26 (a) 0.98 m s^{-1} (b) 1.24×10^{-5} m^3 s^{-1}

10.27 4393 kg

10.28 5.8 cm s^{-1}, 3.9×10^{-10} N

10.29 5.34 mm

10.30 પ્રથમ છિદ્ર માટે, (અંતર્ગોળ અને બહિર્ગોળ બાજુઓ વચ્ચે) દબાણ તફાવત = $2 \times 7.3 \times 10^{-2} / 3 \times 10^{-3}$ = 48.7 Pa. આ રીતે બીજા છિદ્ર માટે, દબાણ-તફાવત = 97.3 Pa. પરિણામે બે છિદ્રોમાં સપાટીનો તફાવત $[48.7 / (10^3 \times 9.8)]$ m = 5.0 mm

સાંકડા છિદ્રમાં સપાટી વધુ ઊંચી છે (નોંધો કે શૂન્ય સંપર્કકોણ માટે, મેનિસ્કસની ત્રિજ્યા છિદ્રની ત્રિજ્યા જેટલી છે. બંને છિદ્રમાં સપાટીની અંતર્ગોળ બાજુએ દબાણ 1 atm છે).

10.31 (b) 8 km જો આપણે ઊંચાઈ સાથે g ના ફેરફારને ધ્યાનમાં લઈએ, તો ઊંચાઈ થોડી વધુ છે, લગભગ 8.2 km.

પ્રકરણ 11

11.1 નિયોન : – 248.58 °C = – 415.44 °F;

CO_2: – 56.60 °C = – 69.88 °F

($t_F = \frac{9}{5}t_c + 32$નો ઉપયોગ કરો.)

11.2 $T_A = (4/7)\ T_B$

11.3 384.8 K

11.4 (a) ટ્રિપલ-બિંદુને વિશિષ્ટ તાપમાન છે; ઠારણબિંદુ તાપમાન અને ઉત્કલનબિંદુ તાપમાન દબાણ પર આધાર રાખે છે. (b) બીજું નિશ્ચિત બિંદુ નિરપેક્ષ શૂન્ય પોતે જ છે; (c) ટ્રિપલ બિંદુ 0.01 °C છે 0 °C નહિ; (d) 491.69

11.5 (a) T_A = 392.69 K, T_B = 391.98 K; (b) વિસંગતિ ઉદ્ભવે છે કારણ કે વાયુઓ પૂરા આદર્શ હોતા નથી.

વિસંગતિ ઓછી કરવા માટે અવલોકનો નીચાં ને નીચાં દબાણે લેવાં જોઈએ અને માપેલા તાપમાન વિરુદ્ધ વાયુના ટ્રિપલ બિંદુએ નિરપેક્ષ દબાણના આલેખનું બહિર્વેશન (extra polated) કરીને દબાણ શૂન્ય તરફ ગતિ કરે તે લક્ષમાં તાપમાન મેળવવું જોઈએ. આ સંજોગમાં વાયુઓ આદર્શ વાયુ વર્તણૂક તરફ જાય છે.

11.6 45.0 °C તાપમાને સળિયાની ખરેખરી લંબાઈ = (63.0 + 0.0136) cm = 63.0136 cm. (જોકે આપણે ત્રણ સાર્થક અંક સુધી લંબાઈમાં ફેરફાર 0.0136 cm છે એમ કહેવું જોઈએ, પણ કુલ લંબાઈ ત્રણ સાર્થક સ્થાનો સુધી 63.0 cm છે. આ જ સળિયાની 27.0 °C તાપમાને લંબાઈ = 63.0 cm છે.

11.7 જ્યારે શાફ્ટને – 69 °C તાપમાન સુધી ઠંડી કરવામાં આવે ત્યારે પૈડું શાફ્ટ પર સરકી શકશે.

11.8 વ્યાસ 1.44×10^{-2} cm વધે છે.

11.9 3.8×10^{2} N

11.10 સંયુક્ત સળિયાના છેડાઓને જડિત કરેલા નથી, તેથી દરેક સળિયો મુક્ત રીતે વિસ્તાર પામે છે.

$\Delta l_{\text{બ્રાસ}}$ = 0.21 cm, $\Delta l_{\text{સ્ટીલ}}$ = 0.126 cm = 0.13 cm

લંબાઈમાં કુલ ફેરફાર = 0.34 cm. જંક્શન આગળ કોઈ 'ઉષ્મીય પ્રતિબળ' ઉત્પન્ન થયું નથી કારણ કે સળિયાઓ મુક્ત રીતે વિસ્તાર પામે છે.

11.11 0.0147 = 1.5×10^{-2}

11.12 103 °C

11.13 1.5 kg

11.14 0.43 J g^{-1} K^{-1} ; નાનો

11.15 વાયુઓ દ્વિ-પરમાણ્વિક છે અને તેમને સ્થાનાંતર મુક્તતાના અંશો ઉપરાંત અન્ય મુક્તતાના અંશ (એટલે કે ગતિના બીજા મોડ્સ) શક્ય છે. વાયુનું તાપમાન અમુક પ્રમાણમાં વધારવા માટે દરેક મોડ્સની સરેરાશ ઊર્જા વધારવા માટે ઉષ્મા આપવી પડે. પરિણામે દ્વિ-પરમાણ્વિક વાયુઓની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા એક-પરમાણ્વિક વાયુ કરતાં વધારે હોય છે. એવું દર્શાવી શકાય છે કે જો માત્ર ગતિના ચક્રીય મોડ્સને ધ્યાનમાં લેવામાં આવે તો દ્વિ-પરમાણ્વિક વાયુની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા લગભગ (5/2) R છે, જે કોષ્ટકમાંની યાદીમાં ક્લોરિન સિવાયના બધા વાયુઓ માટેનાં અવલોકનો સાથે સંમત છે. ક્લોરિનની મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્માનું ઊંચું મૂલ્ય એમ દર્શાવે છે કે ચક્રીય મોડ્સ ઉપરાંત દોલન મોડ્સ પણ ઓરડાના તાપમાને ક્લોરિનમાં હાજર હોય છે.

11.16 4.3 g/min

11.17 3.7 kg

11.18 238 °C

11.20 9 min

11.21 (a) ટ્રિપલ બિંદુએ તાપમાન = – 56.6 °C અને દબાણ = 5.11 atm

(b) જો દબાણ ઘટે તો CO_2નાં ઉત્કલનબિંદુ અને ઠારણબિંદુ બંને ઘટે છે.

(c) CO_2નાં ક્રાંતિ તાપમાન અને દબાણ અનુક્રમે 31.1 °C અને 73.0 atm છે. આ તાપમાનથી ઊંચા તાપમાને, ખૂબ ઊંચુ દબાણ લગાડવા છતાં CO_2નું પ્રવાહીકરણ થશે નહિ.

(d) (a) બાષ્પ (b) ઘન (c) પ્રવાહી

11.22 (a) ના, બાષ્પ સીધી ઘનમાં ઠારણ પામે છે.

(b) પ્રવાહી સ્વરૂપમાંથી પસાર થયા વિના તે સીધી ઘન સ્વરૂપમાં ઠારણ પામે છે.

(c) તે પ્રવાહીસ્થિતિમાં અને પછી બાષ્પસ્થિતિમાં રૂપાંતરિત થાય છે. જ્યાં $P - T$ ડાયાગ્રામ પર 10 atmના અચળ

દબાણની સમક્ષિતિજ રેખા ઠારણ વક્ર અને બાષ્પીકરણ વક્રને છેદે છે તે બિંદુઓ ઠારણ અને ઉત્કલન બિંદુઓ છે.

(d) તે કોઈ સ્પષ્ટ રૂપાંતર પ્રવાહીમાં થવાનું દર્શાવશે નહિ, પરંતુ જેમ તેનું દબાણ વધે તેમ આદર્શ વાયુ વર્તણૂકથી વધુ ને વધુ અલગ પડશે.

પ્રકરણ 12

12.1 16 g પ્રતિ મિનિટ

12.2 934 J

12.4 2.64

12.5 16.9 J

12.6 (a) 0.5 atm (b) શૂન્ય (c) શૂન્ય (વાયુને આદર્શ ગણતાં) (d)ના, કારણ કે પ્રક્રિયા (મુક્ત વિસ્તરણ તરીકે ઓળખાતી) ઝડપી છે અને નિયંત્રિત કરી શકાતી નથી. વચગાળાની અવસ્થાઓ અસમતુલિત અવસ્થાઓ છે અને વાયુ-સમીકરણનું પાલન કરતી નથી. સમય જતાં, વાયુ સંતુલિત અવસ્થામાં પાછો ફરે છે.

12.7 15 %, 3.1×10^9 J

12.8 25 W

12.9 450 J

12.10 10.4

પ્રકરણ 13

13.1 4×10^{-4}

13.3 (a) ત્રુટક આલેખ 'આદર્શ' વાયુ વર્તણૂકને અનુરૂપ છે. (b) $T_1 > T_2$; (c) 0.26 J K^{-1}

(d) ના, 6.3×10^{-5} kg H_2 તે જ મૂલ્ય આપશે.

13.4 0.14 kg

13.5 5.3×10^{-6} m^3

13.6 6.10×10^{26}

13.7 (a) 6.2×10^{-21} J (b) 1.24×10^{-19} J (c) 2.1×10^{-16} J

13.8 હા, ઍવોગેડ્રોના નિયમ મુજબ. ના, v_{rms} ત્રણેય વાયુઓમાંથી સૌથી હલકા વાયુ નિયૉન માટે મહત્તમ છે.

13.9 2.52×10^3 K

13.10 સરેરાશ મુક્ત પથનું સૂત્ર :

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}$$

વાપરો, જ્યાં d અણુનો વ્યાસ છે. આપેલા દબાણ અને તાપમાન માટે $N/V = 5.10 \times 10^{25}\ m^{-3}$ અને $\bar{l} = 1.0 \times 10^{-7}$ m. $\upsilon_{rms} = 5.1 \times 10^2\ m\ s^{-1}$.

સંઘાત આવૃત્તિ = $\frac{\upsilon_{rms}}{\bar{l}} = 5.1 \times 10^9\ s^{-1}$. સંઘાત માટે લાગતો સમય = $d / \upsilon_{rms} = 4 \times 10^{-13}$ s. ક્રમિક સંઘાતો વચ્ચે લાગતો સમય = $l / \upsilon_{rms} = 2 \times 10^{-10}$ s. આમ, બે ક્રમિક સંઘાતો વચ્ચે લાગતો સમય સંઘાત માટેના સમય કરતાં 500 ગણો છે. આમ, વાયુમાં અણુ મહદંશે મુક્ત રીતે ગતિ કરે છે.

13.11 લગભગ 24 cm નો પારો બહાર વહન પામે છે અને બાકીના 52 cm પારાનો સ્તંભ વત્તા તેની ઉપરની 48 cm હવાનો સ્તંભ, બહારના વાતાવરણના દબાણ સાથે સંતુલનમાં રહે છે. (તાપમાનમાં ફેરફાર થતો નથી એમ આપણે ધારી લઈએ છીએ.)

13.12 ઑક્સિજન

13.14 કાર્બન [1.29 Å]; સોનું (ગોલ્ડ) [1.59 Å]; પ્રવાહી નાઇટ્રોજન [1.77 Å]; લિથિયમ [1.73 Å]; પ્રવાહી ફ્લોરિન [1.88 Å]

પ્રકરણ 14

14.1 (b), (c)

14.2 (b) અને (c): SHM; (a) અને (d) આવર્તગતિ રજૂ કરે છે પણ SHM નહિ [બહુપરમાણુક અણુને સંખ્યાબંધ પ્રાકૃતિક આવૃત્તિઓ હોય છે, તેથી સામાન્યતઃ તેનું દોલન ઘણી જુદી જુદી આવૃત્તિઓનું સંપાતીકરણ છે. આવું સંપાતીકરણ આવર્ત હોય છે પણ SHM નહિ.].

14.3 (b) અને (d) આવર્ત છે, દરેકનો આવર્તકાળ 2 s છે; (a) અને (c) આવર્ત નથી [નોંધો કે (c) માં માત્ર કોઈ એક જ સ્થાનનું પુનરાવર્તન, તે ગતિને આવર્ત હોવા માટે પર્યાપ્ત નથી. એક આવર્ત દરમિયાનની સમગ્ર ગતિ ક્રમશઃ પુનરાવર્તન પામવી જોઈએ].

14.4 (a) સાદી પ્રસંવાદી, $T = (2\pi/\omega)$; (b) આવર્ત, $T = (2\pi/\omega)$ પરંતુ સાદી પ્રસંવાદી નથી; (c) સાદી પ્રસંવાદી, $T = (\pi/\omega)$; (d) આવર્ત, $T = (2\pi/\omega)$, પરંતુ સાદી પ્રસંવાદી નથી; (e) બિનઆવર્ત; (f) બિનઆવર્ત ($t \rightarrow \infty$ સાથે વિધેય $\rightarrow \infty$ તેથી ભૌતિક રીતે સ્વીકાર્ય નથી.

14.5 (a) 0, +, + (b) 0, –, – (c) –, 0,0 (d) –, –, – (e) +, +, + (f) –, –, –

14.6 (c) સરળ આવર્ત ગતિ દર્શાવે છે.

14.7 A = $\sqrt{2}$ cm, $\phi = 7\pi/4$; B = $\sqrt{2}$ cm, $a = \pi/4$

14.8 219 N

14.9 આવૃત્તિ 3.2 s^{-1}; બ્લૉકનો મહત્તમ પ્રવેગ 8.0 m s^{-2}; બ્લૉકની મહત્તમ ઝડપ 0.4 m s^{-1}

14.10 (a) $x = 2 \sin 20t$

(b) $x = 2 \cos 20t$

(c) $x = - 2 \cos 20t$

જ્યાં, x cmમાં છે. આ વિધેયો કંપવિસ્તારમાં કે આવૃત્તિમાં જુદા પડતા નથી. તેઓ પ્રારંભિક કળામાં જુદા પડે છે.

14.11 (a) $x = -3 \sin \pi t$, જ્યાં x cmમાં છે.

(b) $x = -2 \cos \frac{\pi}{2} t$, જ્યાં x mમાં છે.

14.13 (a) અને (b) બંને માટે F/k

(b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (a) માટે અને $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ (b) માટે

14.14 100 m/min

14.15 8.4 s

14.16 (a) સાદા લોલક માટે, k પોતે જ mને સમપ્રમાણમાં હોવાથી m નાબૂદ થાય છે.

(b) $\sin \theta < \theta$; જો પુનઃસ્થાપક બળ $mg \sin \theta$ ને સ્થાને $mg\, \theta$ મુકાય તો તેનો અર્થ મોટા કોણ માટે કોણીય પ્રવેગ (સમી 14.27)માં અસરકારક ઘટાડો થાય છે. આથી આવર્તકાળ Tમાં આપેલ સૂત્ર, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; જ્યાં $\sin\theta = \theta$ ધારેલ છે, તે પરથી મળતા મૂલ્ય કરતાં વધારો થાય છે.

(c) હા, કાંડા ઘડિયાળની અંદર ગતિ સ્પ્રિંગ-કાર્ય પર આધારિત છે અને તેને ગુરુત્વપ્રવેગ સાથે કોઈ સંબંધ નથી.

(d) મુક્ત પતન પામતા માણસ માટે ગુરુત્વ અદૃશ્ય થઈ જાય છે તેથી આવૃત્તિ શૂન્ય છે.

14.17 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \upsilon^4 / R^2}}}$. સૂચન : સમક્ષિતિજ સમતલમાં લાગતા ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ υ^2/Rને લીધે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ ઘટે છે.

14.18 સંતુલનમાં, બૂચનું વજન ઉત્પ્લાવક બળના બરાબર છે. જ્યારે બૂચને x જેટલો નીચે ધકેલવામાં (દબાવવામાં) આવે છે ત્યારે ઉપર તરફનું ચોખ્ખું (net) ઉત્પ્લાવક બળ $Ax\rho_1 g$ છે. આમ બળ-અચળાંક $k = A\rho_1 g$. $m = Ah\rho$નો અને $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$નો ઉપયોગ કરતાં; આપેલ સૂત્ર મળે છે.

14.19 જ્યારે બંને છેડા વાતાવરણમાં ખુલ્લા છે અને બે ભુજમાં પ્રવાહીના સ્તરમાં તફાવત h છે; ત્યારે પ્રવાહી સ્તંભ પરનું ચોખ્ખું (net) બળ $Ah\rho g$ છે જ્યાં, A નળીના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ અને ρ પ્રવાહીની ઘનતા છે. પુનઃસ્થાપક બળ hને સમપ્રમાણમાં હોવાથી ગતિ સાદી પ્રસંવાદી પ્રકારની છે.

14.20 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Vm}{Ba^2}}$ જ્યાં, B હવાનો બલ્ક મૉડ્યૂલસ છે. સમતાપી ફેરફાર માટે $B = P$.

14.21 (a) $5 \times 10^4 \text{N m}^{-1}$ (b) 1344.6 kg s^{-1}

14.22 **સૂચન :** સરેરાશ ગતિઊર્જા $= \dfrac{1}{T}\int_0^T \dfrac{1}{2} m\upsilon^2 dt$; સરેરાશ સ્થિતઊર્જા $= \dfrac{1}{T}\int_0^T \dfrac{1}{2} kx^2 dt$

14.23 **સૂચન :** વળલોલકનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\alpha}}$ પરથી મળે છે. જ્યાં, I ભ્રમણ-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. આપણા કિસ્સામાં $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, જ્યાં M તક્તીનું દળ અને R તેની ત્રિજ્યા છે. આપેલાં મૂલ્યો અવેજ કરતાં $\alpha = 2.0 \text{ N m rad}^{-1}$.

14.24 (a) $-5\pi^2 \text{ m s}^{-2}$; 0 (b) $-3\pi^2 \text{ m s}^{-2}$; $0.4\pi \text{ m s}^{-1}$ (c) 0 ; $0.5\ \pi \text{ m s}^{-1}$

14.25 $\sqrt{\left(x_0^2 + \dfrac{\upsilon_0^2}{\omega^2}\right)}$

પ્રકરણ 15

15.1 0.5 s

15.2 8.7 s

15.3 2.06×10^4 N

15.4 આદર્શ વાયુ નિયમ ધારો : $P = \dfrac{\rho RT}{M}$, જ્યાં ρ ઘનતા, M અણુભાર અને T વાયુનું તાપમાન છે. આ પરથી $\upsilon = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$. જે દર્શાવે છે કે υ એ :

(a) દબાણ પર આધારિત નથી.

(b) $\sqrt{T}$ મુજબ વધે છે.

(c) પાણીનો અણુભાર (18); N_2 (28) અને O_2 (32)ના અણુભારો કરતાં ઓછો છે. આથી આર્દ્રતા (ભેજ) વધે છે તેમ હવાનો અસરકારક અણુભાર ઘટે છે તેથી υ વધે છે.

15.5 ઊલટું સત્ય નથી. પ્રગામી તરંગ માટે સ્વીકાર્ય વિધેયની સ્વાભાવિક જરૂરિયાત એ છે કે તે દરેક બિંદુએ અને દરેક સમયે સીમિત (નિશ્ચિત) હોવું જોઈએ. માત્ર વિધેય (c) આ શરતનું પાલન કરે છે. બાકીના પ્રગામી તરંગને રજૂ કરી શકે નહિ.

15.6 (a) 3.4×10^{-4} m (b) 1.49×10^{-3} m

15.7 4.1×10^{-4} m

15.8 (a) પ્રગામી તરંગ. તે 20 m s^{-1}ની ઝડપથી જમણીથી ડાબી બાજુ ગતિ કરે છે.

(b) 3.0 cm, 5.7 Hz

(c) $\pi/4$

(d) 3.5 m

15.9 બધા આલેખો sinusoidal (sine પ્રકારના) છે. તેમના કંપવિસ્તાર સમાન અને આવૃત્તિ સમાન છે, પરંતુ પ્રારંભિક કળાઓ જુદી છે.

15.10 (a) $6.4\ \pi$ rad

(b) $0.8\ \pi$ rad

(c) π rad

(d) $(3\pi/2)$ rad

15.11 (a) સ્થિત તરંગ

(b) દરેક તરંગ માટે $l = 3$ m, n = 60 Hz અને $\upsilon = 180$ m s^{-1}

(c) 648 N

15.12 (a) દોરી પરનાં નિષ્પદ બિંદુઓ સિવાયનાં બધાં બિંદુઓને સમાન આવૃત્તિ અને સમાન કળા હોય છે પણ કંપવિસ્તાર સમાન નથી.

(b) 0.042 m

15.13 (a) સ્થિત તરંગ

(b) કોઈ પણ તરંગ માટે અસ્વીકાર્ય વિધેય

(c) પ્રગામી હાર્મોનિક તરંગ

(d) બે સ્થિત તરંગોનું સંપાતીકરણ

15.14 (a) 79 m s^{-1}

(b) 248 N

15.15 347 m s^{-1}

સૂચન : એક છેડે બંધ નળી માટે $\upsilon_n = \dfrac{(2n-1)\text{v}}{4l}$; $n = 1,2,3,\ldots$

15.16 5.06 km s^{-1}

15.17 પ્રથમ હાર્મોનિક (મૂળભૂત); ના

15.18 318 Hz

15.20 (i) (a) 412 Hz (b) 389 Hz (ii) દરેક કિસ્સામાં 340 m s^{-1}

15.21 400 Hz, 0.875 m, 350 m s^{-1}. ના, કારણ કે આ કિસ્સામાં માધ્યમની સાપેક્ષે ઉદ્ગમ અને નિરીક્ષક બંને ગતિમાં છે.

15.22 (a) 1.666 cm, 87.75 cm s^{-1}; ના, તરંગ-પ્રસરણનો વેગ – 24 m s^{-1} છે.

(b) $x = 1$ cm બિંદુથી; $n\,\lambda$ ($n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$) જ્યાં $\lambda = 12.6$ m છે; અંતરોએ આવેલાં બધાં બિંદુઓ

15.23 (a) સ્પંદનને નિશ્ચિત તરંગલંબાઈ અથવા આવૃત્તિ નથી, પરંતુ પ્રસરણની નિશ્ચિત ઝડપ છે (વિભાજન ન કરે તેવા માધ્યમમાં)

(b) ના

15.24 $y = 0.05 \sin(\omega t - kx)$; અત્રે $\omega = 1.61 \times 10^3$ s^{-1}, $k = 4.84$ m^{-1}; x અને y mમાં છે.

15.25 45.9 kHz

15.26 1920 km

15.27 42.47 kHz

BIBLIOGRAPHY

પાઠ્યપુસ્તકો

આ પુસ્તકમાં આવરી લેવાયેલ મુદ્દાઓ અંગેના વધારાનાં વાચન માટે નીચેનાં પુસ્તકોમાંથી એક કે વધુ પુસ્તકનું વાચન કરવાનું કદાચ તમને ગમશે. જોકે આમાંનાં કેટલાંક પુસ્તકો વધુ ઊંચાં સ્તરનાં છે અને આ પુસ્તકમાંના મુદ્દાઓ કરતાં ઘણા વધુ મુદ્દાઓ ધરાવતા હોઈ શકે.

1. **Ordinary Level Physics**, A.F. Abbott, Arnold-Heinemann (1984)
2. **Advanced Level Physics**, M. Nelkon and P. Parker, 6th Edition Arnold-Heinemann (1987)
3. **Advanced Physics**, Tom Duncan, John Murray (2000)
4. **Fundamentals of Physics**, David Halliday, Robert Resnick and Jearl Walker, 7th Edition John Wily (2004)
5. **University Physics**, H.D. Young, M.W. Zemansky and F.W. Sears, Narosa Pub. House (1982)
6. **Problems in Elementary Physics**, B. Bukhovtsa, V. Krivchenkov, G. Myakishev and V. Shalnov, MIR Publishers, (1971)
7. **Lectures on Physics** (3 volumes), R.P. Feynman, Addision – Wesley (1965)
8. **Berkeley Physics Course** (5 volumes) McGraw Hill (1965)
   a. Vol. 1 – Mechanics: (Kittel, Knight and Ruderman)
   b. Vol. 2 – Electricity and Magnetism (E.M. Purcell)
   c. Vol. 3 – Waves and Oscillations (Frank S. Craw-ford)
   d. Vol. 4 – Quantum Physics (Wichmann)
   e. Vol. 5 – Statistical Physics (F. Reif)
9. **Fundamental University Physics**, M. Alonso and E. J. Finn, Addison – Wesley (1967)
10. **College Physics**, R.L. Weber, K.V. Manning, M.W. White and G.A. Weygand, Tata McGraw Hill (1977)
11. **Physics : Foundations and Frontiers**, G. Gamow and J.M. Cleveland, Tata McGraw Hill (1978)
12. **Physics for the Inquiring Mind**, E.M. Rogers, Princeton University Press (1960)
13. **PSSC Physics Course**, DC Heath and Co. (1965) Indian Edition, NCERT (1967)
14. **Physics Advanced Level**, Jim Breithampt, Stanley Thornes Publishers (2000)
15. **Physics,** Patrick Fullick, Heinemann (2000)

16. **Conceptual Physics,** Paul G. Hewitt, Addision-Wesley (1998)
17. **College Physics,** Raymond A. Serway and Jerry S. Faughn, Harcourt Brace and Co. (1999)
18. **University Physics,** Harris Benson, John Wiley (1996)
19. **University Physics,** William P. Crummet and Arthur B. Western, Wm.C. Brown (1994)
20. **General Physics,** Morton M. Sternheim and Joseph W. Kane, John Wiley (1988)
21. **Physics,** Hans C. Ohanian, W.W. Norton (1989)
22. **Advanced Physics,** Keith Gibbs, Cambridge University Press(1996)
23. **Understanding Basic Mechanics,** F. Reif, John Wiley (1995)
24. **College Physics,** Jerry D. Wilson and Anthony J. Buffa, Prentice-Hall (1997)
25. **Senior Physics, Part – I,** I.K. Kikoin and A.K. Kikoin, Mir Publishers (1987)
26. **Senior Physics, Part – II,** B. Bekhovtsev, Mir Publishers (1988)
27. **Understanding Physics,** K. Cummings, Patrick J. Cooney, Priscilla W. Laws and Edward F. Redish, John Wiley (2005)
28. **Essentials of Physics,** John D. Cutnell and Kenneth W. Johnson, John Wiley (2005)

સામાન્ય પુસ્તકો

વિજ્ઞાન અને માહિતીપ્રદ અને મનોરંજક વ્યાપક વાચન માટે તમને કદાચ નીચેનામાંથી કેટલાંક પુસ્તકો વાંચવાનું ગમશે. આમ છતાં યાદ રાખો કે આમાંનાં ઘણાં પુસ્તકો આ પુસ્તકના સ્તર કરતા ઘણા આગળના સ્તરે લખાયેલ છે.

1. **Mr. Tompkins** in paperback, G. Gamow, Cambridge University Press (1967)
2. **The Universe and Dr. Einstein**, C. Barnett, Time Inc. New York (1962)
3. **Thirty years that Shook Physics**, G. Gamow, Double Day, New York (1966)
4. **Surely You're Joking, Mr. Feynman**, R.P. Feynman, Bantam books (1986)
5. **One, Two, Three... Infinity**, G. Gamow, Viking Inc. (1961)
6. **The Meaning of Relativity**, A. Einstein, (Indian Edition) Oxford and IBH Pub. Co (1965)
7. **Atomic Theory and the Description of Nature**, Niels Bohr, Cambridge (1934)
8. **The Physical Principles of Quantum Theory**, W. Heisenberg, University of Chicago Press (1930)
9. **The Physics- Astronomy Frontier**, F. Hoyle and J.V. Narlikar, W.H. Freeman (1980)
10. **The Flying Circus of Physics with Answer**, J. Walker, John Wiley and Sons (1977)
11. **Physics for Everyone** (series), L.D. Landau and A.I. Kitaigorodski, MIR Publisher (1978)
    Book 1: Physical Bodies
    Book 2: Molecules
    Book 3: Electrons
    Book 4: Photons and Nuclei
12. **Physics can be Fun**, Y. Perelman, MIR Publishers (1986)
13. **Power of Ten**, Philip Morrison and Eames, W.H. Freeman (1985)
14. **Physics in your Kitchen Lab.**, I.K. Kikoin, MIR Publishers (1985)
15. **How Things Work : The Physics of Everyday Life**, Louis A. Bloomfield, John Wiley (2005)
16. **Physics Matters : An Introduction to Conceptual Physics,** James Trefil and Robert M. Hazen, John Wiley (2004)

પારિભાષિક શબ્દો

A

Absolute scale temperature - તાપમાનનો નિરપેક્ષ માપક્રમ
Absolute zero - નિરપેક્ષ શૂન્ય
Acceleration (linear) - પ્રવેગ (રેખીય)
Acceleration due to gravity - ગુરુત્વપ્રવેગ
Accuracy - ચોકસાઈ
Action-reaction - ક્રિયા-પ્રતિક્રિયા
Addition of vectors - સદિશોનો સરવાળો
Adiabatic process - સમોષ્મી પ્રક્રિયા
Aerofoil - ઍરોફોઇલ
Air resistance - હવાનો અવરોધ
Amplitude - કંપવિસ્તાર
Angle of contact - સંપર્કકોણ
Angstrom - ઍંગસ્ટ્રોમ
Angular Acceleration - કોણીય પ્રવેગ
Angular displacement - કોણીય સ્થાનાંતર
Angular frequency - કોણીય આવૃત્તિ
Angular momentum - કોણીય વેગમાન
Angular velocity - કોણીય વેગ
Angular wave number - કોણીય તરંગ-સંખ્યા
Antinodes - પ્રસ્પંદ બિંદુ
Archimedes Principle - આર્કિમિડિસનો નિયમ
Area expansion - ક્ષેત્રીય વિસ્તરણ
Atmospheric pressure - વાતાવરણનું દબાણ
Average acceleration - સરેરાશ પ્રવેગ
Average speed - સરેરાશ ઝડપ
Average velocity - સરેરાશ વેગ
Avogadro's law - ઍવોગેડ્રોનો નિયમ

B

Banked road - ઢોળાવવાળો રસ્તો
Barometer - બૅરોમીટર
Beat frequency - સ્પંદ આવૃત્તિ
Beats - સ્પંદ
Bending of beam - પાટડાનું વંકન
Bernoulli's Principle - બર્નુલીનો સિદ્ધાંત
Blood pressure - લોહીનું દબાણ (રક્તચાપ)
Boiling point - ઉત્કલન બિંદુ
Boyle's law - બૉઇલનો નિયમ
Buckling - વળી જવું (ઝૂકી જવું)
Bulk modulus - કદ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક
Buoyant force - ઉત્પ્લાવક બળ

C

Calorimeter - કૅલરીમિટર
Capillary rise - કેશાકર્ષણ
Capillary wave - કેશિકા તરંગો
Carnot engine - કાર્નોટ-ઍન્જિન
Central forces - કેન્દ્રિય બળો

Centre of Gravity - ગુરુત્વ કેન્દ્ર

Centre of mass - દ્રવ્યમાન-કેન્દ્ર

Centripetal acceleration - કેન્દ્રગામી પ્રવેગ

Centripetal force - કેન્દ્રગામી બળ

Change of state - અવસ્થાનો ફેરફાર

Charle's law - ચાર્લ્સનો નિયમ

Chemical Energy - રાસાયણિક ઊર્જા

Circular motion - વર્તુળાકાર ગતિ

Clausius statement - ક્લોસિયસનું કથન

Coefficient of area expansion - ક્ષેત્રીય પ્રસરણાંક

Coefficient of linear expansion - રેખીય પ્રસરણાંક

Coefficient of performance - પરફોર્મન્સ ગુણાંક

Coefficient of static friction - સ્થિત ઘર્ષણાંક

Coefficient of viscosity - શ્યાનતા ગુણાંક

Coefficient of volume expansion - કદ-પ્રસરણાંક

Cold reservoir - ઠારણ-વ્યવસ્થા (તંત્ર)

Collision - સંઘાત

Collision in two dimensions - દ્વિ-પરિમાણમાં સંઘાત

Compressibility - દબનીયતા

Compressions - સંકોચન

Compressive stress - દાબીય પ્રતિબળ

Conduction - ઉષ્માવહન

Conservation laws - સંરક્ષણના નિયમો

Conservation of angular momentum - કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ

Conservation of Mechanical Energy - યાંત્રિકઊર્જાનું સંરક્ષણ

Conservation of momentum - વેગમાન સંરક્ષણ

Conservative force - સંરક્ષી બળ

Constant acceleration - અચળ પ્રવેગ

Contact force - સંપર્ક બળ

Convection - ઉષ્માનયન

Couple - યુગ્મ

Crest - શૃંગ

Cyclic process - ચક્રીય પદ્ધતિ

D

Dalton's law of partial pressure - ડાલ્ટનનો આંશિક દબાણનો નિયમ

Damped oscillations - અવમંદિત દોલનો

Damped simple Harmonic motion - અવમંદિત સરળ આવર્ત ગતિ

Damping constant - અવમંદન અચળાંક

Damping force - અવમંદિત બળ

Derived units - સાધિત એકમો

Detergent action - ડિટરજન્ટ કાર્ય

Diastolic pressure - ડાયસ્ટોલિક દબાણ

Differential calculus - વિકલિત કલનશાસ્ત્ર

Dimensional analysis - પારિમાણિક વિશ્લેષણ

Dimensions - પરિમાણો

Displacement vector - સ્થાનાંતર સદિશ

Displacement - સ્થાનાંતર

Doppler effect - ડૉપ્લર-અસર

Doppler shift - ડોપ્લર શિફ્ટ (સ્થાનાંતર, ફેરફાર)

Driving frequency - ચાલક આવૃત્તિ

Dynamics of rotational motion - ચાકગતિ વિજ્ઞાન

E

Efficiency of heat engine - ઉષ્મા-એન્જિનની કાર્યક્ષમતા
Elastic Collision - સ્થિતિસ્થાપક સંઘાત
Elastic deformation - સ્થિતિસ્થાપક વિકૃતિ
Elastic limit - સ્થિતિસ્થાપકતા હદ
Elastic moduli - સ્થિતિસ્થાપક અંકો
Elasticity - સ્થિતિસ્થાપકતા
Elastomers - ઈલાસ્ટોમર્સ
Electromagnetic force - વિદ્યુતચુંબકીય બળ
Energy - ઊર્જા
Equality of vectors - સદિશોની સમાનતા
Equation of continuity - સાતત્ય સમીકરણ
Equilibrium of a particle - કણનું સંતુલન
Equilibrium of Rigid body - દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન
Equilibrium position - સંતુલન સ્થાન
Errors in measurement - માપનમાં ત્રુટિઓ
Escape speed - નિષ્ક્રમણ ઝડપ

F

First law of Thermodynamics - થરમૉડાઇનેમિક્સનો પ્રથમ નિયમ
Fluid pressure - તરલ-દબાણ
Force - બળ
Forced frequency - પ્રણોદિત આવૃત્તિ
Forced oscillations - પ્રણોદિત દોલનો
Fracture point - ફ્રેક્ચર પૉઇન્ટ
Free Fall - મુક્ત પતન
Free-body diagram - ફ્રી-બોડી ડાયાગ્રામ
Frequency of periodic motion- આવર્તગતિની આવૃત્તિ
Friction - ઘર્ષણ
Fundamental Forces - મૂળભૂત બળો
Fundamental mode - મૂળભૂત મોડ (પ્રકાર)
Fusion - સંલયન

G

Gauge pressure - ગેજ-દબાણ
Geocentric model - પૃથ્વી-કેન્દ્રિય મોડલ
Geostationary satellite - ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ
Gravitational constant - ગુરુત્વાકર્ષણનો અચળાંક
Gravitational Force - ગુરુત્વીય બળ
Gravitational potential energy - ગુરુત્વીય સ્થિતિઊર્જા
Gravity waves - ગુરુત્વીય તરંગો

H

Harmonic frequency - પ્રસંવાદી આવૃત્તિ
Harmonics - પ્રસંવાદી
Heat capacity - ઉષ્માધારિતા
Heat engines - ઉષ્મા-એન્જિન
Heat pumps - હીટપંપ
Heat - ઉષ્મા
Heliocentric model - સૂર્ય-કેન્દ્રિય મોડલ
Hertz - હર્ટ્ઝ
Hooke's law - હૂકનો નિયમ
Horizontal range - સમક્ષિતિજ અવધિ
Hot reservoir - ઉષ્માપ્રાપ્તિ-સ્થાન
Hydraulic brakes - હાઇડ્રોલિક બ્રેક્સ
Hydraulic lift - હાઇડ્રોલિક લિફ્ટ
Hydraulic machines - હાઇડ્રોલિક મશીન્સ
Hydraulic pressure - હાઇડ્રોલિક દબાણ
Hydraulic stress - હાઇડ્રોલિક પ્રતિબળ
Hydrostatic paradox - હાઇડ્રોસ્ટેટિક પેરાડોક્સ

I

Ideal gas equation - આદર્શવાયુ સમીકરણ
Ideal gas - આદર્શ વાયુ
Impulse - આઘાત
Inelastic collision - અસ્થિતિસ્થાપક સંઘાત
Initial phase angle - પ્રારંભિક કળાકોણ
Instantaneous acceleration - તત્કાલીન પ્રવેગ
Instantaneous speed - તત્કાલીન ઝડપ
Instantaneous velocity - તત્કાલીન વેગ
Interference - વ્યતિકરણ
Internal energy - આંતરિક ઊર્જા
Irreversible engine - અપ્રતિવર્તી એન્જિન
Irreversible processes - અપ્રતિવર્તી પ્રક્રિયા
Isobaric process - સમદાબ પ્રક્રિયા
Isochoric process - સમકદ પ્રક્રિયા
Isotherm - સમતાપ
Isothermal process - સમતાપી પ્રક્રિયા

K

Kelvin-Planck statement - કેલ્વિન-પ્લાન્ક કથન
Kepler's laws of planetary motion - ગ્રહોની ગતિના કેપ્લરના નિયમો
Kinematics of Rotational Motion - શુદ્ધ ચાકગતિ વિજ્ઞાન
Kinematics - શુદ્ધ ગતિશાસ્ત્ર
Kinetic energy of rolling motion - રોલિંગ ગતિની ગતિઊર્જા
Kinetic Energy - યાંત્રિકઊર્જા
Kinetic interpretation of temperature - તાપમાનનું ગતિક અર્થઘટન
Kinetic theory of gases - વાયુનો ગતિવાદ

L

Laminar flow - સ્તરીય વહન
Laplace correction - લાપ્લાસનો સુધારો
Latent heat of fusion - ગલનગુપ્ત ઉષ્મા
Latent heat of vaporisation - બાષ્પાયન ગુપ્ત ઉષ્મા
Latent heat - રૂપાંતરણની ઉષ્મા (ગુપ્ત ઉષ્મા)
Law of cosine - કોસાઇનનો નિયમ
Law of equipartition of energy - ઊર્જા સમવિભાજનનો નિયમ
Law of Inertia - જડત્વનો નિયમ
Law of sine - સાઇનનો નિયમ
Linear expansion - રેખીય પ્રસરણ
Linear harmonic oscillator - રેખીય પ્રસંવાદી દોલક
Linear momentum - રેખીય વેગમાન
Longitudinal strain - પ્રતાન (સંગત) વિકૃતિ
Longitudinal stress - પ્રતાન-પ્રતિબળ
Longitudinal Wave - સંગત તરંગ

M

Magnus effect - મૅગ્નસ અસર
Manometer - મેનોમીટર
Mass Energy Equivalence - દળ-ઊર્જા સમતુલ્યતા
Maximum height of projectile - પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થની મહત્તમ ઊંચાઈ
Maxwell Distribution - મૅક્સવેલ વિસ્તરણ
Mean free path - સરેરાશ મુક્તપથ
Measurement of length - લંબાઈનું માપન
Measurement of mass - દળનું માપન
Measurement of temperature -તાપમાનનું માપન
Measurement of time - સમયનું માપન

Melting point - ગલનબિંદુ

Modes - મૉડ્સ (પ્રકાર)

Modulus of elasticity - સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક

Modulus of rigidity - દૃઢતા-અંક

Molar specific heat capacity at constant pressure - અચળ દબાણે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા

Molar specific heat capacity at constant volume - અચળ કદે મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા

Molar specific heat capacity - મોલર વિશિષ્ટ ઉષ્મા

Molecular nature of matter - દ્રવ્યનું આણ્વિક સ્વરૂપ

Moment of Inertia - જડત્વની ચાકમાત્રા

Momentum - વેગમાન

Motion in a plane - સમતલમાં ગતિ

Multiplication of vectors - સદિશોનો ગુણાકાર

Musical instruments - સંગીતનાં વાદ્યો

N

Natural frequency - પ્રાકૃતિક આવૃત્તિ

Newton's first law of motion - ન્યૂટનનો ગતિનો પ્રથમ નિયમ

Newton's Law of cooling - ન્યૂટનનો શીતનનો નિયમ

Newton's law of gravitation - ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ

Newton's second law of motion - ન્યૂટનનો ગતિનો બીજો નિયમ

Newton's third law of motion - ન્યૂટનનો ગતિનો ત્રીજો નિયમ

Newton's formula for speed of sound - ધ્વનિની ઝડપ માટેનું ન્યૂટનનું સૂત્ર

Nodes - નિસ્પંદ બિંદુઓ

Normal Modes - નૉર્મલ બિંદુ મોડ્સ

Note - સ્વર (સૂર)

Nuclear Energy - ન્યૂક્લિયર ઊર્જા

Null vector - શૂન્ય સદિશ

O

Odd harmonics - એકીક્રમાંક હાર્મોનિક્સ

Orbital velocity/speed - કક્ષીય વેગ/ઝડપ

Order of magnitude - માનનો ક્રમ

Oscillations - દોલનો

Oscillatory motion - દોલિત ગતિ

P

Parallax method - દૃષ્ટિ સ્થાનભેદની રીત

Parallelogram law of addition of vectors - સદિશોના સરવાળાનો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ

Pascal's law - પાસ્કલનો નિયમ

Path length - પથલંબાઈ

Path of projectile - પ્રક્ષિપ્તનો ગતિપથ

Periodic force - આવર્ત બળ

Periodic motion - આવર્ત ગતિ

Periodic time - આવર્તકાળ

Permanent set - કાયમી સ્થાપન

Phase angle - કળાકોણ

Phase constant - કળા-અચળાંક

Phase diagram - ફેઝ ડાયાગ્રામ

Pipe open at both ends - બંને છેડે ખુલ્લી નળી

Pipe open at one end - એક છેડે ખુલ્લી નળી

Pitch - સ્વર

Plastic deformation - પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ

Plasticity - અસ્થિતિસ્થાપકતા

Polar satellite - ધ્રુવીય ઉપગ્રહ

Position vector and displacement - સ્થાનસદિશ અને સ્થાનાંતર

Potential energy of a spring - સ્પ્રિંગની સ્થિતિઊર્જા

Potential energy - સ્થિતિઊર્જા

Power - કાર્યત્વરા

Precession - સચોટતા

Pressure gauge - પ્રેશર ગેજ

Pressure of an ideal gas - આદર્શ વાયુનું દબાણ

Pressure pulse - દબાણ સ્પંદન

Pressure - દબાણ

Principle of Conservation of Energy - ઊર્જા-સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત

Principle of moments - ચાકમાત્રાનો સિદ્ધાંત

Progressive wave - પ્રગામી તરંગ

Projectile motion - પ્રક્ષિપ્ત ગતિ

Projectile - પ્રક્ષિપ્ત

Propagation constant - પ્રસરણ અચળાંક

Pulse - સ્પંદન

Q

Quasi-static process - કોસી (લગભગ) સ્થાયી પ્રક્રિયા

R

Radial acceleration - ત્રિજ્યાવર્તી પ્રવેગ

Radiation - વિકિરણ

Radius of Gyration - ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા

Raman effect - રામન-અસર

Rarefactions - વિઘનન

Ratio of specific heat capacities - વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતાઓનો ગુણોત્તર

Reaction time - પ્રતિક્રિયા-સમય

Real gases - વાસ્તવિક વાયુઓ

Rectilinear motion - સુરેખ ગતિ

Reductionism - લઘુકૃતીકરણ

Reflected wave - પરાવર્તિત તરંગ

Reflection of waves - તરંગોનું પરાવર્તન

Refracted wave - વક્રીભૂત તરંગ

Refrigerator - રેફ્રિજરેટર

Regelation - પુનઃધારણ

Relative velocity in two dimensions - દ્વિપરિમાણમાં સાપેક્ષ વેગ

Relative velocity - સાપેક્ષ વેગ

Resolution of vectors - સદિશોનું વિભાજન

Resonance - અનુનાદ

Restoring force - પુનઃસ્થાપક બળ

Reversible engine - પ્રતિવર્તી એન્જિન

Reversible processes - પ્રતિવર્તી પ્રક્રિયાઓ

Rigid body - દૃઢ પદાર્થ

Rolling motion - રોલિંગ ગતિ

Root mean square speed - સરેરાશ વર્ગિત ઝડપ

Rotation - ભ્રમણ (ચાકગતિ)

S

S.H.M. (Simple Harmonic Motion) - સરળ આવર્તગતિ

Scalar-product - અદિશ ગુણાકાર

Scalars - અદિશો

Scientific Method - વૈજ્ઞાનિક પદ્ધતિ

Second law of Thermodynamics - થરમૉડાયનેમિક્સનો બીજો નિયમ

Shear modulus - આકાર સ્થિતિસ્થાપકતા અંક

Shearing strain - આકાર-વિકૃતિ

Shearing stress - સ્પર્શીય (આકાર) પ્રતિબળ

SI units - SI એકમો

Significant figures - સાર્થક અંકો
Simple pendulum - સાદું લોલક
Soap bubbles - સાબુના પરપોટા
Sonography - સોનોગ્રાફી
Sound - ધ્વનિ
Specific heat capacity of Solids - ઘન પદાર્થોની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા
Specific heat capacity of Gases - વાયુઓની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા
Specific heat capacity of Water - પાણીની વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા
Specific heat capacity - વિશિષ્ટ ઉષ્માધારિતા
Speed of efflux - નિષ્કાર્ષણ (બહાર ધકેલવાની) ઝડપ
Speed of Sound - ધ્વનિ-તરંગોની ઝડપ
Speed of Transverse wave on a stretched string - તણાવવાળી દોરી પર લંબગત તરંગની ઝડપ
Sphygmomanometer - સ્ફિગ્મોમેનોમીટર
Spring constant - સ્પ્રિંગ-અચળાંક
Standing waves - સ્થિત-તરંગો
Stationary waves - સ્થિત-તરંગો
Steady flow - સ્થાયી વહન
Stethoscope - સ્ટેથોસ્કૉપ
Stokes' law - સ્ટૉક્નો નિયમ
Stopping distance - સ્ટૉપિંગ ડિસ્ટન્સ
Strain - વિકૃતિ
Streamline flow - ધારારેખીય વહન
Streamline - ધારારેખાઓ
Stress - પ્રતિબળ
Stress-strain curve - પ્રતિબળ-વિકૃતિ વક્ર
Stretched string - તણાવવાળી દોરી
Sublimation - ઊર્ધ્વપાતન
Subtraction of vectors - સદિશોની બાદબાકી
Superposition principle - સંપાતપણાનો સિદ્ધાંત
Surface energy - પૃષ્ઠ-ઊર્જા
Surface tension - પૃષ્ઠતાણ
Symmetry - સંમિતિ
System of units - એકમ પદ્ધતિ
Systolic pressure - સિસ્ટોલિક દબાણ

T

Temperature - તાપમાન
Tensile strength - તણાવ મજબૂતી
Tensile stress - તણાવ પ્રતિબળ
Terminal velocity - અંતિમ વેગ
Theorem of parallel axes - સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય
Theorem of perpendicular axes - લંબ-અક્ષોનો પ્રમેય
Thermal conductivity - ઉષ્માવાહકતા
Thermal equilibrium - ઉષ્મીય સંતુલન
Thermal expansion - ઉષ્મીય પ્રસરણ
Thermal stress - ઉષ્મીય પ્રતિબળ
Thermodynamic processes - થરમૉડાયનેમિક પ્રક્રિયા
Thermodynamic state variables - થરમૉડાયનેમિક અવસ્થા ચલો
Thermodynamics - થરમૉડાયનેમિક્સ
Time of flight - ઉડ્ડયન-સમય
Torque - ટૉર્ક
Torricelli's Law - ટોરિસિલિનો નિયમ
Trade wind - પારંપરિક પવન
Transmitted wave - પારગમિત તરંગ
Travelling wave - પ્રગામી તરંગ
Triangle law of addition of vectors - સદિશ સરવાળા માટે ત્રિકોણનો નિયમ

Triple point - ત્રિ-બિન્દુ

Trough - ગર્ત

Tune - સુમેળ સાધવો (સૂર મેળવવો.)

Turbulent flow - પ્રક્ષુબ્ધ વહન

U

Ultimate strength - અંતિમ મજબૂતી

Ultrasonic waves - અલ્ટ્રાસોનિક તરંગો

Unification of Forces - બળોનું એકીકીકરણ

Unified Atomic Mass Unit - યુનિફાઇડ ઍટોમિક માસ યુનિટ

Uniform circular motion - નિયમિત વર્તુળાકાર ગતિ

Uniform Motion - નિયમિત ગતિ

Uniformly accelerated motion - નિયમિત પ્રવેગી ગતિ

Unit vectors - એકમ સદિશો

V

Vaporisation - બાષ્પીકરણ

Vector-product - સદિશ ગુણાકાર

Vectors - સદિશો

Velocity amplitude - વેગ કંપવિસ્તાર

Venturi meter - વેન્ચુરિમીટર

Vibration - કંપન

Viscosity - શ્યાનતા

Volume expansion - કદ-પ્રસરણ

Volume Strain - કદ-વિકૃતિ

W

Wave equation - તરંગ સમીકરણ

Wave length - તરંગલંબાઈ

Wave speed - તરંગઝડપ

Waves - તરંગો

Waxing and waning of sound - ધ્વનિનું મહત્તમ અને લઘુતમ થવું

Weak nuclear force - વીક ન્યુક્લિયર બળ

Weightlessness - વજનવિહીનતા

Work done by variable force - ચલબળ વડે થતું કાર્ય

Work - કાર્ય

Work-Energy Theorem - કાર્યઊર્જા-પ્રમેય

Working substance - કાર્યકારી પદાર્થ

Y

Yield Point - આધીન બિંદુ

Yield strength - આધીન મજબૂતી

Young's modulus - યંગ મૉડ્યૂલસ

Z

Zeroth law of Thermodynamics - થરમૉડાયનેમિક્સનો શૂન્ય ક્રમનો નિયમ

નોંધ

નોંધ